Topología

Instrucciones: Contestar todas las preguntas en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Demostrar que si X es de Hausdorff y localmente compacto en el punto x, entonces para cada entorno U de x, existe entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subseteq U$.

2. (a) Si $A \subseteq X$, una retracción de X sobre A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Demostrar que una retracción es una aplicación cociente.

   (b) Sea la relación de equivalencia sobre $X = \mathbb{R}^2$ definida por:

   $$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \qquad \text{si} \qquad x_0 - y_0^3 = x_1 - y_1^3$$

   Demostrar que el espacio cociente X^* correspondiente es homeomorfo a $\mathbb{R}$. *Indicación: considerar* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \{0\}$ *definida por* $f(x \times y) = (x - y^3) \times 0$.

3. En la esfera unitaria S^n, se define la relación que identifica un punto x con su antipoda $-x$. Sea $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ el espacio cociente. Demostrar que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es un espacio de Haussdorff.

4. Encontrar una aplicación recubridora de tres hojas $p : M \to M$, donde M es la cinta de Möbius (es decir, el cuadrado con esquema $abac$). Encontrar la imagen de $p_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_1)$. Cuál es el orden del grupo cociente $\pi_1(M, x_1)/p_*(\pi_1(M, x_0))$?

5. Sean las esferas $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Calcular los grupos de homología singular del espacio X siguiente:

   $$X = S_1 \cup S_2 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 4, z = 0\}$$

   (X corresponde a las dos esferas unidas por un círculo pasando por sus centros).

Topología

Instrucciones: Conteste a **6 de las 7 preguntas** en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

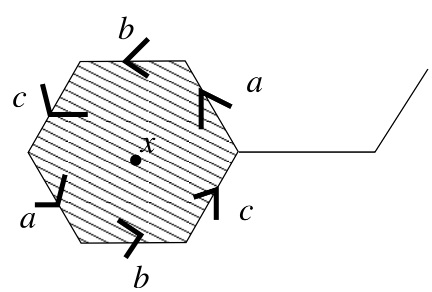
1. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demostrar que si Y y los conjuntos $p^{-1}(\{y\})$ son conexos, entonces X es también conexo.

2. Sea X un espacio topológico con la siguiente propiedad: si A es cerrado en X y si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua entonces existe extensión $g : X \to \mathbb{R}$ de f. Demostrar que X es normal.

3. Sea $f : [0,1] \to X$ un camino. Demostrar que los caminos $f_1, f_2 : [0,1] \to X$ definidos por $f_1(t) = f(t^2/3)$ y $f_2(t) = f(2t/3 + 1/3)$ son tales que
$$[f] = [f_1] * [f_2]$$

4. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora, con E conexo por caminos. Demuestre que si B es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

5. Sea X la figura siguiente:



   donde los lados se identifican según la orientación de las flechas. Calcular $\pi_1(X,x)$, $H_1(X)$ y $H_1(X - \{x\})$.

6. Sea el toro $T = S^1 \times S^1$ y sea $A = S^1 \times \{y_0\}$ un subespacio de T. Ocupar la sucesión exacta larga de homología relativa para la dupla (T, A) para obtener los grupos de homología $H_n(T)$ para todo n. *Ayuda: A es retracto de T.*

7. Calcular los grupos de homología del Δ-complejo X obtenido del n-símplice estándar Δ^n identificando todas las caras de misma dimensión (X tiene por lo tanto un sólo k-símplice para todo $k \leq n$).

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 4 horas

1. Sea n un entero positivo. Una *variedad topológica de dimensión* n es un espacio topológico X de Hausdorff, tal que cada punto $x \in X$ posee una vecindad abierta U homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Demuestre que cada variedad topológica es regular.

   Recordatorio: un espacio X es *regular* si es Hausdorff y para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto cerrado $C \subseteq X$ con $x \notin C$, existen subconjuntos abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos $U \cap V = \emptyset$ con $x \in U$ y $C \subseteq V$.

2. Sea n un entero no negativo. Se definen
$$E^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$
   y
$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$
   Demuestre que S^n no es un retracto de E^{n+1}.

3. Sea n un entero positivo y
$$G = \{g \in \mathbf{C}^\times \mid g^n = 1\}$$
   el grupo de n-esima raices de unidad. El grupo G actua por multiplicación en la esfera
$$S^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbf{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \subseteq \mathbf{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\},$$
   visto como subconjunto de los cuaterniones $\mathbf{H}$. Sea $X = S^3/G$ el espacio cociente. Calcule el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ respeto un punto de base arbitrario $x_0 \in X$, y los grupos de homologia $H_m(X, \mathbf{Z})$ para todo m.

4. Sean m y n enteros positivos con $m \neq n$. Demuestre que $\mathbf{R}^m$ y $\mathbf{R}^n$ no son homeomorfos.

5. Sea $SX = X \times [0, 1]/ < (x, 0) = (y, 0),\ (x, 1) = (y, 1) : x, y \in X >$ la suspensión de X. Demuestre que $\widetilde{H}_n(X, \mathbf{Z}) \cong \widetilde{H}_{n+1}(SX, \mathbf{Z})$ para todo n, donde $\widetilde{H}_n(X, \mathbf{Z})$ es la homologia reducida de X,

6. Sean X e Y espacios topológicos normales, y sean $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Sea Z el *espacio de adjunción* asociado: esto es el cociente de la unión disjunta $X \coprod Y$, por la relación $a = f(a)$ para todo $a \in A$. Demuestre que Z es normal.

   Recordatorio: un espacio X es *normal* si es Hausdorff y para cada par C, D de subconjuntos cerrados $C, D \subseteq X$ disjuntos $C \cap D = \emptyset$, existen subconjuntos abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos $U \cap V = \emptyset$ con $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Demuestre que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

2. Demuestre que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contractible

3. Sea $X = S^1$. Encuentre un espacio recubridor $(\tilde{X}, p)$ tal que $\tilde{X}$ es conexo por arcos y $|p^{-1}(x)| = 2$ para cada $x \in X$. Describa el homomorfismo inducido p_*.

4. Sea
$$X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(0, 0, z) \mid z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$
Calcule $\pi_1(X, x_0)$ donde $x_0 = (0, 0, 1)$.

5. Sea (X, τ) un espacio compacto Hausdorff . Sea μ una topologia en X con $\tau \subset \mu$ y con $\tau \neq \mu$. Muestre que μ no es compacto.

6. Calcule los grupos de homología singular del Δ-complejo X obtenido al identificar todas las caras de misma dimensión del 5-símplice singular $\Delta^5 = [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ (por lo tanto, X tiene un único k-símplice para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

7. Demuestre que si A es un retracto de X, entonces la sucesión
$$0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \longrightarrow 0$$
es exacta para todo n.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, donde Y es un espacio de Hausdorff. Demostrar que el conjunto $C = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
2. Sean $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $f\big(g(y)\big) = y$ para todo $y \in Y$. Demostrar que si Y es conexo y $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X también es conexo.
3. Sean B_1 y B_2 los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes:
$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$
Sea además
$$L = \{(0, 0, z) | -1 \leq z \leq 1\}$$
Calcular el grupo fundamental $\pi_1\big(Z, (0, 0, 1)\big)$ si $Z = (B_2 \setminus B_1) \cup L$.
4. Sea $f : X \to Y$ una biyección continua. Demostrar que si X es compacto e Y de Hausdorff entonces f es un homeomorfismo.
5. Sea el toro $T = S^1 \times S^1$ y sea $A = S^1 \times \{y_0\}$ un subespacio de T. Ocupar la sucesión exacta larga de homología relativa para la dupla (T, A) para obtener los grupos de homología $H_n(T)$ para todo n. *Ayuda: A es retracto de T.*
6. Calcular los grupos de homología del Δ-complejo X obtenido del n-símplice estándar Δ^n identificando todas las caras de misma dimensión (X tiene por lo tanto un sólo k-símplice para todo $k \leq n$).

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sean X un espacio de Hausdoff conexo y $f : X \to X$ una aplicación continua y abierta. Demostrar que f es la aplicación identidad si $f \circ f = f$.

2. Sean Y un espacio compacto y $p : X \to Y$ una aplicación recubridora. Demostrar que X es compacto si $p^{-1}(y)$ es un conjunto finito para todo $y \in Y$.

3. Demostrar que no existe aplicación $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua y inyectiva.

4. Calcular el grupo fundamental del espacio cociente obtenido de $S^1 \times I$ al identificar los puntos $(z, 0)$ y $(z^2, 1)$ para todos los $z \in S^1$ (se considera que $z = e^{i\theta}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$).

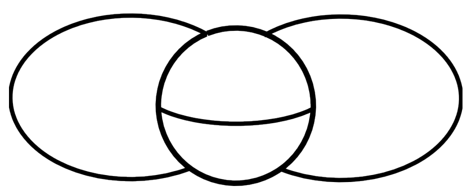
5. Calcular los grupos de homología del espacio cociente X obtenido del 3-símplice singular $\Delta^3 = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ identificando la cara $[v_0, v_1, v_2]$ con la cara $[v_0, v_1, v_3]$ y la cara $[v_1, v_2, v_3]$ con la cara $[v_0, v_2, v_3]$.

6. Sea A un subespacio conexo por arcos no vacío de X. Demostrar que $j_* : H_1(X) \to H_1(X, A)$ es sobreyectivo.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 4 horas

1. Demuestre que un espacio localmente arco-conexo es conexo si y sólo si es arco-conexo.
2. Resolver SOLO UNO de los ejercicios (a) y (b) siguientes:
   (a) Recuerde que un espacio topológico es llamado separable si posee un subconjunto denso numerable y es llamado 2-numerable si admite una base numerable. Demuestre que un espacio métrico es separable si y sólo si es 2-numerable.
   (b) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva de un espacio topológico X en otro espacio topológico Y. Qué condiciones satisfacer f para que Y sea un espacio cociente de X.
3. Sea X un espacio normal. Demuestre que dado dos cerrados $F, G \subseteq X$ disjuntos, existen abiertos U_F y U_G tales que $F \subseteq U_F$, $G \subseteq U_G$ y $\overline{U_F} \cap \overline{U_G} = \emptyset$.
4. Resolver AMBOS ejercicios (a) y (b) siguientes:
   (a) Calcule el grupo fundamental de X, donde X es el espacio topológico compuesto por una esfera S^2 unida a dos arcos A y B tienen cada uno un extremo en el hemisferio norte y el otro extremo en el hemisferio sur, tales que $A \cap B = \emptyset$, como lo indica la figura siguiente.



   (b) Considere el subespacio $Y := \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } z \neq 0\}$ de X que se obtienen quitando de X los puntos del ecuador de la esfera. Es Y homeomorfo a S^1? Justifique su respuesta.
5. Demuestre que dos toros con distinto número de hoyos no son isomorfos.
6. Resolver SOLO UNO de los ejercicios (a) y (b) siguientes:
   (a) Dado un espacio X, la suspensión SX es el espacio cociente obtenido de $X \times I$ al identificar los puntos $X \times \{0\}$ en un punto y los puntos $X \times \{1\}$ en un otro punto. Usando la sucesión exacta larga asociada a la inclusión de X en SX, probar que $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(SX)$, para todo n.

(b) Sea (X, a) un espacio topológico punteado. La suspensión de X es el espacio $S(X, a)$ que es el espacio cociente del espacio producto $X \times [0, 1]$ por el subespacio $X \times \{0\} \bigcup \{a\} \times [0, 1] \bigcup X \times \{1\}$. Probar que existe una biyección entre el conjunto de funciones continuas punteadas de $S(X, a)$ en un espacio topológico (Y, b) y el conjunto de funciones continuas punteadas de (X, a) en el espacio de lazos $\Omega(Y, b)$, donde este último tiene la topología compacto-abierta.

Topología

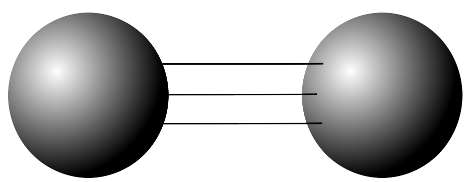
Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta. Responda sólo 3 de entre los ejercicios 4,5,6 y 7.
Tiempo: 3 horas

1. Demuestre que un espacio topológico Hausdorff localmente compacto que admite una base numerable es metrizable.

2. Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una secuencia decreciente infinita de compactos en un espacio Hausdorff. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ es no vacío.

3. Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una secuencia decreciente infinita de conexos compactos en un espacio Hausdorff. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ es conexo. ¿Es cierto el resultado si sólo pedimos que K_i sean conexos cerrados?

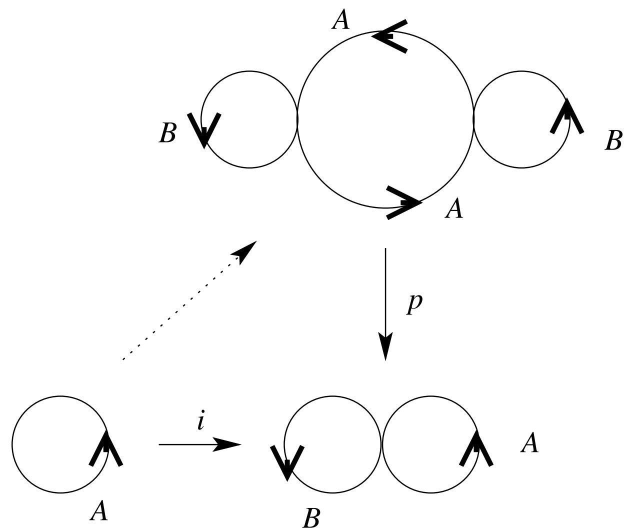
4. Calcule el grupo fundamental de X, donde X es el espacio topológico compuesto por dos esferas S^2 unidas por tres segmentos disjuntos. Ver la figura siguiente.



5. Dado un espacio X, la suspensión SX es el espacio cociente obtenido de $X \times I$ al identificar los puntos $X \times \{0\}$ en un punto y los puntos $X \times \{1\}$ en un otro punto. Demostrar usando la sucesión exacta larga que $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(SX)$ para todo n.

6. Calcular los grupos de homología asociados al Δ-complejo obtenido de los 2-símplices $[v_0, v_1, v_2]$, $[w_0, w_1, w_2]$ y $[u_0, u_1, u_2]$ pegando la arista $[u_0, u_1]$ con la arista $[w_0, w_1]$, la arista $[w_1, w_2]$ con la arista $[v_1, v_2]$, la arista $[v_0, v_2]$ con la arista $[w_0, w_2]$, la arista $[v_0, v_1]$ con la arista $[u_0, u_1]$ (siempre según el orden especificado) y el vértice $[u_2]$ con el vértice $[v_0]$.

7. Sea E el espacio recubridor de la figura del ocho siguiente



Sea i la inclusión de S^1 en la figura del ocho descrita en la figura. Determinar si existe levantamiento $\tilde{i} : S^1 \to E$ tal que $\tilde{i}(y_0) = e_0$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de calificación (Magister)
Agosto de 2015

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

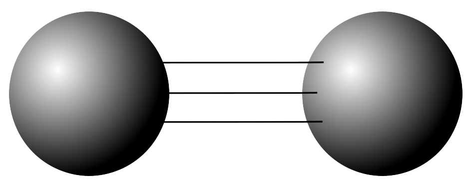
1. (a) Sea $X = [-1,1] \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Definimos en X la relación de equivalencia dada por $(x,0) \sim (y,1)$ si $x \neq 0$ y $x = y$. ¿Es $X/\sim$ compacto? ¿Es $X/\sim$ Hausdorff?

   (b) Sea U abierto de $\mathbb{R}^n$. ¿Es U es localmente arco conexo? ¿Es U es localmente compacto?

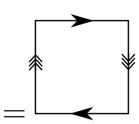
2. Sea $A \subset X$. Se dice que $r : X \to A$ es un retracto si $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Demostrar que un retracto es una aplicación cociente.

3. Demuestre que todo espacio Hausdorff compacto es normal.

4. Calcule, usando el teorema de Van Kampen, el grupo fundamental de X, donde X es el espacio topológico compuesto por dos esferas S^2 unidas por tres segmentos disjuntos. Ver la figura siguiente.



5. (a) Calcule el grupo fundamental del plano proyectivo real X dado por

$X =$ 

   (b) Calcule el cubrimiento universal de X.

Universidad de Talca | *Examen de calificación (Magister)*
Instituto de Matemática y Física | *Marzo de 2015*

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Demostrar que toda inyección continua $f : S^1 \to S^1$ es sobreyectiva.

2. Sea $A \subset X$. Se dice que $r : X \to A$ es una retracción si $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Demostrar que una retracción es una aplicación cociente.

3. Mostrar que si Y es compacto entonces la proyección $\pi_X : X \times Y \to X$ dada por $\pi_X(x, y) = x$ es una aplicación cerrada. *Indicación: ocupar el lema del tubo para demostrar que si $a \notin \pi_X(C)$ entonces a no pertenece a la clausura de $\pi_X(C)$.*

4. Sea $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$ con la topología del subespacio de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, 0) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) ¿Es g continua?

   b) Probar que Z con la topología cociente inducida por g no es de Hausdorff.

5. Usar el teorema de Seifert-van Kampen (¡y nada más!) para calcular el grupo fundamental de la figura siguiente (como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Se supone que no se conoce el grupo fundamental de ningún espacio salvo S^1.

grafo-eps-converted-to.pdf

6. Sea X un espacio conexo por arcos, probar que $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos finitos de X. Probar que la función $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d(A, B) := |(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)|,$$

   es una métrica en $\mathcal{F}$.

2. Si X e Y son espacios de Hausdorff, probar que una serie convergente en $X \times Y$ converge a un solo punto.

3. Probar que si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, para todo subespacio conexo C de X que tiene intersección no vacía con A y con $X \setminus A$, resulta $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

4. Sea $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

5. Sea X un espacio conexo por arcos, probar que $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

6. (a) Calcular $\pi_1(\mathbb{Q})$.
   (b) Calcular $\pi_1(T \times \mathbb{R})$, donde T es el toro.

Ejercicios para el calificativo

1. Si el ejercicio es muy largo, puedes dejar solo *a*) o separar *b*) y *c*) en otro ejercicio (claro que no es muy topológico si lo dejas solo).

   a) Sea $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : X \to Z$ y sea $f : X \to Y \times Z$ la función definida por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Demuestre que f es continua si y sólo si f_1 y f_2 son continuas.

   b) Sea $f : X \times Y \to Z$ una función. Decimos que f es continua en cada variable si para cada $x_0 \in X$ y cada $y_0 \in Y$ las funciones $g : Y \to Z$ y $h : X \to Z$ dadas por $g(y) = f(x_0, y)$ y $h(x) = f(x, y_0)$ son continuas. Demuestre que la función $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es continua en cada variable.

   c) Demuestre que la función φ definida en *b*) no es continua.

2. Demuestre que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

3. Demuestre que un espacio X es disconexo si y sólo si existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \to \{0,1\}$.

4. Sea X un espacio topológico localmente arco conexo. Demuestre que X es conexo si y sólo si X es arco conexo.

5. Demuestre que la intersección de una familia arbitraria de subespacios compactos en un espacio de Hausdorff es compacto.

6. Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una secuencia decreciente infinita de compactos no vacíos en un espacio Hausdorff. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ es no vacío.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Demuestre que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

2. Sea X un espacio topológico localmente arco conexo. Demuestre que X es conexo si y sólo si X es arco conexo.

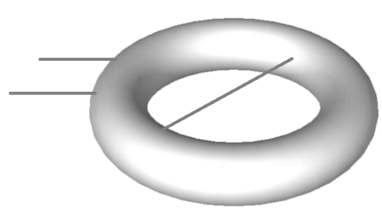
3. Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una secuencia decreciente infinita de compactos no vacíos en un espacio Hausdorff. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ es no vacío.

4. Sea X la unión de dos subespacios abiertos U y V, tales que $U \cap V$ es conexo por arcos y $x_0 \in U \cap V$. Si $i : U \hookrightarrow X$ y $j : V \hookrightarrow X$ son las inclusiones, y $j_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$ es el morfismo trivial 0, que puede decirse de i_*? (usar Van Kampen)

5. Dar una descripción como complejo CW de $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||(x_1, \ldots, x_{n+1})|| = 1\}$, para $n \geq 1$, de modo tal que el esqueleto X^{n-1} sea un complejo CW de S^{n-1}.
   (a) ¿A que espacio es homeomorfo X^n/X^{n-1}?
   (b) Calcular $H_k(X^n, X^{n-1})$ para todo $k \geq 0$. (Se puede suponer que están conocidos los grupos de homología de las esferas).

6. Sea A un subespacio de X; sean $j : A \to X$ la inclusión y $f : X \to A$ una aplicación continua. Suponga que existe una homotopía $H : X \times I \to X$ entre la aplicación $j \circ f$ y la identidad de X. Demuestre que si f es una retracción, entonces j_* es un isomorfismo.

7. Utilizar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental de un toro sobre el cual tres segmentos de la recta real están pegados (ver figura). Determinar además el primer grupo de homología del mismo espacio.



Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Demostrar que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

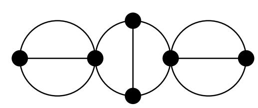
2. Sea X el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ obtenido de la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{4}$$

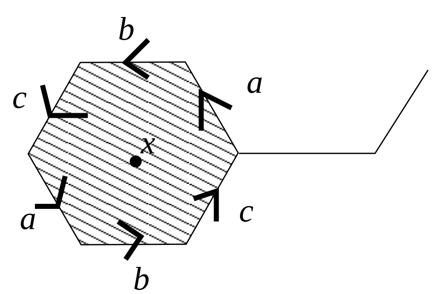
   Demostrar que X es homeomorfo a $\mathbb{R}_{\geq 0}$. *Ayuda: Considerar la función* $g(x, y) = x^2/9+y^2/4$.

3. Sean A y B subespacios compactos de un espacio de Hausdorff X tales que $A \cap B = \emptyset$. Demostrar que existen abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

4. Calcular el grupo fundamental de la figura siguiente usando el teorema de van Kampen:



5. Sea X la figura siguiente:



   Calcular $H_1(X)$ y $H_1(X - \{x\})$.

6. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto simplicial con:

   - 0-simples : $[a], [b], [c], [d]$ y $[e]$
   - 1-simples $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, $[b, d]$, $[c, d]$ y $[d, e]$
   - 2-simple $[b, c, d]$.

   (a) Dibujar la realización geométrica de $\mathcal{S}$.

   (b) Calcular la homología simplicial de $\mathcal{S}$.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Demuestre que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

2. Demuestre que un espacio X es disconexo si y sólo si existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \to \{0, 1\}$.

3. Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ una secuencia decreciente infinita de compactos no vacíos en un espacio Hausdorff X. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ no es vacío. *Ayuda: considerar los conjuntos* $X \setminus K_i$.

4. (a) Probar que si $p : E \longrightarrow B$ and $p' : E' \longrightarrow B'$ son cubrimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \longrightarrow B \times B'$ es un cubrimiento.
   (b) Usar el ejercicio anterior para describir un cubrimiento universal del toro T^1.

5. Dar una descripción como complejo CW de $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||(x_1, \ldots, x_{n+1})|| = 1\}$, para $n \geq 1$, de modo tal que el esqueleto X^{n-1} sea un complejo CW de S^{n-1}. ¿A que espacio es homeomorfo X^n/X^{n-1}?

6. Ocupar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental del la unión por un punto del toro T^1 y del círculo S^1 (*no se puede suponer que el grupo fundental del toro está conocido*).

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

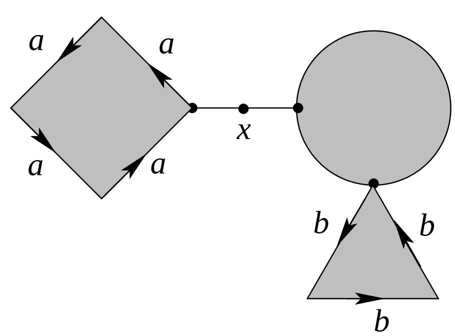
1. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^2$. Demuestre que existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = 0$.

2. Sea $X = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^3$. Se define una relación de equivalencia en X por $(x_1, x_2, x_2) \sim (y_1, y_2, y_3)$ si $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Si se supone que la la función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ es continua, demostrar de manera rigorosa que el espacio cociente $X^* = X/\sim$ es homeomorfo a $[1, 3]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. *Indicación: recuerdese que una biyección continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

3. Sean A y B subespacios compactos de un espacio de Hausdorff X tales que $A \cap B = \emptyset$. Demostrar que existen abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

4. Ocupar la sucesión exacta larga de homología singular para calcular $\widetilde{H}_n(X/A)$ $\forall\, n$ si X es el toro (obtenido al identificar los lados opuestos de $I \times I$) y $A = \{(1/2, y) \,|\, 0 \leq y \leq 1\}$. Describir bien todos los homomorfismos.

5. Calcular $\pi_1(X, x)$ si X es el espacio cociente obtenido del subespacio de $\mathbb{R}^2$ descrito en la figura siguiente:



6. Sea $\mathcal{S}$ es conjunto simplicial con 0-simples $[a]$, $[b]$, $[c]$ y $[d]$, 1-simples $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, $[d, a]$, $[b, d]$ y $[a, c]$ y 2-simples $[a, b, c]$ y $[b, d, c]$.
   (a) Dibujar su realización geométrica.
   (b) Calcular su homología simplicial.

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Describir el interior y la clausura de $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ para:
   (a) la topología usual de $\mathbb{R}$,
   (b) la topología discreta de $\mathbb{R}$,
   (c) la topología indiscreta (trivial) de $\mathbb{R}$,
   (d) la topología cofinita de $\mathbb{R}$ (los abiertos son el conjunto vacío y los complementos de subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$,
   (e) la topología conumerable de $\mathbb{R}$ (los abiertos son el conjunto vacío y los complementos de subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$.

2. Sea $S^1 \vee S^1 = (\{(1;0)\} \times S^1) \bigcup (S^1 \times \{(1;0)\}) \subseteq S^1 \times S^1$.
   (a) Probar que S^2 es homeomorfo al cociente de $S^1 \times S^1$ por $S^1 \vee S^1$.
   (b) Calcular la homología del toro $S^1 \vee S^1$ y la homología del cociente de $S^1 \times S^1 / S^1 \vee S^1$. Comparar con la homología de S^2 usando la sucesión exacta larga de homología singular.

3. (a) Probar que un subespacio compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.
   (b) Dado un espacio métrico (X, d) probar que la métrica $\overline{d}$ dada por:
   $$\overline{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$
   define la misma topología que d sobre X.
   (c) Probar que no todo subespacio cerrado y acotado de un espacio métrico es compacto.

4. Sean X e Y espacios topológicos. Probar que $X \times Y$ es contráctil si, y sólo si, X e Y son contráctiles.

5. Sea $\mathcal{S}$ es conjunto simplicial con 0-simples $[a], [b], [c]$ y $[d]$, 1-simples $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, $[d, a]$ y $[a, c]$ y 2-simple $[a, b, c]$.
   (a) Dibujar su realización geométrica.
   (b) Calcular su homología simplicial.

6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existe $x_0 \in X$ que satisface que para todo $x \in X$ el segmento entre x y x_0 está contenido en X.
   (a) Probar que X es conexo por arcos.
   (b) Probar que dos caminos en X son homotópicos.

7. Ocupar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental de una esfera, un círculo y un toro pegados en un punto.

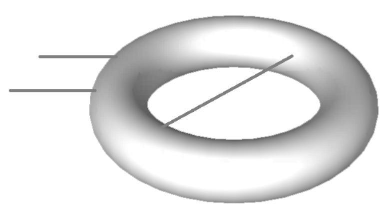
Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea X el intervalo $[-1, 1]$. Para cada colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, mostrar que $\mathcal{T}$ es una topología y determinar si el espacio $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff, compacto y conexo:
   (a) $U \in \mathcal{T}$ ssi $0 \notin U$ ó $(-1, 1) \subseteq U$.
   (b) $U \in \mathcal{T}$ ssi $0 \in U$.

2. Sea $L = \{x \times y \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \text{ y } 0 \leq y \leq 2\} \cup \{x \times y \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq 1\}$. Sobre L se definen las siguientes equivalencias no triviales:
$$0 \times 0 \sim 1 \times 0, \qquad 0 \times 2 \sim \frac{1}{2} \times 0\,.$$
   (a) Describir la topología cociente inducida por $\sim$.
   (b) Demostrar que el espacio cociente $L/\sim$ es homeomorfo a la figura θ.
   (Indicación: encontrar una aplicación cociente $g : L \to \theta$ tal que $g(x \times y) = g(u \times v)$ si $x \times y \sim u \times v$.)

3. Utilizar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental de un toro sobre el cual tres segmentos de la recta real están pegados (ver figura). Determinar además el primer grupo de homología del mismo espacio.



4. Probar que $\mathbb{R}^2$, con la topología inducida por el orden lexicográfico, es un espacio métrico.
   Indicación: demostrar que
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \end{cases}$$
   es una métrica que induce la topología inducida por el orden lexicográfico.

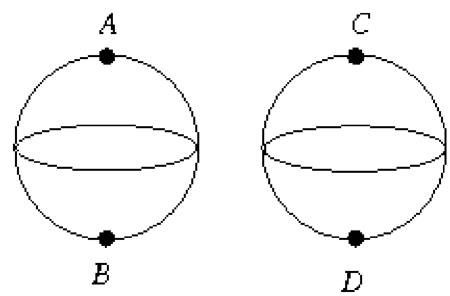
5. Calcular los grupos de homología simplicial del cociente X/A, donde

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\} \quad \text{y} \quad A = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1\}$$

Verificar luego que se sastisface la sucesión exacta larga de homología simplicial relativa

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots \to H_0(X,A) \to 0$$

6. Sea X el espacio cociente obtenido de las dos esferas en la figura siguiente identificando los puntos A y C (en un punto AC) y los puntos B y D (en un punto BD).



   (a) Demostrar que X es un espacio recubridor del espacio $P^2 \vee P^2$ (la unión por un punto de dos planos proyectivos). Describir la aplicación recubridora $p : X \to P^2 \vee P^2$.

   (b) Encontrar un elemento no trivial del grupo $\mathcal{C}(X, p, P^2 \vee P^2)$ de transformaciones recubridoras.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de calificación
Enero de 2012

Topología

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea X el conjunto de los enteros positivos con la topología de Hjalmar-Ekdal, es decir, C es cerrado en X ssi para cada entero par n en C, $n-1$ también pertenece a C. Mostrar que X es localmente compacto pero no compacto. Encuentre además las componentes conexas de X.

2. Sea $p : X \to Y$ continua, sobreyectiva, cerrada y tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$. Demostrar que si Y es compacto, también lo es X. *Indicación: si U es un abierto que contiene a los puntos $p^{-1}(\{y\})$, demostrar que existe una vecindad de y tal que $p^{-1}(W) \subseteq U$.*

3. Sea $\mathbf{T}$ un toro sólido (lleno) en $\mathbb{R}^3$. Se considera el espacio $\mathbf{X} = \overline{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{T})}$ (la clausura de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{T}$). Utilizar el teorema de van Kampen para determinar el grupo fundamental de $\mathbf{X}$. *Indicación: uno de los abiertos podría ser un cilindro (lleno) que pasa por el hoyo de $\mathbf{T}$ (el hoyo en el donut).*

   Sea T el toro usual correspondiendo a la capa exterior de $\mathbf{T}$, y sea $i : T \to \mathbf{X}$ la inclusión. Describir $i_* : \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(\mathbf{X}, x_0)$ sobre los generadores de $\pi_1(T, x_0)$.

4. Sea B la superficie determinada por el esquema *aabbcc*. Pegando ciertos lados de dos hexágonos, construir una aplicación $p : E \to B$ recubridora de 2 hojas, donde E es orientable (es decir, S^2 o de tipo toro). Utilizar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental de E. ¿Cuál es el recubridor universal de B? Justificar.

5. Considerar el espacio X que se obtiene identificando dos puntos cualesquiera (distintos) de un toro $T = S^1 \times S^1$. Encontrar el grupo fundamental de X. Calcular la homología singular de X a partir de la sucesión exacta larga de grupos de homología reducida.

6. Sea Δ^3 el simple estándar de dimensión 3, con vértices e_0, e_1, e_2, e_3.

   (a) Calcular la homología del espacio W obtenido identificando las 1-celdas $[e_0, e_1]$ y $[e_0, e_2]$ de Δ^3.

   (b) Calcular la homología del espacio Z obtenido identificando las 1-celdas $[e_0, e_1]$, $[e_0, e_2]$ y $[e_2, e_3]$ de Δ^3.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Calificación Agosto 2011
Topología

<u>Sección I</u> (Responder dos problemas)

1. Sea X el disco cerrado $\{x \times y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ equipado de la topología usual (i.e. como subespacio de $\mathbb{R}^2$).

   a) Considere la siguiente relación de equivalencia en X:

   $$x \times y \sim u \times v \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

   Demuestre que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ dotado de la topología del orden usual.

   b) Considere ahora la relación de equivalencia

   $$x \times y \sim u \times v \quad \text{ssi} \quad x^2 + y^2 = 1 = u^2 + v^2 \quad x = u \quad \text{e} \quad y = -v.$$

   $X/\sim$ es homeomorfo a otro espacio bien conocido. ¿Cuál es? Justifique cualitativamente con figuras.

2. Sea $\mathbb{R}_K$ el conjunto de los reales con la K-topología. Demuestre lo siguiente

   a) $[0,1]$ no es compacto como subespacio de $\mathbb{R}_K$.

   b) $\mathbb{R}_K$ es conexo. *Indicación:* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, \infty)$ *heredan de la topología usual como subespacios de* $\mathbb{R}_K$.

   c) R_K no es conexo por caminos. *Indicación: ocupar la parte* a).

   Recordatorio: la K-topología sobre $\mathbb{R}$ tiene como base los intervalos (a,b) y los conjuntos $(a,b) - K$, donde $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.

3. Sea X un espacio de Hausdorff. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) X es localmente compacto;

   b) Cada punto de X tiene un entorno precompacto;

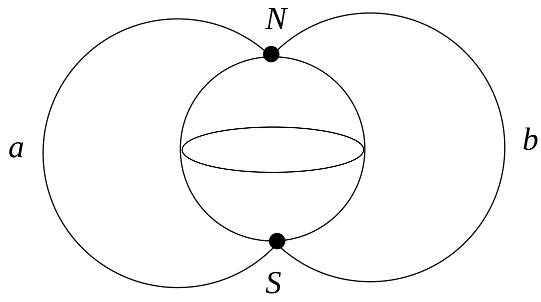
   c) X tiene una base de abiertos precompactos.

   Recordatorio: $U \subset X$ es precompacto si $\bar{U}$ es compacto.

Sección II (Responder todos los problemas)

1. Sea $f : [0, 1] \to X$ un lazo. Ocupar la aplicación cociente usual $\pi : [0, 1] \to S^1$ (al identificar el 0 con el 1) para demostrar que f induce una función continua $g : S^1 \to X$. Demostrar luego que $\pi_1(X, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$ ssi cada aplicación continua $h : S^1 \to X$ es homotópicamente nula.

2. Sea X el espacio dado por la unión de una esfera y de dos arcos a y b yendo del polo norte (N) al polo sur (S) de la esfera.



   (a) Demostrar que X es un espacio recubridor del espacio $P^2 \vee S^1$ (la unión por un punto del plano proyectivo y el círculo). Describir la aplicación recubridora $p : X \to P^2 \vee S^1$.

   (b) ¿Es X el espacio recubridor universal de $P^2 \vee S^1$? *Indicación: encontrar una retracción $X \to A$ tal que A tenga grupo fundamental no trivial.*

   (c) Encontrar un elemento no trivial del grupo $\mathcal{C}(X, p, P^2 \vee S^1)$ de transformaciones recubridoras.

   (d) Demostrar, ocupando el teorema de Seifert-van Kampen, que el grupo fundamental de $P^2 \vee S^1$ en el punto $z_0 = p(N)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sección III (Responder dos problemas)

1. Calcular los grupos de homología singular del cociente de la esfera S^2 que se obtiene identificando los polos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.

2. Describir S^2 como un cociente del toro $S^1 \times S^1$. Calcular el homomorfismo de grupos inducido por la proyección al cociente en la homología de ambos espacios.

3. Calcular los grupos de homología simplicial del cociente del 2-símplice Δ^2 por la relación que identifica sus tres vértices.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de calificación: topología

Enero 2011

5 ejercicios

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1 (1 punto)

Sean X_1 y X_2 espacios de Hausdorff y localmente compactos. Sean Y_1 e Y_2 las compactificaciones por un punto de X_1 y X_2 respectivamente. Demostrar que si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$.

Ejercicio 2 (1 punto)

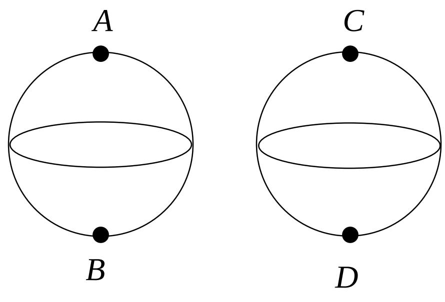
Sea $\varphi : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$ un homomorfismo. Demostrar que existe una función continua $k : S^1 \to S^1$ tal que $\varphi = k_*$.

Ejercicio 3 (1 punto)

Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demostrar que si Y es conexo y si $p^{-1}(\{y\})$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Sea X el espacio cociente obtenido de las dos esferas en la figura siguiente identificando los puntos A y C (en un punto AC) y los puntos B y D (en un punto BD).



1. Demostrar que X es un espacio recubridor del espacio $P^2 \vee P^2$ (la unión por un punto de dos planos proyectivos). Describir la aplicación recubridora $p : X \to P^2 \vee P^2$.

2. ¿Es X el espacio recubridor universal de $P^2 \vee P^2$?

3. Demostrar que el grupo fundamental de $P^2 \vee P^2$ en el punto $z_0 = p(AC)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Sea $f : Y \to P^2 \vee P^2$ una aplicación continua, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Demostrar que si la imagen $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ <u>no</u> es un grupo conmutativo, entonces no existe una aplicación continua $\tilde{f} : Y \to X$ tal que $f = p \circ \tilde{f}$. ¿Puede existir tal $\tilde{f}$ si Y no es localmente conexo por caminos?

Ejercicio 5 (1 punto)

Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro, y sea $A = S^1 \times \{y_0\}$ un subespacio de T. Calcular $\tilde{H}_1(A)$, $\tilde{H}_1(T)$ y $\tilde{H}_1(T/A)$ explícitamente. Verificar luego que la sucesión

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_1(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_1(T) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_1(T/A) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $i : A \to X$ es la inclusión y $j : T \to T/A$ es la aplicación cociente. Deducir que $\tilde{H}_2(T)$ es isomorfo a $\tilde{H}_2(T/A)$.