Reglas de Pieri para Superpolinomios de Macdonald

Proyecto de Tesis de Doctorado en Matemáticas
Universidad de Talca

Enero de 2017

Contenidos

1. Polinomios Simétricos
2. Polinomios simétricos en el superespacio
3. Reglas de Pieri
4. Objetivos y Avances: Reglas de Pieri en el superespacio
5. Polinomios de Macdonald No-Simétricos.

Polinomios Simétricos

Consideramos el algebra de polinomios simétricos

$$\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_N]^{S_N},$$

donde $p(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_N]^{S_N}$ si

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = p(x_1, \dots, x_N),$$

para todo $\sigma \in S_N$. Las bases de $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_N]^{S_N}$ son polinomios simétricos, los cuales están indexados por particiones.

Definición

Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ una partición. Algunas bases polinomios de $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_N]^{S_N}$ están dadas por:

1. *Monomiales:*
$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_N) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_N^{\lambda_N} + \mathrm{sym}.$$
2. *Elementales:*
$$e_r = m_{(1^r)}$$
3. *Sumas de potencias:* $p_r = x_1^r + x_2^r + x_3^r + \ldots$

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
m_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2 \\
e_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \\
e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\
e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 \\
p_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.
\end{aligned}
$$

Polinomios de Macdonald

Sean q, t parámetros formales independientes y sea $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Consideramos el álgebra de polinomios simétricos $\mathbb{Q}(q,t)[x]^{S_N}$.

Teorema

Para cada partición λ existe un único polinomio simétrico $P_\lambda^{(q,t)}(x) = P_\lambda^{(q,t)} \in \mathbb{Q}(q,t)[x]$ tal que

$$P_\lambda^{(q,t)} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu}^{(q,t)} m_\mu$$

$$\langle P_\mu, P_\lambda \rangle_{q,t} = 0 \quad si\ \lambda \neq \mu.$$

donde $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\mu\,\lambda} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}$ *y* $z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{n_i(\lambda)}\, n_i!$ *($n_i(\lambda)$ es la cantidad de componentes de λ igual a i).*

Funcion de Schur y polinomios de Jack

Definición

Los polinomios $P_\lambda^{(q,t)}$ dados en el teorema anterior son llamados polinomios de Macdonald.

Funcion de Schur y polinomios de Jack

Definición

Los polinomios $P_\lambda^{(q,t)}$ dados en el teorema anterior son llamados polinomios de Macdonald.

Definición

Definimos un polinomio de Jack con parámetro α como

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x) := \lim_{t\to 1} P_\lambda^{(t^\alpha,t)}(x).$$

Funcion de Schur y polinomios de Jack

Definición

Los polinomios $P_\lambda^{(q,t)}$ dados en el teorema anterior son llamados polinomios de Macdonald.

Definición

Definimos un polinomio de Jack con parámetro α como

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x) := \lim_{t\to 1} P_\lambda^{(t^\alpha,t)}(x).$$

Definición

Definimos una función de Schur por

$$s_\lambda(x) := \lim_{\alpha\to 1} P_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

Polinomios simétricos en el superespacio

Consideramos el álgebra de polinomios simétricos en el superespacio

$$\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N, \theta_1, \ldots, \theta_N]^{S_N},$$

donde tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_i x_j &= x_j x_i, \\ \theta_i \theta_j &= -\theta_j \theta_i \\ x_i \theta_j &= \theta_j x_i \end{aligned}$$

Las bases de $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N, \theta_1, \ldots, \theta_N]^{S_N}$, las indexamos por superparticiones.

Superparticiones

Definición

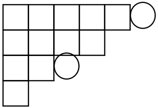
Una superpartición es un par $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ *donde* Λ^s *es un partición usual y* Λ^a *es un partición sin partes que se repitan.*

Superparticiones

Definición

Una superpartición es un par $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ donde Λ^s es un partición usual y Λ^a es un partición sin partes que se repitan.

Ejemplo: $\Lambda = (5, 2; 4, 1)$



Algunos polinomios simétricos en el superespacio indexados por superparticiones

Consideremos Λ superpartición de grado $(n \,|\, m)$, donde $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_N)$.

Definición

Definimos los monomiales en el superespacio como:

$$m_\Lambda(x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N) = \theta_1 \cdots \theta_m x_1^{\Lambda_1} x_2^{\Lambda_2} \cdots x_m^{\Lambda_m} \cdots x_N^{\Lambda_N} + sym$$

Algunos polinomios simétricos en el superespacio indexados por superparticiones

Consideremos Λ superpartición de grado $(n \mid m)$, donde $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_N)$.

Definición

Definimos los monomiales en el superespacio como:

$$m_\Lambda(x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N) = \theta_1 \cdots \theta_m x_1^{\Lambda_1} x_2^{\Lambda_2} \cdots x_m^{\Lambda_m} \cdots x_N^{\Lambda_N} + sym$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} m_{(2,1;1)}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = {} & \theta_1\theta_2 x_1^2 x_2 x_3 + \theta_2\theta_1 x_2^2 x_1 x_3 + \theta_3\theta_2 x_3^2 x_2 x_1 \\ & + \theta_2\theta_3 x_2^2 x_3 x_1 + \theta_1\theta_3 x_1^2 x_3 x_2 + \theta_3\theta_1 x_3^2 x_1 x_2 \end{aligned}$$

Definición

Definimos los polinomios elementales en el superespacio e_r *y* $\widetilde{e}_r$ *donde* $r \geq 1$*:*

$$e_r = m_{(\ ;1^r)} \ \ y \ \ \widetilde{e}_r = m_{(0;1^r)}$$

Definición

Definimos los polinomios elementales en el superespacio e_r y $\widetilde{e}_r$ donde $r \geq 1$:

$$e_r = m_{(\ ;1^r)} \ \ y \ \ \widetilde{e}_r = m_{(0;1^r)}$$

Ejemplos:

$$e_2(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$
$$\widetilde{e}_2(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1x_2x_3 + \theta_2x_1x_3 + \theta_3x_2x_3$$

Definición

Definimos las sumas de potencias en el superespacio p_r y $\widetilde{p}_r$ donde $r \geq 1$:

$$p_r = x_1^r + x_2^r + x_3^r + \ldots \quad y \quad \widetilde{p}_r = \theta_1 x_1^r + \theta_2 x_2^r + \theta_3 x_3^r + \ldots$$

Definición

Definimos las sumas de potencias en el superespacio p_r y $\widetilde{p}_r$ donde $r \geq 1$:

$$p_r = x_1^r + x_2^r + x_3^r + \ldots \quad y \quad \widetilde{p}_r = \theta_1 x_1^r + \theta_2 x_2^r + \theta_3 x_3^r + \ldots$$

Ejemplo:

$$p_3(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$
$$\widetilde{p}_3(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 x_1^3 + \theta_2 x_2^3 + \theta_3 x_3^3.$$

Polinomios de Macdonald en el superespacio

Teorema

Dada una superpartición $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ de grado fermionico m, existe un único superpolinomio simétrico $P_\Lambda = P_\Lambda^{(q,t)}(x,\theta)$ con $x = (x_1, \dots, x_N)$ y $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ tal que:

$$P_\Lambda = m_\Lambda + lowerterms,$$
$$\langle\langle P_\Lambda | P_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = 0 \ \ y \quad \Lambda \neq \Omega,$$

donde el producto escalar es definido por

$$\langle\langle p_\Lambda | p_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = (-1)^{\binom{m}{2}} z_{\Lambda^s} q^{|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{l(\Lambda^s)} \frac{1-q^{\Lambda_i^s}}{1-t^{\Lambda_i^s}}.$$

Definición (Superpolinomios de Jack)

Dado Λ una superpartición, denotamos $P_\Lambda^{(\alpha)}$ el superpolinomio de Jack definido por

$$P_\Lambda^{(\alpha)} := \lim_{t\to 1} P_\Lambda^{(t^\alpha, t)}$$

Definición (Superpolinomios de Jack)

Dado Λ una superpartición, denotamos $P_\Lambda^{(\alpha)}$ el superpolinomio de Jack definido por

$$P_\Lambda^{(\alpha)} := \lim_{t \to 1} P_\Lambda^{(t^\alpha, t)}$$

Definición (Superpolinomios de Schur)

Dado Λ una superpartición. Definimos tres clases de superpolinomios de Schur

$$s_\Lambda^0 := P_\Lambda^{(0,0)}$$
$$s_\Lambda^\infty := P_\Lambda^{(\infty,\infty)}$$
$$s_\Lambda^1 := \lim_{\alpha \to 1} P_\Lambda^{(\alpha)}.$$

Caso Simétrico

Regla de Pieri para Schur

Sea λ una partición y $r \geq 1$. Entonces

$$e_r s_\lambda = \sum_{\mu} s_\mu$$

donde la sumatoria es sobre todas las particiones μ tales que $\mu - \lambda$ es un vertical $r-$strip.

Reglas de Pieri para Polinomios de Macdonald

Teorema (Macdonald,1995)

$$e_r P_\lambda^{(q,t)} = \sum_\mu * P_\mu^{(q,t)}$$

donde la sumatoria es sobre todas las particiones tales que $\mu - \lambda$ sea un vertical $r-$strip y $*$ son coeficientes conocidos en $\mathbb{Q}(q,t)$.

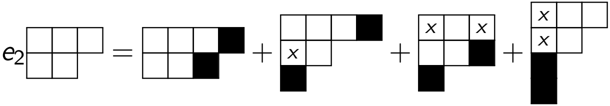
$$h^\lambda_{(q,t)}(s) = 1 - q^{a_\lambda(s)} t^{l_\lambda(s)+1}$$

$$h_\lambda^{(q,t)}(s) = 1 - q^{a_\lambda(s)+1} t^{l_\lambda(s)}$$

Ejemplo

Coeficientes:

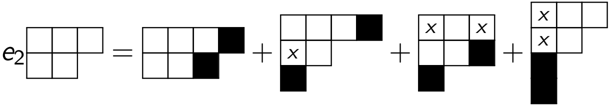
$$\frac{h_{\lambda}^{(q,t)}(s)}{h_{\mu}^{(q,t)}(s)} \cdot \frac{h^{\mu}_{(q,t)}(s)}{h^{\lambda}_{(q,t)}(s)}$$



Ejemplo

Coeficientes:

$$\frac{h_\lambda^{(q,t)}(s)}{h_\mu^{(q,t)}(s)} \cdot \frac{h^\mu_{(q,t)}(s)}{h^\lambda_{(q,t)}(s)}$$



$$e_2 P_{(3,2)}^{(q,t)} = P_{(4,3)}^{(q,t)} + \frac{1-q^2}{1-q^2t} \cdot \frac{1-qt^2}{1-qt} P_{(4,2,1)}^{(q,t)}$$
$$+ \frac{(1-q^3t)}{(1-q^3t^2)} \cdot \frac{(1-q^2t^3)}{(1-q^2t^2)} \cdot \frac{(1-q)}{(1-qt)} \cdot \frac{(1-t^2)}{(1-t)} P_{(3,3,1)}^{(q,t)}$$
$$+ \frac{1-q^3t}{1-q^3t^3} \cdot \frac{1-q^2t^4}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-qt^3}{1-qt} P_{(3,2,1,1)}^{(q,t)}$$

Objetivo de trabajo: Encontrar una regla de Pieri para superpolinomios de Macdonald.
Sea Λ una superpartición. Recordemos que tenemos dos tipos de polinomios elementales en el superespacio: e_r y $\widetilde{e}_r$.
Es decir, debemos ver

$$e_r P_\Lambda^{(q,t)} = ?? \quad \text{y} \quad \widetilde{e}_r P_\Lambda^{(q,t)} = ??.$$

Antecedentes Históricos: (Caso Simétrico)

- Reglas de Pieri para funciones de Schur fue demostrado en 1893 por Mario Pieri.

Antecedentes Históricos: (Caso Simétrico)

- Reglas de Pieri para funciones de Schur fue demostrado en 1893 por Mario Pieri.
- (1989) Stanley probó las reglas de Pieri para polinomios de Jack.

Antecedentes Históricos: (Caso Simétrico)

- Reglas de Pieri para funciones de Schur fue demostrado en 1893 por Mario Pieri.
- (1989) Stanley probó las reglas de Pieri para polinomios de Jack.
- (1995) Macdonald probó las reglas de Pieri para polinomios de Macdonald utilizando una familia de operadores D_n^r.

Avances

- (L. Lapointe, M. Jones, 2016)

Avances

- (L. Lapointe, M. Jones, 2016) Reglas de Pieri para Superschur s_Ω^∞:

$$e_r s_\Omega^\infty = \sum_\Lambda s_\Lambda^\infty$$

donde la suma es sobre las superparticiones Λ del mismo grado fermiónico de Ω, talque Λ^*/Ω^* es un vertical $r-$strip, además de otras condiciones cuando una de las cajas mueve un círculo.

Avances

- (L. Lapointe, M. Jones, 2016) Reglas de Pieri para Superschur s_Ω^∞:

$$e_r s_\Omega^\infty = \sum_\Lambda s_\Lambda^\infty$$

donde la suma es sobre las superparticiones Λ del mismo grado fermiónico de Ω, talque Λ^*/Ω^* es un vertical $r-$strip, además de otras condiciones cuando una de las cajas mueve un círculo.

$$\widetilde{e}_r s_\Omega^\infty = \sum_\Lambda (-1)^* s_\Lambda^\infty$$

donde la suma es sobre todas las superparticiones Λ de grado fermiónico el grado fermiónico de $\Omega + 1$, Λ^*/Ω^* es un vertical $r-$strip, además de unas condiciones sobre el nuevo círculo.

- (Lapointe, Desrosiers, Mathieu, 2011)

- (Lapointe, Desrosiers, Mathieu, 2011)

$$e_r P_\Lambda^{(\alpha)} = \sum_\Omega * P_\Omega^{(\alpha)}$$

donde la suma es sobre todas las superpartciones Ω tal que Ω/Λ es un vertical $r-$strip y $*$ son coeficientes para cada Λ en $\mathbb{Q}(\alpha)$.

- (Lapointe, Desrosiers, Mathieu, 2011)

$$e_r P_\Lambda^{(\alpha)} = \sum_\Omega * P_\Omega^{(\alpha)}$$

donde la suma es sobre todas las superpartciones Ω tal que Ω/Λ es un vertical $r-$strip y $*$ son coeficientes para cada Λ en $\mathbb{Q}(\alpha)$.

$$\widetilde{e}_r P_\Lambda^{(\alpha)} = \sum_\Omega * P_\Omega^{(\alpha)}$$

donde la suma es sobre todas las superparticiones Ω tal que Ω/Λ es un vertical $\widetilde{r}-$strip.

- (Lapointe, Jones, Gatica)

Reglas de Pieri para superpolinomios de Jack. Tenemos los siguientes operadores:

$$q^{\perp} = \sum_{i=1}^{N} x_i \partial_{\theta_i},$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \left(\frac{N}{\alpha} + x_i \partial_{x_i} \right),$$

$$\tilde{e}_0 = \sum_{i=1}^{N} \theta_i$$

Acción de $q^{\perp}$, Q y $\widetilde{e}_0$ sobre superpolinomios de Jack.

$$h_{\Lambda}^{(\alpha)}(s) = \alpha a_{\Lambda^*}(s) + l_{\Lambda^{\circledast}}(s) + \alpha, \quad h^{\Lambda}_{(\alpha)}(s) = \alpha a_{\Lambda^{\circledast}}(s) + l_{\Lambda^*}(s) + 1.$$

Acción de $q^{\perp}$, Q y $\widetilde{e}_0$ sobre superpolinomios de Jack.

$$h_{\Lambda}^{(\alpha)}(s) = \alpha a_{\Lambda^*}(s) + l_{\Lambda^{\circledast}}(s) + \alpha, \quad h^{\Lambda}_{(\alpha)}(s) = \alpha a_{\Lambda^{\circledast}}(s) + l_{\Lambda^*}(s) + 1.$$

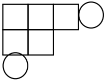
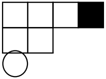
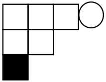
Proposición (Lapointe, Desrosiers, Mathieu, 2012)

$$q^{\perp} P_{\Lambda}^{(\alpha)} = \sum_{\Omega} (-1)^* \left(\prod_s \frac{h^{\Omega}_{(\alpha)}(s)}{h^{\Lambda}_{(\alpha)}(s)} \right) P_{\Omega}^{(\alpha)},$$

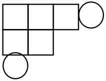
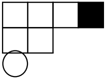
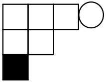
$$Q P_{\Lambda}^{(\alpha)} = \sum_{\Omega} (-1)^* \left(\prod_s \frac{h_{\Lambda}^{(\alpha)}(s)}{h_{\Omega}^{(\alpha)}(s)} \right) (N + 1 - i + \alpha(j-1)) P_{\Omega}^{(\alpha)},$$

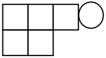
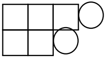
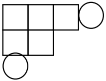
$$\tilde{e}_0 P_{\Lambda}^{(\alpha)} = \sum_{\Omega} (-1)^* \left(\prod_s \frac{h_{\Lambda}^{(\alpha)}}{h_{\Omega}^{(\alpha)}} \right) P_{\Omega}^{(\alpha)}$$

Ejemplo

$q^{\perp}$  $=$  $+\ \frac{3\alpha+3}{3\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ 

Ejemplo

$q^{\perp}$  $=$  $+ \frac{3\alpha+3}{3\alpha+2} \cdot \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ 

$\tilde{e}_0$  $= \frac{\alpha}{\alpha+1}$  $+ \frac{3\alpha+1}{3\alpha+2} \cdot \frac{2\alpha}{2\alpha+1}$ 

Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} ne_n &= \{\widetilde{e}_{n-1}, q^{\perp}\} = \widetilde{e}_{n-1}q^{\perp} + q^{\perp}\widetilde{e}_{n-1}, \quad n \geq 1 \\ \widetilde{e}_n &= \widetilde{e}_0 e_n - [Q, e_n] = \widetilde{e}_0 e_n - Qe_n + e_n Q, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes relaciones:

$$ne_n = \{\widetilde{e}_{n-1}, q^{\perp}\} = \widetilde{e}_{n-1}q^{\perp} + q^{\perp}\widetilde{e}_{n-1}, \quad n \geq 1$$
$$\widetilde{e}_n = \widetilde{e}_0 e_n - [Q, e_n] = \widetilde{e}_0 e_n - Qe_n + e_n Q, \quad n \geq 1.$$

Ejemplo:

$$e_2 P^{(\alpha)}_{(6,0;2,1)} =$$
$$\ldots + \frac{\alpha^3(3\alpha+2)(10\alpha^2+19\alpha+5)}{2(4\alpha+1)(\alpha+2)(5\alpha+1)(1+\alpha)^2(1+3\alpha)(2+5\alpha)} P^{(\alpha)}_{(2,1;7,1)} +$$

Extensión a superpolinomios de Macdonald:

1. Tener una formula de evaluación para $P_{\Lambda}^{(q,t)}$
2. Calcular $||P_{\Lambda}^{(q,t)}||_{q,t}$.
3. Extender $Q, q^{\perp}$ para superpolinomios de Macdonald y además calcular la acción. Buscar una relación como la anterior.

Conjeturas

Conjetura:

$$||P_{\Lambda}^{(q,t)}||^2 = q^{|\Lambda^a|} \prod_{s\in\mathcal{B}(\Lambda)} \frac{1-q^{a^*(s)+1}t^{l^{\circledast}(s)}}{1-q^{a^{\circledast}}t^{l(s)+1}}.$$

Ejemplo:

$$||P_{(3,0;1)}^{(q,t)}||^2 = \frac{q^3(1-q)^2(1+q)}{(1-t)(1-q^2t)}.$$

Evaluación:

Sea

$$M_{\Lambda}^{(q,t)} = \prod_{s \in \mathcal{B}(S)} (1 - q^{a^{\circledast}(s)} t^{l^{*}(s)+1}) P_{\Lambda}^{(q,t)}.$$

Evaluación:

Sea

$$M_\Lambda^{(q,t)} = \prod_{s\in\mathcal{B}(S)} (1 - q^{a^{\circledast}(s)} t^{l^*(s)+1}) P_\Lambda^{(q,t)}.$$

La evaluación de un polinomio $F(x;\theta)$ en el superespacio de grado fermionico m es dada por

$$E_{N,m}[F(x;\theta)] := \left[\frac{\partial_{\theta_m}\cdots\partial_{\theta_1} F(x;\theta)}{V_m(s)}\right]_{x=u_1,\cdots,x_N=u_N}$$

donde $u_i = \frac{t^{i-1}}{q^{\max(m-i,0)}}$ y $V_m(x) = \prod_{1\leq i<j\leq m}(x_i - x_j)$.

Evaluación:

Sea

$$M_\Lambda^{(q,t)} = \prod_{s\in\mathcal{B}(S)} (1 - q^{a^{\circledast}(s)} t^{l^*(s)+1}) P_\Lambda^{(q,t)}.$$

La evaluación de un polinomio $F(x;\theta)$ en el superespacio de grado fermionico m es dada por

$$E_{N,m}[F(x;\theta)] := \left[\frac{\partial_{\theta_m}\cdots\partial_{\theta_1}F(x;\theta)}{V_m(s)}\right]_{x=u_1,\cdots,x_N=u_N}$$

donde $u_i = \frac{t^{i-1}}{q^{\max(m-i,0)}}$ y $V_m(x) = \prod_{1\leq i<j\leq m}(x_i - x_j)$.

Conjetura:

$$E_{N,m}[M_\Lambda^{(q,t)}(x,\theta)] = \frac{t^*}{q^*} \prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda} \left(1 - q^{j-1}t^{N-(i-1)}\right).$$

Extensión de operador $q^{\perp}$

Conjetura:

$$\widetilde{q}^{\perp} = \sum_{i \in \{1,\ldots,N\}, I \subset \{1,\ldots,N\}} A_i(t)\; Z_{(I,i)}\; \tau_i\; x_i\; \pi_I\; \partial_{\theta_i}$$

donde

$$A_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j},$$

$$Z_{(I,i)} = \prod_{j \in I, j \neq i} \frac{(qt x_i - x_j)(x_i - x_j)}{(q x_i - x_j)(t x_i - x_j)}.$$

Avances hasta ahora

- Utilizando polinomios de Macdonald no simétricos probamos que la suma es sobre vertical $r-$strip:

$$e_r P_\Lambda^{(q,t)} = \sum_\Omega * P_\Omega^{(q,t)},$$

donde la suma es sobre los Ω tal que Ω/Λ es un vertical r-strip.

$$\widetilde{e}_r P_\Lambda^{(q,t)} = \sum_\Omega * P_\Omega^{(q,t)},$$

donde la suma es sobre los Ω tal que Ω/Λ es un vertical $\widetilde{r}-$strip.

Polinomios de Macdonald No-Simétricos y Superpolinomios de Macdonald

Ejemplo:
Sea $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2; \Lambda_3, \Lambda_4)$ donde el grado fermionico de Λ es 2, $(x; \theta) = (x_1, x_2, x_3, x_4; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

$$P_{\Lambda}^{(q,t)}(x, \theta) = * \sum_{\sigma \in S_4/(S_2 \times S_{3,4})} \mathcal{K}_\sigma \theta_1 \theta_2 (1 - K_{(12)})(1 + T_3) E_{\Lambda^R},$$

donde

$$\Lambda^R = (\Lambda_m, \ldots, \Lambda_1, \Lambda_N, \ldots, \Lambda_{m+1}).$$

Polinomios de Macdonald No-Simétricos

Los operadores T_i satisfacen las relaciones del álgebra de Hecke afín $(0 \leq 1 \leq N-1)$

$$\begin{aligned} (T_i - t)(T_i + 1) &= 0 \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ T_i T_j &= T_j T_i, \quad i - j \neq \pm 1 (\mathrm{mod} \;\; N). \end{aligned}$$

Definimos los operadores de Cherednick como:

$$Y_i = t^{-N+i} T_i \cdots T_{N-1} \omega T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}.$$

Notemos que los operadores Y_i conmutan entre ellos, y por lo tanto pueden ser diagonalizados simultáneamente. Sus funciones propias son llamados polinomios de Macdonald No-Simétricos y son indexados por composiciones.

Definición

El polinomio de Macdonald No-Simétrico E_η es el único polinomio con coeficientes racionales en q y t que satisface

$$E_\eta = x^\eta + \sum_{\nu<\eta} b_{\eta\nu} x^\nu \quad y$$

$$Y_i E_\eta = \overline{\eta}_i E_\eta \qquad para\ todo\ i = 1, \ldots, N,$$

donde $\overline{\eta}_i = q^{\eta_i} t^{-\bar{l}_\eta(i)}$.

Observaciones:

1. Operadores D_n^r del caso simétrico clásico, no han podido ser extendidos al superespacio de manera explícita, por lo que no podemos seguir la idea de demostración del caso simétrico clásico.
2. En el superespacio, ha sido necesario utilizar propiedades de los polinomios de Macdonald No-simétricos, tales como reglas de Pieri.

Gracias!!