

Analysis

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y considere una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones holomorfas en Ω tales que $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que la sucesión f_n converge a f uniformemente en compactos de Ω . Muestre que f es idénticamente nula, o bien $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
2. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio con medida σ -finita μ definida en σ -álgebra \mathcal{A} . Para todo elemento $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq X$, considere su función indicatriz $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ (donde $\chi_A(x) = 1$ si y solo si $x \in A$). Demuestre que el conjunto Υ de todas las funciones indicatrices integrables

$$\Upsilon = \{\chi_A : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$$

es cerrado en el espacio $L_1(X, \mu)$.

3. Para n entero ≥ 1 y x real > 0 , se define la sucesión de funciones

$$f_n(x) = (-1)^n x^{n^3} \ln \left(\frac{x^2 + x + n}{x + n} \right)$$

Determinar el dominio D de convergencia puntual de la sucesión f_n y estudiar la convergencia uniforme en D .

4. Considere

$$M := \left\{ f \in C[a, b] : \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right\}.$$

- a) Pruebe que M es un subespacio cerrado en $C[a, b]$ (con la norma usual) y encuentre $x' \in (C[a, b])'$ tal que $M = \ker(x')$. Muestre además que $\|x'\| = b - a$.
- b) Muestre que tal $x' \in (C[a, b])'$ no alcanza su norma en la bola unitaria cerrada, es decir, que no existe f continua con $\|f\| \leq 1$ tal que $x'(f) = \|x'\| = b - a$.

Análisis

1. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida con $\mu(X) = 1$. Sea f una función medible en X tal que

$$\mu \left(f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{(k+1)}{2^n} \right] \right) \right) = \frac{1}{2^n}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Muestre que

$$\int_X f^2 d\mu = \frac{1}{3}.$$

2. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ considere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ definida por $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Describir todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que convierten el par (\mathbb{R}, d)

a) en un espacio métrico,

b) en un espacio métrico completo.

3. Sea $f \in L^2(]0, 1[)$ con valor medio nulo, i. e. $\int_0^1 f dx = 0$ y sea $H = H^1(]0, 1[)$. Para $u, v \in H$ se define

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \left(\int_0^1 u dx \right) \left(\int_0^1 v dx \right)$$

a) Demuestre que existe un unico $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H.$$

Hint: Se podría usar la desigualdad de Poincaré-Wirtinger: asumiendo que $1 \leq p \leq \infty$ y que Ω es a subconjunto abierto acotado y conexo del espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n con un dominio de Lipschitz. Entonces existe una constante C , dependiente sólo de Ω y p , tal que para una función u en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se tiene

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u.$$

b) Demuestre que u satisface

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{for } x \in H \\ u'(0) = u'(1) = 0 \\ \int_0^1 u(x) dx = 0. \end{cases} .$$

Hint: Se podría usar la fórmula de integración por partes. Sean $u, v \in H^1(I)$ donde I es un intervalo

$$\int_a^b u' v \, dx = - \int_a^b u v' \, dx + (uv)(b) - (uv)(a), \quad \forall [a, b] \subset \bar{I}.$$

4. a) Sea $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z = (x, y)$. Muestre que

$$|f(0)| \leq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left(\int_{D(0,R)} |f(x, y)|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hint: Justifique que $f^2 : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y luego use la fórmula integral de Cauchy para obtener que

$$f(0)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(se^{i\theta}) d\theta, \quad (\star)$$

para cualquier $0 < s < R$. Multiplique (\star) por s e integre para $s \in (0, R)$.

- b) Use lo anterior para demostrar el siguiente

Teorema. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \Omega$ un compacto. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que existe una constante $C > 0$ (que depende de Ω y K , pero no de f) tal que*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x, y)|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analysis

1. Sea λ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible. Para cada conjunto Boreliano B , definimos

$$\mu(B) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}).$$

Muestre que μ es una medida y que se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} g \circ f(x) d\lambda(x)$$

2. Use el teorema de los residuos para calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

Ayuda: Use un camino que consiste de una semi-circunferencia centrada en 0 y una parte del eje real obviando las singularidades de la función en $0, \pm 1$ con semi circunferencias.

3. Se considera la sucesión de funciones f_n definida por

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$$

Mostar que f_n converge uniformemente hacia la función nula en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}$ un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H . Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en H sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ es convergente. Concluya que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente convergente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

1. (1.5 puntos) Muestre que si X es un espacio de Banach infinito dimensional, entonces X tiene dimensión (en el sentido de base de Hamel) no numerable. Ayuda: Puede usar el Teorema de Baire.

2. (1.5 puntos) Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $f \in L^1(\mu)$.

a) Sea $A_n := \{x \in X : \frac{1}{n} < |f(x)| \leq n\}$. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

b) Deduzca que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ tal que $\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$ (μ -ctp) y

$$\int_{X \setminus A} |f| < \varepsilon.$$

3. (1.5 puntos) Sea $p(z)$ un polinomio de grado n y sea $R > 0$ suficientemente grande de modo que p nunca se anula en $\{z : |z| \geq R\}$. Sea $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Determine el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

4. (1.5 puntos) Considere el espacio $c_0 := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ con la norma $\|x\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Defina el funcional lineal $x' : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$x'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}},$$

para cada $x = (x_n)_n \in c_0$.

a) Pruebe que x' es un funcional continuo y que $\|x'\| = 2$.

b) Pruebe que $x' \in c'_0$ no alcanza su norma en la bola unitaria cerrada, esto es, no existe $x \in c_0$ con $\|x\|_{\infty} \leq 1$ tal que $x'(x) = \|x'\| = 2$.

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

1. (1.5 puntos) Muestre que la sucesión $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(t) = \frac{t^2}{t^2 + (nt - 1)^2},$$

converge puntualmente, pero no uniformemente en $[0, 1]$.

2. (1.5 puntos) Encuentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

3. (1.5 puntos) Sea f una función entera y suponga que existe una constante M , un $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $|z| > R$. Muestre que f es un polinomio de grado menor o igual que n .
4. (1.5 puntos) Sea $f(t) = 1 - t^2$, si $|t| < 1$ y 0 en otro caso. Encuentre \hat{f} y use este resultado para hallar el valor de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt.$$

Recuerde que la Transformada de Fourier de f se define por $\hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist} dt$, $s \in \mathbb{R}$.

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

1. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Muestre que la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n g(x)$ converge uniformemente a la función nula.
2. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)(1 - n|x|)dx = f(0).$$

3. Use el teorema de los residuos para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

4. Sean $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y a_n, b_n sus coeficientes de Fourier.

- a) Muestre que para todo $t \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{2}a_0 \right) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nt + b_n(1 - \cos nt)}{n}.$$

- b) Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ es convergente.
- c) Concluya que no existe $f \in L^1([-\pi, \pi])$ que tenga por serie de Fourier a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\ln n}.$$

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

1. Sea $I = [0, 1]$ y sea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Defina las funciones $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} f_0(x) &= g(x), \\ f_n(x) &= \int_0^x f_{n-1}(x) dx, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Demuestre que la secuencia $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0.

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Muestre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

3. Use el teorema de los residuos para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}, \quad a > 0.$$

4. Para $t \in (0, 2\pi)$ defina la función f por $f(t) = \frac{\pi-t}{2}$.

a) Muestre que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \quad \text{para } 0 < t < 2\pi.$$

b) Determine el valor de las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^3}.$$

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tal que $\sup_{x \in A} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)) < \infty$. Muestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ converge uniformemente en A .
2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y

$$A_n := \{x \in \Omega : n-1 \leq |f(x)| < n\}, n = 1, 2, \dots$$

Muestre que $\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$ para $1 \leq p < \infty$ sí y sólo sí $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(A_n) < \infty$.

3. Se considera una función f analítica en \mathbb{C} y tal que su restricción sobre el semieje real positivo es acotada: $|f(x)| \leq C$ para todos $x \geq 0$. Además, existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(e^{t(1+i)}) = 0.$$

Encuentre todas $f(z)$ con estas propiedades.

4. En \mathbb{R} defina $f(t) = 1$ si $|t| < 1$ y 0 en otro caso. Muestre que

$$\sqrt{2\pi}(f * f)(t) = \begin{cases} t+2, & \text{si } -2 < t < 0, \\ 2-t, & \text{si } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Concluya que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3\pi}{8}.$$

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ converge uniformemente en el conjunto $\{x : 1/2 \leq |x| \leq 2\}$.
2. Sea $\{f_n\} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \rightarrow f$ *m*-c.t.p. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(f_n(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(f(x)) dx.$$

3. Suponga que $f \not\equiv 0$ es analítica en \mathbb{C} y satisface la desigualdad $|f(z)| \leq |p_m(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, donde $p_m(z)$ es un polinomio (con coeficientes complejos) de grado $m \geq 1$. Investigue cuantas raíces complejas (contando su multiplicidad) tiene la ecuación $f(z) = 1$. *Hint: Considere $\phi(z) = f(z)/p_m(z)$ y analice sus propiedades de analiticidad.*
4. Sean $a, b > 0$. Utilice el teorema de inversión de la transformada de Fourier para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)}.$$

ANALISIS

Ejercicio 1 |

Para $x \in [0, 1]$, se define

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$$

1. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ converge simplemente.
2. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente.
3. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ no converge normalmente.

Ejercicio 2 |

Determinar el siguiente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{1+\cos(x)^{2n}} e^{-|x|} dx$$

Ejercicio 3 |

Sean α , β and γ tres reales tales que $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \sin(\theta) + \gamma \cos(\theta)}$$

Ejercicio 4 |

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Defina la transformada Coseno de f por

$$\mathcal{C}(f)(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dm(t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

- a) Encuentre la transformada coseno de $f_{\alpha}(t) := e^{-\alpha|t|}$, donde $\alpha > 0$.
- b) Concluya que si $\beta > 0$, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\beta t)}{t^2 + \alpha^2} dt = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

ANALISIS

Ejercicio 1 |

Se considera la siguiente serie de funciones

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

Estudiar la convergencia uniforme en $[a, \infty[$ con $a > 0$.

Ejercicio 2 |

Determinar el siguiente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$$

Ejercicio 3 |

Sean α, β and γ tres reales tales que $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \sin(\theta) + \gamma \cos(\theta)}$$

Ejercicio 4 |

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Muestre que los coeficientes de Fourier de f pueden escribirse como

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t - \frac{\pi}{k})] \cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t - \frac{\pi}{k})] \sin ktdt.$$

Deduzca que si f satisface la condición de tipo Hölder de orden α , es decir $|f(t) - f(s)| \leq L|t - s|^\alpha$, entonces

$$|a_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}, \quad |b_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}.$$

Examen de calificación: Analisis

Nombre: _____

1	2	3	4a	4b	5	Σ

Ejercicio 1 (10 puntos) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y sea

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^x + \ln n}.$$

Demuestre que la serie $\sum u_n(x)$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

(1) Demuestre que para todo $x \in [1, \infty[$ se tiene

$$\ln(1 + x) \leq x$$

(2) Determinar si existe el siguiente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x^3} dx$$

Ejercicio 3 (10 puntos) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y tal que $0 \leq f'(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, 1]$. Demuestre que

$$\int_0^1 f(x)^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

Hint: Se podria considerar las funciones $\varphi(x) = \int_0^x f(t)^3 dt$ y $\psi(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$ y mostrar que $\varphi(1) \leq \psi(1)$

Ejercicio 4a (10 puntos) Suponga que c es un parametro positivo. Hallar usando el teorema de los residuos la transformada de Fourier de

$$f_c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4b (10 puntos) Para c_1, c_2 positivos y f_c definida en el Ejercicio 5a, calcule la convolución $f_{c_1} * f_{c_2}$.

Ejercicio 5 (10 puntos) Represente la función $f(x) = x, x \in [0, \pi]$, por su serie de Fourier en $\{\sin kx\}$ (o sea, encuentre $f(x) \sim \sum b_k \sin kx$) y por su serie de Fourier en $\{\cos kx\}$ (o sea, encuentre $f(x) \sim \sum a_k \cos kx$). Luego halle las sumas de ambas series para todo $x \in \mathbb{R}$ y grafique las funciones periodicas correspondientes.

Examen de calificación: análisis

Enero 2011

6 ejercicios

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1

Sean u_n y v_n dos sucesiones reales tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{u_n} + e^{v_n}) = 2$. Demuestre que las sucesiones u_n y v_n convergen y precisar sus límites respectivas.

Ejercicio 2

Estudiar la convergencia uniforme en \mathbb{R} de la siguiente sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

Ejercicio 3

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva en $[0, 1]$. Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 (f(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t \in [0, 1]} f(t).$$

Ejercicio 4

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(t))^n dt$$

Ejercicio 5

Determinar los valores de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Ayuda: Se podría considerar una función continua 2π -periódica e igual a t^2 en $]-\pi, \pi[$.

Ejercicio 6

Usando el teorema de los residuos, calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)}, \quad a > 1$$