Sums of squares of rational functions on real algebraic and arithmetic surfaces

David Grimm

École Polytechnique Fédédrale de Lausanne

Llanuras de Diana
16 de diciembre 2013

Observación

Cada $f \in \mathbb{R}(X)$ que no es negativa en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es una suma de 2 cuadrados.

Teorema (Hilbert)

Cada $f \in \mathbb{R}(X, Y)$ que no es negativa en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es suma de 4 cuadrados.

Eso generaliza a functiones racionales sobre $\mathbb{R}$-superficies proyectivas suaves S (o curvas C) que no es negativa en $S(\mathbb{R})$ (o $C(\mathbb{R})$).

Observación

Cada $f \in \mathbb{R}(X)$ que no es negativa en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es una suma de 2 cuadrados.

Teorema (Hilbert)

Cada $f \in \mathbb{R}(X, Y)$ que no es negativa en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es suma de 4 cuadrados.

Eso generaliza a functiones racionales sobre $\mathbb{R}$-superficies proyectivas suaves S (o curvas C) que no es negativa en $S(\mathbb{R})$ (o $C(\mathbb{R})$).

Observación

Cada $f \in \mathbb{R}(X)$ *que no es negativa en* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *es una suma de* 2 *cuadrados.*

Teorema (Hilbert)

Cada $f \in \mathbb{R}(X, Y)$ *que no es negativa en* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *es suma de* 4 *cuadrados.*

Eso generaliza a functiones racionales sobre $\mathbb{R}$-superficies proyectivas suaves S (o curvas C) que no es negativa en $S(\mathbb{R})$ (o $C(\mathbb{R})$).

Pregunta

Es la cota 4 optima (o 2 en caso de curvas) ?

Para un cuerpo K, denotemos

$$\sum^n K^2 = \{x_1^2 + \dots, x_n^2 \mid x_i \in K\},$$

y

$$\sum K^2 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum^n K^2.$$

El número de pitagoras de K es

$$p(K) := \text{ínf}\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum K^2 = \sum^n K^2 \right\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\},$$

Pregunta

Es la cota 4 optima (o 2 en caso de curvas) ?

Para un cuerpo K, denotemos

$$\sum^{n} K^2 = \{x_1^2 + \ldots, x_n^2 \mid x_i \in K\},$$

y

$$\sum K^2 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sum^{n} K^2.$$

El número de pitagoras de K es

$$p(K) := \text{ínf} \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum K^2 = \sum^{n} K^2 \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

La pregunta es ahora: Dado una $\mathbb{R}$-superficie S (o curva C), que es $p(\mathbb{R}(\mathcal{S}))$ (o $p(\mathbb{R}(\mathcal{C}))$) ?

- $\underline{\ldots C = \mathbb{P}^1:}$ el polinomio $1 + X^2$ **no** es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X)) = 2$. De hecho, $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C.
- $\underline{\ldots S = \mathbb{P}^2:}$ el polinomio de Motzkin $M(X, Y)$ no es una suma de 3 cuadrados en $\mathbb{R}(X, Y)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X, Y)) = 4$. Pero para otras $\mathbb{R}$-superficies S, no se sabía si $p(\mathbb{R}(S)) \geq 3$...

La pregunta es ahora: Dado una $\mathbb{R}$-superficie S (o curva C), que es $p(\mathbb{R}(\mathcal{S}))$ (o $p(\mathbb{R}(\mathcal{C})))$?

- ...$C = \mathbb{P}^1$: el polinomio $1 + X^2$ **no** es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X)) = 2$. De hecho, $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C.
- ...$S = \mathbb{P}^2$: el polinomio de Motzkin $\mathcal{M}(X, Y)$ **no** es una suma de **3** cuadrados en $\mathbb{R}(X, Y)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X, Y)) = 4$. Pero para otras $\mathbb{R}$-superficies S, no se sabía si $p(\mathbb{R}(S)) \geq 3$...

La pregunta es ahora: Dado una $\mathbb{R}$-superficie S (o curva C), que es $p(\mathbb{R}(\mathcal{S}))$ (o $p(\mathbb{R}(\mathcal{C}))$) ?

- $\underline{...C = \mathbb{P}^1:}$ el polinomio $1 + X^2$ **no** es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X)) = 2$. De hecho, $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C.
- $\underline{...S = \mathbb{P}^2:}$ el polinomio de Motzkin $\mathcal{M}(X, Y)$ **no** es una suma de **3** cuadrados en $\mathbb{R}(X, Y)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X, Y)) = 4$. Pero para otras $\mathbb{R}$-superficies S, no se sabía si $p(\mathbb{R}(S)) \geq 3$...

La pregunta es ahora: Dado una $\mathbb{R}$-superficie S (o curva C), que es $p(\mathbb{R}(\mathcal{S}))$ (o $p(\mathbb{R}(\mathcal{C}))$) ?

- $\underline{...C = \mathbb{P}^1}$: el polinomio $1 + X^2$ **no** es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X)) = 2$. De hecho, $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C.
- $\underline{...S = \mathbb{P}^2}$: el polinomio de Motzkin $\mathcal{M}(X, Y)$ **no** es una suma de **3** cuadrados en $\mathbb{R}(X, Y)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X, Y)) = 4$. Pero para otras $\mathbb{R}$-superficies S, no se sabía si $p(\mathbb{R}(S)) \geq 3$...

La pregunta es ahora: Dado una $\mathbb{R}$-superficie S (o curva C), que es $p(\mathbb{R}(\mathcal{S}))$ (o $p(\mathbb{R}(\mathcal{C}))$) ?

- $\underline{...C = \mathbb{P}^1:}$ el polinomio $1 + X^2$ **no** es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X)) = 2$. De hecho, $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C.
- $\underline{...S = \mathbb{P}^2:}$ el polinomio de Motzkin $\mathcal{M}(X, Y)$ **no** es una suma de **3** cuadrados en $\mathbb{R}(X, Y)$.
- Lo que muestra que $p(\mathbb{R}(X, Y)) = 4$. Pero para otras $\mathbb{R}$-superficies S, no se sabía si $p(\mathbb{R}(S)) \geq 3$...

4. Superficies

Teorema (G. 2013)

Sea S una $\mathbb{R}$-superficie geometricamente irreducible. Entonces $3 \leq p(\mathbb{R}(S)) \leq 4$.

- En caso $S_{\text{reg}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, ya mostró por Schülting.
- En mi prueba, mostré que hay siempre una $\mathbb{R}$-curva $C \hookrightarrow S$ que es geometricamente irreducible con $C(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- En caso $S_{\text{reg}}(\mathbb{R}) = \emptyset$ tenemos que $p(\mathbb{R}(S)) = 3$ si y solamente si hay tambien una función racional $S \dashrightarrow C$ dominante con C una curva como anterior.

4. Superficies

Teorema (G. 2013)

Sea S una $\mathbb{R}$-superficie geometricamente irreducible. Entonces $3 \leq p(\mathbb{R}(S)) \leq 4$.

- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, ya mostró por Schülting.
- En mi prueba, mostré que hay siempre una $\mathbb{R}$-curva $C \hookrightarrow S$ que es geometricamente irreducible con $C(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) = \emptyset$ tenemos que $p(\mathbb{R}(\mathcal{S})) = 3$ si y solamente si hay tambien una función racional $S \dashrightarrow C$ dominante con C una curva como anterior.

4. Superficies

Teorema (G. 2013)

Sea S una $\mathbb{R}$-superficie geometricamente irreducible. Entonces $3 \leq p(\mathbb{R}(S)) \leq 4$.

- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, ya mostró por Schülting.
- En mi prueba, mostré que hay siempre una $\mathbb{R}$-curva $C \hookrightarrow S$ que es geometricamente irreducible con $C(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) = \emptyset$ tenemos que $p(\mathbb{R}(S)) = 3$ si y solamente si hay tambien una función racional $S \dashrightarrow C$ dominante con C una curva como anterior.

4. Superficies

Teorema (G. 2013)

Sea S una $\mathbb{R}$-superficie geometricamente irreducible. Entonces $3 \leq p(\mathbb{R}(S)) \leq 4$.

- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, ya mostró por Schülting.
- En mi prueba, mostré que hay siempre una $\mathbb{R}$-curva $C \hookrightarrow S$ que es geometricamente irreducible con $C(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- En caso $S_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) = \emptyset$ tenemos que $p(\mathbb{R}(\mathcal{S})) = 3$ si y solamente si hay tambien una función racional $S \dashrightarrow C$ dominante con C una curva como anterior.

5. Curvas (y superficies aritméticas)

- Como notado antes, tenemos que $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C irreducible.
- Nótese que $p(\mathbb{R}) = 1$. Un cuerpo real K con $p(K) = 1$ se llama pitagórico.
- ¿Es $p(K(C)) = 2$ para cualquier cuerpo pitagórico en lugar de $\mathbb{R}$?
- Becker:

$$p(K(X)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cada extensión finita} \\ \text{real } L/K \text{ es pitagórica}\end{array}$$

- Se dice que K es hereditariamente pitagórico si el lado derecho vale.

5. Curvas (y superficies aritméticas)

- Como notado antes, tenemos que $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C irreducible.
- Nótese que $p(\mathbb{R}) = 1$. Un cuerpo real K con $p(K) = 1$ se llama pitagórico.
- ¿Es $p(K(C)) = 2$ para cualquier cuerpo pitagórico en lugar de $\mathbb{R}$?
- <u>Becker:</u>

$$p(K(X)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cada extensión finita} \\ \text{real } L/K \text{ es pitagórica}\end{array}$$

- Se dice que K es <u>hereditariamente pitagórico</u> si el lado derecho vale.

5. Curvas (y superficies aritméticas)

- Como notado antes, tenemos que $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C irreducible.
- Nótese que $p(\mathbb{R}) = 1$. Un cuerpo real K con $p(K) = 1$ se llama pitagórico.
- ¿Es $p(K(C)) = 2$ para cualquier cuerpo pitagórico en lugar de $\mathbb{R}$?
- Becker:

$$p(K(X)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cada extensión finita} \\ \text{real } L/K \text{ es pitagórica}\end{array}$$

- Se dice que K es hereditariamente pitagórico si el lado derecho vale.

5. Curvas (y superficies aritméticas)

- Como notado antes, tenemos que $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C irreducible.
- Nótese que $p(\mathbb{R}) = 1$. Un cuerpo real K con $p(K) = 1$ se llama pitagórico.
- ¿Es $p(K(C)) = 2$ para cualquier cuerpo pitagórico en lugar de $\mathbb{R}$?
- Becker:

$$p(K(X)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cada extensión finita} \\ \text{real } L/K \text{ es pitagórica}\end{array}$$

- Se dice que K es hereditariamente pitagórico si el lado derecho vale.

5. Curvas (y superficies aritméticas)

- Como notado antes, tenemos que $p(\mathbb{R}(C)) = 2$ para cualquier $\mathbb{R}$-curva C irreducible.
- Nótese que $p(\mathbb{R}) = 1$. Un cuerpo real K con $p(K) = 1$ se llama pitagórico.
- ¿Es $p(K(C)) = 2$ para cualquier cuerpo pitagórico en lugar de $\mathbb{R}$?
- Becker:

$$p(K(X)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cada extensión finita} \\ \text{real } L/K \text{ es pitagórica}\end{array}$$

- Se dice que K es hereditariamente pitagórico si el lado derecho vale.

- Más generalmente:

Teorema

Sea K un cuerpo real y C una K-curva proyectiva y suave de género cero con puntos reales. Entonces

$$p(K(C)) = 2 \Leftrightarrow K \text{ es hereditariamente pitagórico.}$$

- “$\Leftarrow$” fue mostrado por Tikhonov y Yanchevskii...
- ... y “$\Rightarrow$” por mi.
- La pregunta obvia:
  ¿Qué pasa en género uno o más?

- Más generalmente:

Teorema

Sea K un cuerpo real y C una K-curva proyectiva y suave de género cero con puntos reales. Entonces

$$p(K(C)) = 2 \Leftrightarrow K \text{ es hereditariamente pitagórico.}$$

- "$\Leftarrow$" fue mostrado por Tikhonov y Yanchevskii...
- ... y "$\Rightarrow$" por mi.
- La pregunta obvia:
  ¿Que pasa en género uno o más?

- Más generalmente:

Teorema

Sea K un cuerpo real y C una K-curva proyectiva y suave de género cero con puntos reales. Entonces

$$p(K(C)) = 2 \Leftrightarrow K \text{ es hereditariamente pitagórico.}$$

- "$\Leftarrow$" fue mostrado por Tikhonov y Yanchevskii...
- ... y "$\Rightarrow$" por mi.
- La pregunta obvia:
  ¿Que pasa en género uno o más?

- Más generalmente:

Teorema

Sea K un cuerpo real y C una K-curva proyectiva y suave de género cero con puntos reales. Entonces

$$p(K(C)) = 2 \Leftrightarrow K \text{ es hereditariamente pitagórico.}$$

- "$\Leftarrow$" fue mostrado por Tikhonov y Yanchevskii...
- ... y "$\Rightarrow$" por mi.
- La pregunta obvia:
  ¿Que pasa en género uno o más?

- Tikhonov: $p(\mathbb{R}((t))(E)) \geq 3$ para la curva elíptica E definida por

$$Y^2 = (tX - 1)(X^2 + 1)$$

sobre $\mathbb{R}((t))$ (que es un cuerpo hereditariamente pitagorico)

- Becher & Van Geel : ... y también $p(\mathbb{R}((t))(E)) \leq 4$...

Pregunta (Becher, Van Geel)

¿Cual es el valor exacto de $p(\mathbb{R}((t))(E))$?

(Vamos a ver que $p(\mathbb{R}((t))(E)) = 3$.)

- Tikhonov: $p(\mathbb{R}((t))(E)) \geq 3$ para la curva elíptica E definida por

$$Y^2 = (tX - 1)(X^2 + 1)$$

sobre $\mathbb{R}((t))$ (que es un cuerpo hereditariamente pitagorico)

- Becher & Van Geel : ... y también $p(\mathbb{R}((t))(E)) \leq 4$...

Pregunta (Becher, Van Geel)

¿Cual es el valor exacto de $p(\mathbb{R}((t))(E))$?

(Vamos a ver que $p(\mathbb{R}((t))(E)) = 3$.)

- Tikhonov: $p(\mathbb{R}((t))(E)) \geq 3$ para la curva elíptica E definida por

$$Y^2 = (tX - 1)(X^2 + 1)$$

sobre $\mathbb{R}((t))$ (que es un cuerpo hereditariamente pitagorico)

- Becher & Van Geel : ... y también $p(\mathbb{R}((t))(E)) \leq 4$...

Pregunta (Becher, Van Geel)

¿Cual es el valor exacto de $p(\mathbb{R}((t))(E))$?

(Vamos a ver que $p(\mathbb{R}((t))(E)) = 3$.)

- Tikhonov: $p(\mathbb{R}((t))(E)) \geq 3$ para la curva elíptica E definida por

$$Y^2 = (tX - 1)(X^2 + 1)$$

sobre $\mathbb{R}((t))$ (que es un cuerpo hereditariamente pitagorico)

- Becher & Van Geel : ... y también $p(\mathbb{R}((t))(E)) \leq 4$...

Pregunta (Becher, Van Geel)

¿Cual es el valor exacto de $p(\mathbb{R}((t))(E))$ *?*

(Vamos a ver que $p(\mathbb{R}((t))(E)) = 3$.)

- Harbater, Hartmann y Krashen han desarrollado un método casi hecho a medida para la pregunta:

¡Field-Patching!

(una evolución de '*Rigid Patching*' que Harbater utilizó para resolver el '*Problema Inverso de Galois*' sobre $\mathbb{Q}_p(X)$)

- Este produce un *criterio de isotropía* para formas cuadráticas (entre otros):

- Harbater, Hartmann y Krashen han desarrollado un método casi hecho a medida para la pregunta:

  ¡Field-Patching!

  (una evolución de '*Rigid Patching*' que Harbater utilizó para resolver el '*Problema Inverso de Galois*' sobre $\mathbb{Q}_p(X)$)
- Este produce un *criterio de isotropía* para formas cuadráticas (entre otros):

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}((t))$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}((t))(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{S},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}(\!(t)\!)$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}(\!(t)\!)(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Teorema (Harbater-Hartmann-Krashen$+\varepsilon$ (G.))

Una F-forma cuadrática n-aria ($n \geq 3$) que es isotrópica sobre F_P para cada $P \in \mathcal{X}$, ya es isotrópica sobre F.

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}((t))$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}((t))(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Teorema (Harbater-Hartmann-Krashen+ ε (G.))

Una F-forma cuadrática n-aria ($n \geq 3$) que es isotrópica sobre F_P para cada $P \in \mathcal{X}$, ya es isotrópica sobre F.

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}(\!(t)\!)$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}(\!(\!(t)\!)\!)(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Teorema (Harbater-Hartmann-Krashen+ ε (G.))

Una F-forma cuadrática n-aria ($n \geq 3$) que es isotrópica sobre F_P para cada $P \in \mathcal{X}$, ya es isotrópica sobre F.

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}((t))$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}(((t))(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Teorema (Harbater-Hartmann-Krashen+ ε (G.))

Una F-forma cuadrática n-aria ($n \geq 3$) que es isotrópica sobre F_P para cada $P \in \mathcal{X}$, ya es isotrópica sobre F.

Criterio de isotropía

- Sea C una curva sobre $\mathbb{R}((t))$ y sea $\mathcal{S}$ una superficie fibrada regular sobre $\mathbb{R}[\![t]\!]$ con fibra genérica C.
- Denote $\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{\mathbb{R}[\![t]\!]} \mathbb{R}$ la fibra especial de $\mathcal{S}$,
- $F := \mathbb{R}(((t)))(C)$ el cuerpo de funciones,
- y F_P el cuerpo de fracciones de la compleción de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ para $P \in \mathcal{X}$ (cerrado o genérico).

Teorema (Harbater-Hartmann-Krashen$+\ \varepsilon$ (G.))

Una F-forma cuadrática n-aria ($n \geq 3$) que es isotrópica sobre F_P para cada $P \in \mathcal{X}$, ya es isotrópica sobre F.

Con este podemos mostrar:

Teorema (junto con Becher & Van Geel)

$$2 \leq p(F) \leq 3 \quad \& \quad \left|\frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times}\right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$.

Con este podemos mostrar:

Teorema (junto con Becher & Van Geel)

$$2 \leq p(F) \leq 3 \quad \& \quad \left| \frac{(F^2 + F^2 + F^2)^\times}{(F^2 + F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}(\!(t)\!))$.

Con este podemos mostrar:

Teorema (junto con Becher & Van Geel)

$$2 \leq p(F) \leq 3 \quad \& \quad \left| \frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}(\!(t)\!))$.

- Sea $f \in (\sum F^2)^\times$. Con el *criterio de isotropía* basta resolver

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = f$$

en F_P para cualquier $P \in \mathcal{X}$.

Con este podemos mostrar:

Teorema (junto con Becher & Van Geel)

$$2 \leq p(F) \leq 3 \quad \& \quad \left| \frac{(F^2 + F^2 + F^2)^\times}{(F^2 + F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}(\!(t)\!))$.

- Sea $f \in (\sum F^2)^\times$. Con el *criterio de isotropía* basta resolver

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = f$$

en F_P para cualquier $P \in \mathcal{X}$.

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

$$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. ✓

- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^\times$.

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

$$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. ✓

- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$.

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

$$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. $\checkmark$

- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$.

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

    $$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. ✓
- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$. ✓

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

    $$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. ✓
- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$. ✓

- Si $\kappa_P = \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/\mathfrak{m}_{\mathcal{C},P}$ **no** es **real**, entonces $-1 = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: $-1 = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - Entonces

    $$f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2(f-1)}{2Y_1}\right)^2 + \left(\frac{f-1}{2Y_1}\right)^2$$

    es una suma de 3 cuadrados en F_P. ✓

- Si κ_P **es real** y si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, entonces $f(P) = y_1^2 + y_2^2$ en κ_P.
  - *Lema de Hensel*: Si además $f(P) \neq 0$ en κ_P, entonces $f = Y_1^2 + Y_2^2$ en F_P.
  - De hecho, se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$. ✓

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3 \checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}(\!(t)\!))$.

- Nótese que **¡casi!** demostramos que cada $f \in (\sum F^2)^\times$ es una suma de 2 cuadrados...
- ...solamente los puntos $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{X}$ con $\kappa(P_i)$ no real y $\sqrt{-1} \notin \kappa_{P_i}$ son obstrucciones en el *criterio de isotropía*.

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3 \checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2 + F^2 + F^2)^\times}{(F^2 + F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$.

- Nótese que **¡casi!** demostramos que cada $f \in (\sum F^2)^\times$ es una suma de **2** cuadrados...
- ...solamente los puntos $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{X}$ con $\kappa(P_i)$ no real y $\sqrt{-1} \notin \kappa_{P_i}$ son obstrucciones en el *criterio de isotropía*.

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3 \checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2 + F^2 + F^2)^\times}{(F^2 + F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$.

- Nótese que **¡casi!** demostramos que cada $f \in (\sum F^2)^\times$ es una suma de **2** cuadrados...
- ...solamente los puntos $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{X}$ con $\kappa(P_i)$ no real y $\sqrt{-1} \notin \kappa_{P_i}$ son obstrucciones en el *criterio de isotropía*.

- Nótese que **¡casi!** demostramos que cada $f \in (\sum F^2)^\times$ es una suma de **2** cuadrados...
- ...solamente los puntos $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{X}$ con $\kappa(P_i)$ no real y $\sqrt{-1} \notin \kappa_{P_i}$ son obstrucciones en el *criterio de isotropía*.

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3 \checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2 + F^2 + F^2)^\times}{(F^2 + F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}(\!(t)\!))$.

- Los $P_1, \ldots, P_N$ son los puntos genéricos de las componentes geometricamente irreducibles de $\mathcal{X}$ sin puntos lisos reales (en particular $N < \infty$).

$$
\begin{tikzcd}
\left(\sum F^2\right)^\times \arrow[r, "\oplus \mathrm{ord}_{P_i}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \mathbb{Z}^N \arrow[r, "\text{mód } 2"] & (\mathbb{Z}/2)^N
\end{tikzcd}
$$

- $\ker(\varphi)$ son las funciones para las cuales las obstrucciones son irrelevantes...
- ... por tanto $\ker(\varphi) \subseteq \left(F^2 + F^2\right)^\times$ (de hecho "$=$").

Sigue que

$$\left|\frac{\left(\sum F^2\right)^\times}{(F^2+F^2)^\times}\right| \leq 2^N$$

(de hecho "$=$" a causa de '*aproximación débil*').

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3\checkmark \ \& \quad \left|\frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times}\right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$.

Nos queda la tarea de demostrar que el N de

$$\left|\frac{\left(\sum F^2\right)^\times}{(F^2+F^2)^\times}\right| \leq 2^N$$

está acotado uniformemente para todos los cuerpos de funciones F de un género $\mathfrak{g}$ fijo.

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3\checkmark \;\&\; \left|\frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times}\right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$.

por ejemplo cuando $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) = 1$:

- Idea: utilizar *la clasificación de tipos de reducción* (de Kodeira) para acotar el número N de componentes (de $\mathcal{X}$) geometricamente irreducibles sin puntos reales suaves.
- La clasificación nos da una representación gráfica de $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$.
  - (componentes isomórfos (o biracionales) a $\mathbb{P}^1$ representados por líneas rojas)

por ejemplo cuando $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) = 1$:

- Idea: utilizar *la clasificación de tipos de reducción* (de Kodeira) para acotar el número N de componentes (de $\mathcal{X}$) geometricamente irreducibles sin puntos reales suaves.
- La clasificación nos da una representación gráfica de $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$.
  - (componentes isomórfos (o biracionales) a $\mathbb{P}^1$ representados por líneas rojas)

por ejemplo cuando $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) = 1$:

- Idea: utilizar *la clasificación de tipos de reducción* (de Kodeira) para acotar el número N de componentes (de $\mathcal{X}$) geometricamente irreducibles sin puntos reales suaves.
- La clasificación nos da una representación gráfica de $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$.
  - (componentes isomórfos (o biracionales) a $\mathbb{P}^1$ representados por líneas rojas)

tipos de reducción:

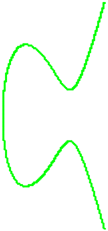
- I_n $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

tipos de reducción:

- I_0 $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

$n = 0$

(buena reducción)

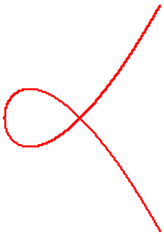


tipos de reducción:

- $I_{\color{blue}1}$ $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

$\color{blue}n = 1$

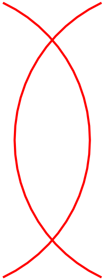
(red. multiplicativa)



tipos de reducción:

- I_2 $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

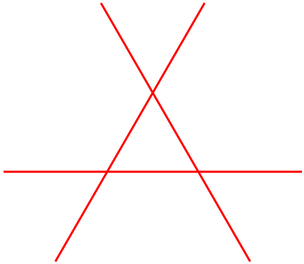
$n = 2$



tipos de reducción:

- I_3 $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

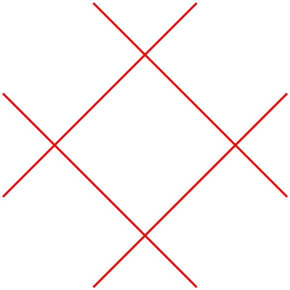
$n = 3$



tipos de reducción:

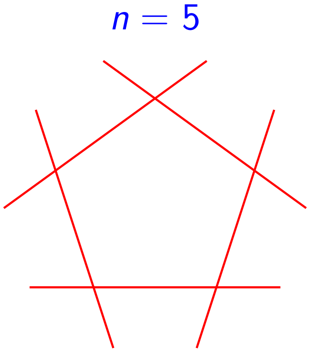
- I_{4} $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$

$n = 4$



tipos de reducción:

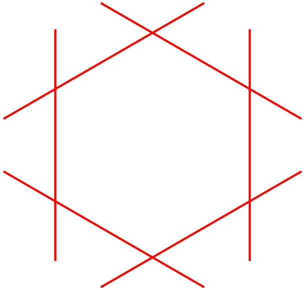
- I_5 $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV_{1,2}^\star$



tipos de reducción:

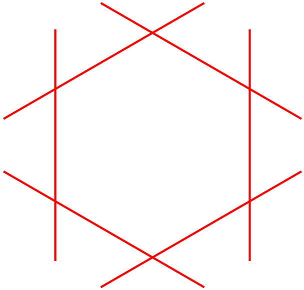
- I_{6} $(n \in \mathbb{N})$
- $I_n^\star$ $(n \in \mathbb{N})$
- II
- $II^\star$
- III
- $III^\star$
- $IV_{1,2}$
- $IV^\star_{1,2}$

$n = 6$



Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ actúa
sobre $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$.
(*$\mathcal{X}$ es definida sobre $\mathbb{R}$*)



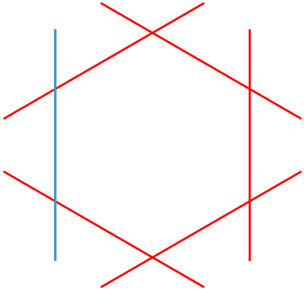
$\mathcal{X}(\mathbb{R}) \widehat{=} \{$puntos fijos$\}$;

$\{$componentes geom. irreducibles de $\mathcal{X}\} \widehat{=} \{$líneas fijas$\}$.

Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

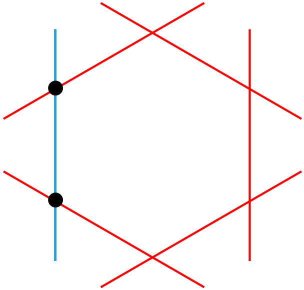
Supongamos que una de las líneas corresponde a una componente geom. irreducible de $\mathcal{X}$ sin puntos reales.

(esto es una cónica **non-split** sobre $\mathbb{R}$).



Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

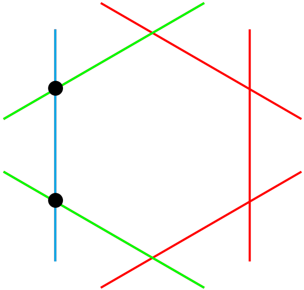
... $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ permuta los dos puntos de intersección entre la cónica y las otras componentes de $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$...



Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

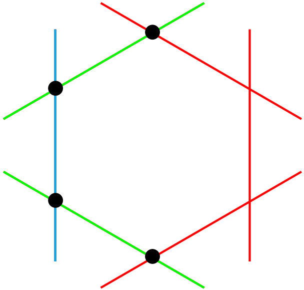
...Entonces las dos componentes de $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ que intersectan la cónica están permutadas también...

...por eso, ellas vienen de una componente de $\mathcal{X}$ **no** geom. irred.



Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

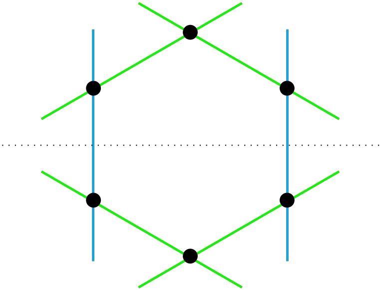
... por lo tanto, los siguientes dos puntos de intersección también están permutados por $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ etc...



Ejemplo: Acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ para I_6

...lo que demuestra que $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ actúa como reflexión con respecto a la línea puntuada...

...en donde **a lo mas 2** componentes de $\mathcal{X}$ son geom. irred. sin puntos reales...



Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3\checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$. $\checkmark$

(visto para $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) = 1$)

- Existen también para $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) \geq 2$ descripciones combinatorias de $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ que utilizamos para cotar B.
- pero esos no nos dan el óptimo B. (Proyecto)

Teorema

$$2 \leq p(F) \leq 3\checkmark \ \& \quad \left| \frac{(F^2+F^2+F^2)^\times}{(F^2+F^2)^\times} \right| \leq 2^B < \infty$$

con B que depende solamente de $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t)))$. ✓

(visto para $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) = 1$)

- Existen también para $\mathfrak{g}(F/\mathbb{R}((t))) \geq 2$ descripciones combinatorias de $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ que utilizamos para cotar B.
- pero esos no nos dan el óptimo B. (Proyecto)