



ACTA DE RESÚMENES

LXXXVI Encuentro de la Sociedad de Matemática de Chile

Conferencias y Sesiones Invitadas

BIENVENIDA

El Encuentro Anual de la Sociedad de Matemática de Chile es la reunión en que toda la comunidad matemática del país tiene la oportunidad de compartir y mostrar su actividad científica. Junto con ello, en él participan regularmente destacados investigadores chilenos residentes fuera de Chile, así como extranjeros que colaboran con los grupos de investigación nacionales.

El Encuentro LXXXVI de la Sociedad de Matemática de Chile se desarrollará en la ciudad de Talca entre los días 2 y 4 de noviembre del 2017, y tendrá lugar en las dependencias de la Universidad de Talca, la cual se adjudicó la organización tras un concurso abierto a la comunidad matemática nacional. Además, el día 4 de noviembre se complementará la programación con la realización del IV Festival de Matemática de Chile, el cual ha sido posible gracias al apoyo brindado, además, por la Universidad Católica del Maule y la Municipalidad de Talca.

La SOMACHI y la Universidad de Talca agradecen especialmente a CONICYT por el apoyo financiero brindado, el cual permitirá que un número considerable de estudiantes de pre y post-grado hayan sido becados para participar del Encuentro Anual. Ambas instituciones agradecen también el trabajo realizado tanto por el Comité Científico como por los organizadores de sesiones temáticas. Sin duda alguna, el éxito del encuentro se debe en gran medida a su capacidad para convocar la matemática de la más alta calidad de Chile, tal como se ve reflejado en el Acta de Resúmenes presentado a continuación.

Andrés Navas

Sociedad de Matemática de Chile

Álvaro Liendo

Comité Organizador, Universidad de Talca



Talca, noviembre de 2017.

Comité Científico:

CRISTIAN GONZÁLEZ-AVILÉS, U. DE LA SERENA
MILTON JARA, IMPA (BRASIL)
MÓNICA MUSSO, PUC CHILE
ANDRÉS NAVAS, U. DE SANTIAGO (COORDINADOR)
RUBÍ RODRÍGUEZ, U. DE LA FRONTERA
MARÍA OFELIA RONCO, U. DE TALCA
MAYA STEIN, U. DE CHILE
GUNTHER UHLMANN, U. DE WASHINGTON

Comité Organizador:

MARÍA INÉS ICAZA, U. DE TALCA
MAXIMILIANO LEYTON, U. DE TALCA
ÁLVARO LIENDO, U. DE TALCA
RODRIGO PONCE, U. DE TALCA

Conferencias Plenarias:

JUAN DÁVILA, U. DE CHILE
LUC LAPOINTE, U. DE TALCA
CARLOS SING-LONG, PUC CHILE

Conferencias Subplenarias:

MATHIEU CALVEZ, U. DE LA FRONTERA
SEBASTIÁN DONOSO, U. DE O'HIGGINS
NATALIA GARCÍA, PUC CHILE
STEPHEN GRIFFETH, U. DE TALCA
HIÊP HÀN, U. DE SANTIAGO
GIANCARLO LUCHINI, U. DE CHILE

Cursillos:

ELIZABETH GASPARIM, U. CATÓLICA DEL NORTE

CLAUDIO MUÑOZ, U. DE CHILE

DANIEL REMENIK, U. DE CHILE

Sesiones temáticas y organizadores:

S01: ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

S. Alarcón (UTFSM), L. Iturriaga (UTFSM), F. Mahmoudi (U. de Chile)

S02: ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

A. Allendes (UTFSM), M. Karkulik (UTFSM)

S03: MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS BIOLÓGICOS

F. Córdova (UCM), A. Rojas (UCM)

S04: DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

M. Aravena (UCM), C. Caamaño (UCM), X. Colipán (UCM)

S05: MATEMÁTICA DISCRETA

H. Hàn (USACH), A. Jiménez (UV), Maya Stein (U. de Chile)

S06: OPTIMIZACIÓN Y ÁREAS AFINES

E. Vilches (U de O'Higgins), D. Sosa (U. de O'Higgins), P. Pérez-Aros (U. de Chile)

S07: GEOMETRÍA COMPLEJA

R. Hidalgo (UFRO), S. Quispe (UFRO), S. Reyes (UFRO)

S08: FÍSICA MATEMÁTICA

O. Bourget (PUC Chile), V. Cortés (PUC Chile)

S09: SISTEMAS DINÁMICOS

Á. Castañeda (U. de Chile), F. Valenzuela (PUC Valparaíso)

S10: GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y ARITMÉTICA

N. García (PUC Chile), M. Leyton (U. Talca), L. Lonelí (PUC Valparaíso)

S11: PROBABILIDADES

M. Cabezas (PUC Chile), G. Moreno (PUC Chile)

S12: ACCIONES DE GRUPOS
M. Cortez (USACH), C. Rivas (USACH)

S13: TEORÍA DE REPRESENTACIONES
S. Griffeth (U. de Talca)

S14: SESIÓN DE PÓSTERS
M. Leyton (U. de Talca)

Contents

BIENVENIDA	2
CONFERENCIAS PLENARIAS	13
Vórtices en la ecuación de Euler en dos dimensiones	14
Symmetric functions in superspace	15
El impacto del trabajo de Yves Meyer	16
CONFERENCIAS SUBPLENARIAS	17
Problemas algorítmicos en grupos de Artin-Tits	18
Automorphism groups in symbolic dynamics	19
Curvas de género bajo en superficies y aplicaciones aritméticas	20
Syzygies: combinatorics and representation theory	21
Randomness and quasi-randomness in Ramsey theory	23
Aproximación y grupos algebraicos	24
CURSILLOS	25
Fibraciones de Lefschetz	26
Local strong decay estimates in some nonlinear dispersive equations with supercritical, modified scattering	28
Random growth, random matrices, and the KPZ fixed point	31
SESIONES INVITADAS	33
Ecuaciones diferenciales parciales	33
Análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales	34
A-priori error estimate for a new DG approach applied to Laplace operator This research was partially supported CONICYT-Chile through Fondecyt 1160578	35
An a-posteriori error estimate for an augmented pseudostress-velocity mixed FEM formulation for a generalized Stokes problem This research was partially supported CONICYT-Chile through Fondecyt 1160578	36

Análisis de error a posteriori para problemas temporales mediante esquemas estabilizados de elementos finitos	38
A linear Uzawa-type solver for nonlinear transmission problems	40
Adaptive finite element methods for sparse PDE-constrained optimization	41
Mixed-primal finite element methods for stress-assited diffusion problems	43
A DPG method for the Kirchhoff-Love plate bending model	45
Variational formulation of time-fractional parabolic equationsThis work was supported by CONICYT-Chile through the project FONDECYT 1170672.	46
Un método de elementos finitos estabilizados de bajo orden a divergencia nula para el problema de Boussinesq estacionario	47
A stabilised finite element method for the convection-diffusion-reaction equation in mixed form	49
An a posteriori error estimator for the MHM method applied to Stokes/Brinkman equations	51
On exponential stability for thermoelastic plates – a comparison of different modelsThis work was partially supported by Fondecyt 1140676, CONICYT-Chile through BASAL project CMM, Universidad de Chile; and by Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI ² MA), Universidad de Concepción.	52
Modelos matemáticos de sistemas biológicos	54
Minimización de las pérdidas futuras en una granja de producción animal, afectada por una enfermedad que es controlada por hospitalización impulsiva	55
Un Modelo de Dinámica Poblacional con Efecto Allee e Inmigración Estocástica	56
Dinámicas en el modelo de depredación de May-Holling-Tanner, considerando interferencia entre los depredadores	58
A qualitative analysis for a harvesting model of small pelagic fish with bounded fishing effort	60
Modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional no-monotónica racional	62
Interaction between infectious diseases with two susceptibility levels. A mathematical model.	65

Stability Analysis of a Mathematical Model of a Chain of Chemostats in Series with Delay	67
Hacia un modelo de competencia para organismos ectotermos y cambio climático	68
Global stability of bidirectional associative memory neural networks with piecewise constant arguments	69
Evaluación matemática de costos de estrategias de control para la plaga de castores en la Patagonia	71
MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE REBAÑO EN LAS PRESAS. ¿SON ADECUADAS LAS RESPUESTAS FUNCIONALES NO-DIFERENCIABLES?	73
Didáctica de la matemática	75
Actividad de Modelización basada en el Ciclo de Kolb para el contenido de Función Cuadrática. Una experiencia de aula.	76
Interconexión entre teorías para comprender procesos de construcción de conocimiento matemático: el caso de modelación y abstracción en contexto	78
El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores	81
Diseño e implementación de Aplicaciones móviles como apoyo al estudiante	83
ANÁLISIS DE ACTIVIDADES SOBRE LA NOCIÓN PRE NUMÉRICA PIAGETANA DE CLASIFICACIÓN EN MANUALES ESCOLARES CHILENOS	85
Estudio de Clases para el desarrollo de la estrategia de componer 10 en estudiantes de primer grado de enseñanza básica	88
La teoría modos de pensamiento de Sierpinski Nuevos enfoques y tendencias	90
Niveles de razonamiento y habilidades geométricas en estudiantes de educación secundaria. Propuesta para atender a la diversidad de género	92
Paradigmas dominantes e identidad disciplinar en la formación inicial del profesor de matemáticas: el caso de un programa en la USACH	95
Propuesta de enseñanza para el desarrollo de la habilidad de modelización en el dominio del aprendizaje geométrico y algebraico para estudiantes de 4o básico	100
Matemática discreta	102

Embedding de árboles con grado máximo acotado	
Parte 2	103
Monochromatic ℓ -cycle partitions of $\mathcal{K}_n^{(k)}$	104
Autómatas celulares pre-expansivos	105
Deciding whether a Grid is a Topological Subgraph of a Planar Graph is NP-Complete	107
TÍTULO	108
Embedding de árboles con grado máximo acotado	
Parte 1	109
Maximum Box Problem on Stochastic Points	110
Generalised colouring numbers of planar graphs	111
The ordinal secretary problem on graphs (and matroids)	112
Parameterized $(1 + \epsilon)$ -approximation algorithms for packing problems	113
Lines in Graphs	114
Optimización y áreas afines	115
On the data completion problem and the inverse obstacle problem with partial Cauchy data for Laplace's equation	116
Regularization and multiple kernels by recurrent least squares support vector machines	117
Guaranteed value strategy for the optimal control of biogas production in continuous bio-reactors	118
Optimal control of parabolic PDEs by spectral decomposition	119
Lyapunov stability of differential inclusions with Lipschitz Cusco perturba- tions of maximal monotone operators	121
A Complete characterization of the subdifferential of convex integral func- tions	122
Representación general del conjunto normal aproximado a los subniveles de funciones convexas	124

Nonsmooth Lyapunov pairs for differential equations and perturbed sweeping processes	126
Geometría compleja	128
Foliaciones Holomorfas: Minimales y Convexidad	129
Structure of $\widetilde{\mathcal{M}}_4$	130
Construir variedades de Calabi-Yau con polítopos	131
Submersions and curves of constant geodesic curvature	133
Riemann surfaces defined over the reals	134
On the one-dimensional family of Riemann surfaces of genus q with $4q$ automorphisms	135
Física matemática	136
Quantum resonances and exponential decay	137
On the shape of one-phase free boundaries in the plane	138
Multi-fold contour integrals of certain ratios of Euler gamma functions from Feynman diagrams	139
Resonancias en guías de ondas torcidas	140
From Anderson models to GOE statistics	141
Quantizations on general locally compact groups	142
Interacting bosons in a double-well potential: localization regime	143
Bispectralidad y Sistemas de Partículas Cuánticas Integrables	144
Sistemas dinámicos	145
Difeomorfismos expansivo en medida: condiciones y ejemplos.	146
Espectro y conjunto contractible de un sistema diferencial no autónomo	147
Una nueva desigualdad para cociclos de matrices y una fórmula de Berger-Wang	149
DICOTOMÍA EXPONENCIAL GENERALIZADA EN SISTEMAS DIFERENCIALES NO AUTÓNOMOS Trabajo de tesis supervisado por Gonzalo Robledo Veloso. Financiado por proyecto FONDECYT 1170968.	150

Dichotomy Spectrum and topological conjugacy on nonautonomous unbounded difference system	152
Dinámicas Parcialmente Hiperbólicas y Exponentes de Lyapunov	153
Geometría algebraica y aritmética	154
Grupos de automorfismo de variedades tóricas afines no normales	155
On deformations of toric varieties	156
Propiedades hereditarias de sumas de cuadrados en extensiones de cuerpos	157
Local Global divisibility problem over GL_2 -type Abelian Varieties	158
Equidistribution of p -adic Hecke orbits on the modular curve	159
Sobre la definibilidad de $\mathbb{Z}$ y el número de Julia Robinson	160
On some Hermitian hypersurfaces defined over a finite field	161
Geometry of Hilbert and Quot schemes of points on smooth surfaces	162
Distribución de K^2 para superficies estables	163
Probabilidades	164
On the Marshall-Olkin Copula Model for Network Reliability under Dependent Failures	165
Quantitative uniform propagation of chaos for the spatially homogeneous Boltzmann equation	166
Numerical solution of stochastic master equations using stochastic interacting wave functions	167
The Contact Process on Evolving Scale-Free Networks	169
BIFURCACIÓN DE HOPF CUÁNTICA	171
Random Polymers on the Complete Graph	172
Acciones de grupos	173
Substitutions, automorphisms of the free group and measures.	174
Projective subdynamics of SFTs over virtually- $\mathbb{Z}$ groups	175
EL PROBLEMA DE BURNSIDE PARA 2-GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS DE LA ESFERA	177

Automorphism groups in symbolic dynamics	180
Elementos reversibles en Transformaciones de Intercambio de Intervalos.	181
Aperiodic $\mathbb{F}_k$ -Wang tilings with minimal alphabet size	182
Rigidez y geometricidad de acciones de grupos de superficies sobre el círculo	183
Teoría de representaciones	184
Ansatz de Bethe algebraica y funciones simétricas	185
Completeness of the Bethe Ansatz for an open q-boson system with integrable boundary interactions	186
On the injectivity of affine Hecke algebras towers and related towers	187
Jucys-Murphy elements for the diagrammatical category of Soergel bimodules	188
Representations of right-angled Coxeter and Artin groups	189
Sesión de pósters	190

CONFERENCIAS PLENARIAS

Vórtices en la ecuación de Euler en dos dimensiones

JUAN DÁVILA

Departamento de Ingeniería Matemática, y CMM Universidad de Chile,
e-mail: jdavila@dim.uchile.cl

Abstract

Presentaremos un resultado sobre soluciones de la ecuación de Euler en un dominio dos dimensional con vorticidad concentrada, que relaciona el movimiento de los puntos de concentración con las soluciones del sistema de Kirchoff-Routh. Esta relación ya se conoce, pero obtenemos expansiones más precisas que las de [1], que permiten en particular describir la velocidad del fluido cerca de los vórtices.

Este trabajo es en colaboración con Manuel del Pino (U. de Chile), Monica Musso (Pontificia Universidad Católica de Chile) y Juncheng Wei (University of British Columbia).

References

- [1] Marchioro, C; Pulvirenti, M. *Vortices and localization in Euler flows*. Comm. Math. Phys., 1993, 154, 49–61.

Symmetric functions in superspace

LUC LAPOINTE

Abstract

A generalization of the theory of symmetric functions arose in connection with the supersymmetric version of the Calogero-Sutherland model of identical particles on a circle. In this framework, one can define superspace analogs of Macdonald, Jack and Schur polynomials. We will give an overview of the combinatorics that has been uncovered so far, putting a special emphasis on certain refinements of the original Macdonald positivity conjectures that seem to shed light on the problem of finding a combinatorial interpretation for the Macdonald (q,t) -Koshta coefficients. We will also present a surprising connection between the 6-vertex model in statistical mechanics and the Pieri rules for Macdonald polynomials in superspace.

El impacto del trabajo de Yves Meyer

CARLOS A. SING-LONG C.

Abstract

A lo largo de su extensa carrera, el matemático francés Yves Meyer ha realizado importantes contribuciones al desarrollo de áreas tan diversas como la teoría de números, el análisis armónico, el análisis de operadores integrales singulares y las ecuaciones diferenciales parciales. En particular, este año fue galardonado con el Premio Abel “por su rol pivotal en el desarrollo de la teoría matemática de ondeletas.” En esta charla presentaremos un panorama del trabajo que Yves Meyer ha realizado durante las últimas décadas y la influencia e impacto que éste ha tenido más allá de las matemáticas, como lo ha sido en la física y en el procesamiento de señales.

CONFERENCIAS SUBPLENARIAS

Problemas algorítmicos en grupos de Artin-Tits

MATTHIEU CALVEZ

Abstract

Esbozaremos los métodos de resolución de problemas de la palabra y de la conjugación en grupos de trenzas (y los grupos de Artin-Tits de tipo finito) iniciados por Frank Garside en 1969. Hacia el final de la charla haremos una breve reseña de trabajos anteriores y en curso ilustrando cómo las técnicas combinatorias “à la Garside” se pueden implementar con insumos geométricos.

Automorphism groups in symbolic dynamics

SEBASTIÁN DONOSO

Abstract

A subshift X is a closed subset of $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ where $\mathcal{A}$ is a finite alphabet (colors) and invariant under the shift action $\sigma: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. The automorphism group $\text{Aut}(X, \sigma)$ is the group of all homeomorphisms from X to itself that commute with σ . That is, $\text{Aut}(X, \sigma)$ is the group of self conjugacies of (X, σ) . Its study is a classical topic in symbolic dynamics but has regained a lot of attention in recent years, specially in the zero entropy case. In this talk I will survey some recent advances in the field and present many open questions.

References

- [1] M. Boyle, D. Lind, D. Rudolph. The automorphism group of a shift of finite type, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 71–114.
- [2] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a shift of subquadratic growth, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*, [arXiv:1403.0238](#).
- [3] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a shift of linear growth, *Forum of Mathematics, Sigma* **3** (2015), e5.
- [4] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a minimal shift of stretched exponential growth. *J. Mod. Dyn.* **10** (2016), 483–495.
- [5] S. Donoso, F. Durand, A. Maass and S. Petite. On automorphism groups of low complexity subshifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **36** (2016), no. 1, 64–95.
- [6] S. Donoso, F. Durand, A. Maass and S. Petite. On automorphism groups of Toeplitz subshifts, *Discrete analysis* 2017:11, 19 pp.
- [7] M. Hochman. On the automorphism group of multidimensional SFTs. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **30** (2010), 809–840.

Curvas de género bajo en superficies y aplicaciones aritméticas

NATALIA GARCÍA FRITZ

Abstract

En esta charla explicaremos la conexión entre curvas de género bajo en superficies y diversos tipos de problemas en teoría de números. En particular, mostraremos que generalizaciones [2] de una técnica de P. Vojta [5] para encontrar todas las curvas de género bajo en algunas superficies, nos permite resolver algunos problemas aritméticos bajo la conjetura de Bombieri-Lang para los números racionales. Por ejemplo, problemas sobre sucesiones de cuadrados con segundas diferencias constantes [1], problemas sobre valores cuadrados consecutivos de polinomios cuadráticos [3], y problemas sobre sucesiones de puntos racionales en curvas de Mordell cuyas segundas coordenadas estén en progresión aritmética [4].

References

- [1] J. Brzeziński, *Hilbert's tenth problem and Büchi's sequences*. (Swedish) Normat 60 (2012), no. 2, 52-69, 96.
- [2] N. Garcia-Fritz, *Sequences of powers with second differences equal to two and hyperbolicity*. Accepted for publication in Trans. Amer. Math. Soc.
- [3] E. González-Jiménez, X. Xarles, *On symmetric square values of quadratic polynomials*. Acta Arith. 149 (2011), no. 2, 145-159.
- [4] S. P. Mohanty, *Integer solutions in arithmetic progression for $y^2 - k = x^3$* . Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 36 (1980), no. 3-4, 261-265 (1981).
- [5] P. Vojta, *Diagonal quadratic forms and Hilbert's tenth problem*. Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry (Ghent, 1999), 261-274, Contemp. Math., 270, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

Syzygies: combinatorics and representation theory

STEPHEN GRIFFETH

Abstract

Each projective variety $X \subseteq \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ produces a homogeneous ideal in the polynomial ring $\mathbf{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, and one of the first pieces of information one might ask for is the minimum number of homogeneous polynomials needed to generate it. The next piece of information one might ask for is the relations between those minimal generators, and then the relations between the relations, and so on. Hilbert formalized this process using the notions of higher syzygy (a relation between relations between relations etc...) and minimal free resolution. Even today, the class of projective varieties for which there exists detailed numerical information about the higher syzygies is quite limited. Existing algorithms for treating the general problem quickly become impractical as n grows, even for very simple classes of examples.

In this talk we will explore one very specific class of examples: projective varieties coming from highly symmetric linear subspace arrangements. We now have effective algorithms for the computation of the higher syzygies for this class of examples, and our aim is to explain the connections between this problem, the Littlewood-Richardson rule, the combinatorics of partitions relevant for the modular representation theory of symmetric groups, and unitary representations of rational Cherednik algebras [3]. Parts of this talk are based on joint work with Christine Berkesch-Zamaere, Susanna Fishel, and Steven Sam [1], [2].

References

- [1] C. Berkesch-Zamaere, S. Griffeth, and S. Sam, *Jack polynomials as fractional quantum Hall states and the Betti numbers of the $k + 1$ -equals ideal*, Comm. Math. Phys. 2014, vol. 330, no. 1, p. 415-434.

- [2] S. Fishel and S. Griffeth, *V^* -homology of unitary representations of the type A Cherednik algebra*, in preparation
- [3] S. Griffeth, *Unitary representations of rational Cherednik algebras, II*, arXiv:1106.5094

Randomness and quasi-randomness in Ramsey theory

HIỆP HÀN

Abstract

Ramsey theory is a branch of Discrete Mathematics which concerns with structures which necessarily appear if a large object is colored/partitioned. Cornerstones of the area are for example van der Waerden's theorem and Ramsey's theorem. The former states that if the first n integers are colored with two colors, then there is a monochromatic arithmetic progression of length k , provided $n = n(k)$ is sufficiently large. The latter states that every coloring of the edges of the complete graph on n vertices with two colors yields a monochromatic clique of size k , if $n = n(k)$ is sufficiently large.

Within Ramsey theory probabilistic and quasi-random methods have taken a prominent rôle since the early days. Erdős' probabilistic construction of Ramsey lower bound and applications of quasi-randomness in the seminal works of Roth and of Szemerédi on van der Waerden's theorem define paradigms of the area which remain central up to date.

The aim of this talk is to give an introduction into the area and present selected results, old and new.

Aproximación y grupos algebraicos

GIANCARLO LUCCHINI

Abstract

Dado un sistema de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros, podemos estudiar alternativamente sus soluciones racionales, reales, complejas o incluso módulo algún entero positivo, para luego intentar compararlas. Por ejemplo, dado que los racionales forman un subconjunto denso de los reales, cabe preguntarse si las soluciones racionales del sistema son densas dentro de las soluciones reales. En otras palabras, queremos saber si las soluciones reales son aproximables por soluciones racionales. Preguntas análogas en el mundo de la congruencia módulo llevan a estudiar la densidad en las soluciones “ p -ádicas”.

En esta charla, hablaremos de soluciones reales y p -ádicas de sistemas de ecuaciones, introduciendo debidamente la noción de números p -ádicos como una perfecta analogía de los números reales. Nos concentraremos rápidamente en ecuaciones cuyas soluciones admiten una estructura natural de grupo, definiendo lo que llamamos un “grupo algebraico”. Para este tipo de ecuaciones, la estructura de grupo puede ser usada para reducir ciertos problemas de aproximación a otros más sencillos. Intentaré dar una idea de estos métodos estudiando algunos ejemplos.

CURSILLOS

Fibraciones de Lefschetz

ELIZABETH GASPARIM

Abstract

En primera instancia, vamos a revisar la teoría clásica de fibraciones, haciendo una rápida revisión de variedades, singularidades, fibrados y fibraciones. Luego se presentarán algunos resultados recientes de un trabajo conjunto con L. Grama y L. San Martín, [GGS]. Finalmente se discutirán problemas en abierto. En líneas generales, la organización de las clases y los contenidos serán la siguiente:

- **Clase 1:** *Variedades y singularidades.* Comenzamos con algunas definiciones básicas, luego revisaremos diversos ejemplos de variedades diferenciables reales y complejas, variedades algebraicas y finalmente discutiremos sobre singularidades tanto de aplicaciones como variedades.
- **Clase 2** *Fibrados y fibraciones.* Se darán las definiciones básicas a nivel general, algunos ejemplos y luego nos centraremos específicamente en fibraciones de Lefschetz.
- **Clase 3** *Cohomología y diamantes de Hodge.* Se presentan las cohomologías de de Rham, de Dolbeault, se definen los diamantes de Hodge, presentando sus principales propiedades y por último se discuten algunos resultados recientes y problemas en abierto.

La bibliografía incluye textos clásicos como [GH], [Har] y [OSS], así como otros más técnicos tales como [BCG]. [GGS], [GO].

References

- [BBGGS] Ballico, E.; Barmeer, S.; Gasparim, E.; Grama, L.; San Martín, L.A.B.; *A Lie theoretical construction of a Landau-Ginzburg model without projective mirrors.* arXiv:1610.06965.
- [BCG] Ballico, E.; Callander, B.; Gasparim, E.; *Compactifications of adjoint orbits and their Hodge diamonds*, J. Algebra Appl. **16** (2017) 1–17.
- [GGS] Gasparim, E., Grama, L., San Martín, L. A. B., *Symplectic Lefschetz fibrations on adjoint orbits*, Forum Math. **28** n. 5, (2016) 967–980.
- [GH] Griffiths, P.; Harris, J.; Principles of algebraic geometry. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, Inc., New York, (1994).

- [GO] Gompf, R. *What is a Lefschetz pencil*, Notices of the AMS, **52** n. 8, (2005) 848–850.
- [Har] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York (1977).
- [OSS] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H., *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics **3**, Boston: Birkhäuser (1980).

Local strong decay estimates in some nonlinear dispersive equations with supercritical, modified scattering

CLAUDIO MUÑOZ

Abstract

This mini-course is intended to discuss some new results obtained in collaboration with M. Kowalczyk (U. Chile) and Y. Martel (E. Polytechnique, France) on scattering and decay estimates in some well-known nonlinear dispersive equations with critical or supercritical scattering behavior, and where standard dispersive estimates are not available yet.

In a first lecture, I will introduce the main topics and problems, explain basic linear decay estimates and discuss the current literature in the topic.

In the second lecture, I will show that for a large class of nonlinear wave equations with odd nonlinearities, any globally defined odd solution which is small in the energy space decays to zero in the local energy norm. In particular, this result shows nonexistence of small, odd *breathers* for some classical nonlinear Klein-Gordon equations.

Finally, in a last lecture I will consider a classical equation known as the ϕ^4 model in one space dimension. The *kink* is an explicit, stable stationary solution of this model. In this lecture I will show “asymptotic stability” of the kink for odd perturbations in the energy space.

The proofs that we will discuss are based on Virial-type estimates partly inspired from previous works of Martel-Merle on asymptotic stability of solitons for the generalized Korteweg-de Vries equations, adapted to additional difficulties in the case of general Klein-Gordon equations with potential, that I will try to discuss in some detail. (See the bibliography below and references therein for a more complete literature.)

Tentative schedule:

1. *Lecture 1:* Introduction. Linear dynamics and known decay results in some classical nonlinear dispersive equations.

2. *Lecture 2:* Dynamics and decay around zero backgrounds: nonexistence of breathers in nonlinear wave equations.
3. *Lecture 3:* Dynamics in non-zero backgrounds: kink dynamics in the ϕ^4 model.

References

- [1] M. Kowalczyk, Y. Martel and C. Muñoz, *Kink dynamics in the ϕ^4 model: asymptotic stability for odd perturbations in the energy space*, arXiv:1506.07420, JAMS 30 (2017), 769–798.
- [2] M. Kowalczyk, Y. Martel and C. Muñoz, *Nonexistence of small, odd breathers for a class of nonlinear wave equations*, arXiv:1607.06421, L. Math. Phys. May 2017, Vol. 107, Issue 5, pp. 921–931.

Random growth, random matrices, and the KPZ fixed point

DANIEL REMENIK

Abstract

The *Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) universality class* is a broad class of stochastic models from mathematical physics, including random interface growth, random polymers, interacting particle systems, and random stirred fluids. These models share a very special and rich asymptotic fluctuation behavior, which is very different from the usual Gaussian case, and is loosely characterized by fluctuations which grow like $t^{1/3}$ as time t evolves, decorrelate at a spatial scale of $t^{2/3}$, and have limiting distributions which are connected with *random matrix theory*.

In these lectures I will present recent joint work [2] with K. Matetski and J. Quastel (U. Toronto) where we construct the *KPZ fixed point*, which is the scaling invariant Markov process conjectured to arise as the universal scaling limit of all models in the KPZ universality class, and which contains all the fluctuation behavior seen in the class. The construction follows from an exact solution of one of the basic models in the KPZ class, the *totally asymmetric exclusion process (TASEP)*, for arbitrary initial condition, and the main focus of these lectures will be on explaining the main ingredients and techniques which led to this solution.

Tentative schedule:

The first lecture will be devoted mostly to an introduction to the KPZ universality class and a description of the basic asymptotic fluctuation behavior for models in the class, including their connection with random matrix theory. I will also introduce the KPZ fixed point and describe its main properties.

In the second lecture I will introduce TASEP and explain how it can be solved using the Bethe ansatz from mathematical physics [6] and a representation in terms of non-intersecting paths and biorthogonal ensembles [1, 5].

In the last lecture I will show how this biorthogonal ensemble representation can be fully solved, leading to Fredholm determinant formulas in terms of kernels associated

to certain random walk hitting times, which are natural for the computation of scaling limits and thus lead to formulas for the KPZ fixed point.

Two sets of lecture notes [3, 4] can serve as a good complement to the mini-course.

References

- [1] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto. Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration. *J. Stat. Phys.* 129.5-6 (2007), pp. 1055-1080.
- [2] K. Matetski, J. Quastel and D. Remenik. The KPZ fixed point. arXiv:1701.00018.
- [3] K. Matetski, J. Quastel. From TASEP to the KPZ fixed point. arXiv:1710.02635.
- [4] D. Remenik. Course notes on the KPZ fixed point. <http://www.dim.uchile.cl/~dremenik/KPZFixedPointNotes.pdf>.
- [5] T. Sasamoto. Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate. *J. Phys. A* 38.33 (2005), p. L549.
- [6] G. M. Schätz. Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process. *J. Statist. Phys.* 88.1-2 (1997), pp. 427-445.

SESIONES INVITADAS

Ecuaciones diferenciales parciales

Análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales

A-priori error estimate for a new DG approach applied to Laplace operator

G. BARRENECHEA, T. BARRIOS and R. BUSTINZA

Abstract

In this talk, we discuss the well posedness of a modified LDG scheme of the Poisson problem, considering a dual mixed formulation. The difficulty here relies on the fact that the application of classical Babuška-Brezzi theory is not easy for low order finite elements, so we proceed in a non-standard way. We first prove uniqueness, and then we apply a discrete version of Fredholm's alternative theorem to deduce existence, while the a priori error analysis is done by introducing suitable projections of exact solution. As a result, we prove that the method is convergent, and under suitable regularity assumptions on the exact solution, the optimal rate of convergence is guaranteed. As a particular case we comment our result applied to Darcy flow, where we can establish the well posedness for low order finite elements and the corresponding optimal rate of convergence is established with standard additional regularity assumption of the exact solution.

References

- [1] G. BARRENECHEA, T. P. BARRIOS Y A. WACHTEL, Stabilised finite element methods for a bending moment formulation of the Reissner-Mindlin plate model. *Calcolo*, **vol. 52**, pp. 343-369, (2015).
- [2] T. P. BARRIOS, R. BUSTINZA Y F. SÁNCHEZ, Analysis of DG approximations for Stokes problem based on velocity-pseudostress formulation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **vol. 33, 5**, pp. 1540-1564. (2017).

This research was partially supported CONICYT-Chile through Fondecyt 1160578
Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, Scotland. e-mail: gabriel.barrenechea@strath.ac.uk
Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, e-mail: tomas@ucsc.cl
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, e-mail: rbustinz@ing-mat.udec.cl

An a posteriori error estimate for an augmented pseudostress-velocity mixed FEM formulation for a generalized Stokes problem

TOMÁS P. BARRIOS, ROMMEL BUSTINZA, GALINA C. GARCÍA,
and MARÍA GONZÁLEZ

Abstract

We obtain a new a posteriori error estimator for a stabilized mixed method for the generalized Stokes problem. The stabilized scheme is obtained by adding suitable least squares terms to the dual mixed variational formulation associated to the generalized Stokes problem. Then, in order to approximate its solution using adaptivity of the meshes, we derive a reliable and local efficient a posteriori error estimator of residual type. Specifically, we develop an a posteriori error analysis based on the quasi-Helmholtz decomposition ([3]) which helps us to prove the so called local efficiency of the estimator with non-homogeneous boundary condition. Finally, we present some numerical examples that confirm the theoretical properties of our approach.

References

- [1] T.P. BARRIOS, R. BUSTINZA, G. C. GARCÍA, AND E. HERNÁNDEZ, *On stabilized mixed methods for generalized Stokes problem based on the velocity-pseudostress formulation: A priori error estimates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 237-240, pp. 78-87, (2012).

This research was partially supported CONICYT-Chile through Fondecyt 1160578

Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Casilla 297, Concepción, Chile, email: tomas@ucsc.cl

Departamento de Ingeniería Matemática & Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA), Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, email: rbustinz@ing-mat.udec.cl

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, email: galina.garcia@usach.cl

Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, Campus de Elviña s/n, 15071, A Coruña, Spain, e-mail: maria.gonzalez.taboada@udc.es

- [2] T.P. BARRIOS, R. BUSTINZA, G. C. GARCÍA, AND M. GONZÁLEZ, *An a posteriori error estimator for a new stabilized formulation of the Brinkman problem*. In Book: Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013, (Edited by A. Addulle, S. Deparis, D. Kressner, F. Nobile, M. Picasso), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol 103, pp. 253-261, Springer International Publishing Switzerland. 2015.
- [3] J. M. CASCÓN, R. H. NOCHETTO AND K. G. SIEBERT, *Design and Convergence of AFEM in $H(DIV)$* , Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. vol. 17 (11), pp. 1849 - 1881 , (2007).

Análisis de error a posteriori para problemas temporales mediante esquemas estabilizados de elementos finitos

ESTEBAN CORTÉS SANDOVAL

Abstract

Se desarrolla un análisis *a posteriori* para la ecuación de difusión-convección-reacción no estacionaria mediante esquemas estabilizados de elementos finitos. Dicho análisis se realiza en dos de las normas más usuales en términos de problemas espacio temporales, la norma asociada al espacio $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y la norma usual del espacio $\mathbb{W}(0, T)$, donde la principal diferencia entre ambas es que para el segundo caso la norma espacial corresponde a una norma aumentada que considera la norma dual de la derivada temporal. De esta manera se obtiene en ambos casos, cotas superiores e inferiores garantizadas a través de un estimador de error *a posteriori* completamente computable el cual se descompone en cuatro componentes: una referente al error inicial η_0 , una al error espacial η_h^n , una al error temporal η_t^n y una al error de oscilación η_D^n . Para lo cual se tiene que en ambos casos la cota superior es global en espacio y tiempo, es decir de manera general se tiene que

$$\|e\|_{\Omega \times (0, T)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N ((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2),$$

mientras que la cota inferior es global en espacio y local en tiempo, es decir

$$(\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq C_1 \|e\|_{\Omega \times (t^{n-1}, t^n)}^2 + C_2 (\eta_D^n)^2.$$

La discretización del problema se hace a través del método de las líneas, haciendo uso de un esquema de Galerkin Estabilizado para la discretización de la variable espacial, considerando los esquemas de estabilización SUPG, GLS, ES y CIP, mientras que para la discretización de la variable temporal se hace uso del esquema Backward-Euler. En función del análisis *a posteriori* realizado, se implementa un algoritmo computacional espacio temporal adaptativo. Se presentan resultados numéricos que ilustran la teoría desarrollada y el funcionar de los estimadores de error.

References

- [1] L. Tobiska y R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for stabilized finite element methods. *IMA J. Numer. Anal.*, 35(4):1652-1671, 2015.
- [2] R. Araya y P. Venegas. An a posteriori error estimator for an unsteady advection-diffusion- reaction problem. *Comput. Math. Appl.*, 66(12):2456-2476, 2014. ISSN 0898-1221.
- [3] M. Ainsworth, A. Allendes, G. R. Barrenechea, y R. Rankin. Fully computable a posteriori error bounds for stabilised FEM approximations of convection-reaction-diffusion problems in three dimensions. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 73(9):765-790, 2013.
- [4] A. Allendes, F. Durán, y R. Rankin. Error estimation for low-order adaptive finite element approximations for fluid flow problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, pages 1-33, 2015.
- [5] C. A. Möller. *Adaptive Finite Elements in the Discretization of Parabolic Problems*. Logos Verlag Berlin GmbH, 2010.
- [6] F. Gaspoz, C. Kreuzer, K. Siebert, y D. Ziegler. A convergent time-space adaptive DG(s) finite element method for parabolic problems motivated by equal error distribution. arXiv preprint arXiv:1610.06814, 2016.

A linear Uzawa-type solver for nonlinear transmission problems

THOMAS FÜHRER

Abstract

We propose an Uzawa-type iteration for the Johnson–Nédélec formulation of a Laplace-type transmission problem with possible (strongly monotone) nonlinearity in the interior domain. In each step, we sequentially solve one BEM for the weakly-singular integral equation associated with the Laplace-operator and one FEM for the linear Yukawa equation. In particular, the nonlinearity is only evaluated to build the right-hand side of the Yukawa equation. We prove that the proposed method leads to linear convergence with respect to the number of Uzawa iterations. Moreover, while the current analysis of a direct FEM-BEM discretization of the Johnson–Nédélec formulation requires some restrictions on the ellipticity (resp. strong monotonicity constant) in the interior domain, our Uzawa-type solver avoids such assumptions.

References

- [1] Thomas Führer, Dirk Praetorius: *A linear Uzawa-type solver for nonlinear transmission problems*, [arXiv:1703.10796](#), 2017.

Adaptive finite element methods for sparse PDE–constrained optimization

ALEJANDRO ALLENDES *

FRANCISCO FUICA *

ENRIQUE OTÁROLA

Abstract

We propose and analyze reliable and efficient a posteriori error estimators for an optimal control problem that involves a nondifferentiable cost functional; control constraints are also considered. To approximate the solutions to the state and adjoint equations we consider piecewise linear discretizations whereas two different strategies are used to approximate the control variable: piecewise constant and piecewise linear discretizations. For both solution techniques we devise an error estimator that can be decomposed as the sum of four contributions: two contributions that account for the discretization of the control variable and the associated subgradient, and two contributions related to the discretization of the state and adjoint equations. On the basis of the devised a posteriori error estimators, we design simple adaptive strategies that yield optimal rates of convergence for the numerical examples that we perform.

References

- [1] A. Allendes, F. Fuica, and E. Otárola, *Adaptive finite element methods for sparse PDE–constrained optimization*, submitted.
- [2] E. Casas, R. Herzog, and G. Wachsmuth, *Approximation of sparse controls in semilinear equations by piecewise linear functions*, Numerische Mathematik, 122 (2012), pp. 645–669.
- [3] G. Stadler, *Elliptic optimal control problems with L^1 –control cost and applications for the placement of control devices*, Comput. Optim. Appl., 44 (2009), pp. 159–181.

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, e-mail: francisco.fuica@sansano.usm.cl

- [4] G. Wachsmuth and D. Wachsmuth, *Convergence and regularization results for optimal control problems with sparsity functional*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 17 (2011), pp. 858-886.

Mixed-primal finite element methods for stress-assisted diffusion problems

GABRIEL N. GATICA BRYAN GOMEZ-VARGAS RICARDO RUIZ-BAIER

Abstract

We analyse the solvability of a static coupled system of PDEs describing the diffusion of a solute into an elastic material, where the process is affected by the stresses generated by the solid motion. The problem is formulated in terms of solid stress, rotation tensor, solid displacement, and concentration of the solute. Existence and uniqueness of weak solutions follow from adapting a fixed-point strategy decoupling linear elasticity from a generalised Poisson equation. We then construct mixed-primal and augmented mixed-primal Galerkin discretisations based on adequate finite element spaces, for which we rigorously derive a priori error bounds. The convergence of these methods is confirmed through a set of computational tests in 2D and 3D.

References

- [1] E.C. AIFANTIS, *On the problem of diffusion in solids*. Acta Mech. 37 (1980), 265–296.
- [2] M. ÁLVAREZ, G.N. GATICA, AND R. RUIZ-BAIER, *An augmented mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem*. ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 49(5) (2015), 1399–1427.
- [3] D.N. ARNOLD, F. BREZZI, AND J. DOUGLAS, *PEERS: A new mixed finite element method for plane elasticity*. Jpn J. Appl. Math. 1 (1984), 347–367.

CI²MA and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, email: ggatica@ci2ma.udec.cl.

Sección de Matemática, Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica. Present address: CI²MA and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, email: bryan.gomezvargas@ucr.ac.cr.

Mathematical Institute, Oxford University, Andrew Wiles Building, Woodstock Road, Oxford, UK, email: ruizbaier@maths.ox.ac.uk.

- [4] C. BACUTA AND J.H. BRAMBLE, *Regularity estimates for solutions of the equations of linear elasticity in convex plane polygonal domains*, *Special issue dedicated to Lawrence E. Payne*. Z. Angew. Math. Phys. 54(5) (2003), 874–878.
- [5] G.N. GATICA, A. MARQUEZ, AND S. MEDDAHI, *An augmented mixed finite element method for 3D linear elasticity problems*. J. Comput. Appl. Math. 231(2) (2009), 526–540.
- [6] C. CHERUBINI, S. FILIPPI, A. GIZZI, AND R. RUIZ-BAIER, *A note on stress-driven anisotropic diffusion and its role in active deformable media*. J.Theoret. Biol. 430(7) (2017), 221–228.
- [7] P. GRISVARD, *Smoothness of the solution of a monotonic boundary value problem for a second order elliptic equation in a general convex domain*, *Lecture Notes in Math* 564, Springer-Verlag (1976), 135–151.
- [8] M. LEWICKA AND P.B. MUCHA, *A local and global well-posedness results for the general stress-assisted diffusion systems*. J. Elast. 123(1) (2016), 19–41.

A DPG method for the Kirchhoff–Love plate bending model

THOMAS FÜHRER *and* NORBERT HEUER *and* ANTTI H. NIEMI

Abstract

We present an ultraweak variational formulation for a variant of the Kirchhoff–Love plate bending model. Based on this formulation, we introduce a discretization of the discontinuous Petrov–Galerkin type with optimal test functions (DPG). This scheme is well posed and converges quasi-optimally.

The variational formulation and its analysis require tools that control traces and jumps in H^2 (standard Sobolev space of scalar functions) and $H(\operatorname{div} \operatorname{Div})$ (symmetric tensor functions with L_2 -components whose twice iterated divergence is in L_2), and their dualities. These tools are developed in two and three spatial dimensions.

Theoretical results are confirmed by numerical experiments.

Variational formulation of time-fractional parabolic equations

MICHAEL KARKULIK

Abstract

We consider initial/boundary value problems for time-fractional parabolic PDE of order $1/2 < \alpha < 1$, that is, $\partial_t^\alpha u - \Delta u = f$ where ∂_t^α is a fractional time-derivative. Equations of this kind model diffusion phenomena where the mean-square displacement of a diffusing particle scales non-linear in time (as opposed to e.g., the well-known Brownian motion). Recently, researchers have started to analyze finite element methods with respect to their ability to approximate solutions of fractional PDE. In our talk, based on the work [1], we present a variational formulation of time-fractional parabolic equations which resembles classical results for parabolic PDE. This includes the extension of operators defined on real-valued Sobolev spaces to their Banach space-valued counterparts, the so-called *Sobolev-Bochner spaces*, as well as Sobolev Embedding results. This way, we provide a theoretical underpinning for the numerical analysis of such equations.

Key words: Fractional diffusion, Initial/boundary value problem, Well-posedness

Mathematics subject classifications (1991): 26A33, 35K15, 35R11

References

- [1] M. KARKULIK, *Variational formulation of time-fractional parabolic equations*. arXiv:1704.03257, submitted.

This work was supported by CONICYT-Chile through the project FONDECYT 1170672.
Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.

Un método de elementos finitos estabilizados de bajo orden a divergencia nula para el problema de Boussinesq estacionario

ALEJANDRO ALLENDES, GABRIEL R. BARRENECHEA, CÉSAR NARANJO

Abstract

En este trabajo proponemos y analizamos un nuevo método de elementos finitos estabilizados para las ecuaciones de Navier-Stokes y temperatura acopladas (o ecuaciones de Boussinesq). El método es construido usando elementos conformes de bajo orden para la velocidad y temperatura, y elementos constantes a trozos para la presión. Con la ayuda del espacio de Raviart–Thomas de más bajo orden, se construye una extensión de los saltos de la presión discreta, de tal manera que cuando esta extensión es añadida al campo de velocidad conforme, la velocidad resultante es solenoidal (con el costo de ser no conforme). Este campo es entonces el que alimenta las ecuaciones de momento y temperatura, garantizando que los términos convectivos en estas ecuaciones son antisimétricos, sin la necesidad de ser alterados, simplificando así el análisis del método resultante. La existencia de soluciones, estabilidad discreta, y convergencia óptima es probada tanto para el campo de velocidad conforme, como para la correspondiente contraparte a divergencia nula no conforme. Resultados numéricos confirman los resultados teóricos, así también como la ganancia que entrega la velocidad solenoidal discreta por sobre la velocidad conforme.

References

- [1] Gabriel R. Barrenechea and Frédéric Valentin. Consistent local projection stabilized finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(5):1801-1825, 2010.

AM2V and Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile , e-mail: alejandro.allendes@usm.cl

Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, 26 Richmond Street, Glasgow G1 1XH, Scotland , e-mail: gabriel.barrenechea@strath.ac.uk

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile , e-mail: cesar.naranjo@alumnos.usm.cl

- [2] Sebastián A. Lorca and José Luiz Boldrini. Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Differential Equations*, 124(2):389-406, 1996.
- [3] Ricardo Oyarzúa, Tong Qin, and Dominik Schatzau. An exactly divergence-free finite element method for a generalized Boussinesq problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 34(3):1104-1135, 2014.

A stabilised finite element method for the convection–diffusion–reaction equation in mixed form

ABNER H. POZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA APLICADAS,
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN,
CONCEPCIÓN - CHILE

Abstract

This work is devoted to the approximation of the convection–diffusion–reaction equation using a mixed, first order, formulation. We propose, and analyse, a stabilised finite element method that allows equal order interpolations for the primal and dual variables. This formulation, reminiscent of the Galerkin least-squares method, is proven stable and convergent. In addition, a numerical assessment of the numerical performance of different stabilised finite element methods for the mixed formulation is carried out, and the different methods are compared in terms of accuracy, stability, and sharpness of the layers for two different classical test problems.

Joint work with:

Gabriel R. Barrenechea, Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Scotland, UK

e-mail: gabriel.barrenechea@strath.ac.uk

Heather Yorston, Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Scotland, UK

e-mail: heather.yorston@strath.ac.uk

This research was partially supported by Dirección de Investigación e Innovación, Universidad Católica de la Santísima Concepción through project DINREG 04/2017, e-mail: apoza@ucsc.cl

References

- [1] A. ERN; J.-L. GUERMOND, *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, (2004).
- [2] A. MASUD; J. KWACK, *A stabilized mixed finite element method for the first-order form of advection-diffusion equation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, (2008). 1321-1348.

An a posteriori error estimator for the MHM method applied to Stokes/Brinkman equations

RODOLFO ARAYA *and* RAMIRO REBOLLEDO *and* FRÉDÉRIC VALENTIN

Abstract

In this work we introduce and analyze an a posteriori error estimator for the Multiscale Hybrid-Mixed (MHM) method, introduced in [1], applied to Stokes and Brinkman equations.

The error estimator is based on face-residual computations using the second level numerical solution obtained with the MHM method. We prove that this error estimator is locally efficient and reliable, up to a high order term, with respect to natural norms.

We also show that the h.o.t. appearing in the reliability analysis can be neglected in a general computation, if we use a local refined mesh for the second level computations.

We provide several numerical results illustrating the good performance of the estimator, and showing the behavior of the associated adaptive algorithm.

References

- [1] R. Araya, C. Harder, A. Poza and F. Valentin: *Multiscale hybrid-mixed method for the Stokes and Brinkman equations - The method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 324, pp. 29-53, (2017).
- [2] R. Araya, R. Rebolledo and F. Valentin: *Multiscale Hybrid-Mixed method for the Stokes and Brinkman equations - The a posteriori error analysis*. (In preparation)

Departamento de Ingeniería Matemática and CI²MA , Universidad de Concepción. e-mail: `rodolfo.araya@udec.cl`

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción. e-mail: `rrebolledo@ing-mat.udec.cl`

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) Petrópolis - RJ, Brasil. e-mail: `valentin@lncc.br`

On exponential stability for thermoelastic plates – a comparison of different models

MAURICIO SEPÚLVEDA C.

Joint work with

J.E. MUÑOZ RIVERA (*LNCC, Petrópolis, Brasil*),

R. RACKE, (*Univesrität Konstanz*) and

O. VERA VILLAGRÁN (*Universidad del Bio-Bio, Chile*)

Abstract

We consider different models of thermoelastic plates in a bounded reference configuration: with Fourier heat conduction or with the Cattaneo model, and with or without inertial term. Some models exhibit exponential stability, others are not exponential stable. In the cases of exponential stability, we give an explicit estimate for the rate of decay in terms of the essential parameters appearing (delay $\tau \geq 0$, inertial constant $\mu \geq 0$). This is first done using multiplier methods directly in L^2 -spaces, then, second, with eigenfunction expansions imitating Fourier transform techniques used for related Cauchy problems. The explicit estimates allow for a comparison. The singular limits $\tau \rightarrow 0$, and $\mu \rightarrow 0$ are also investigated in order to understand the mutual relevance for the (non-) exponential stability of the models. Numerical simulations underline the results obtained analytically, and exhibit interesting coincidences of analytical and numerical estimates, respectively.

References

- [1] Muñoz Rivera, J.E., Racke, R.: Large solutions and smoothing properties for nonlinear thermoelastic systems. *J. Differential Equations* **127** (1996), 454–483.

This work was partially supported by Fondecyt 1140676, CONICYT-Chile through BASAL project CMM, Universidad de Chile; and by Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA), Universidad de Concepción.

CI²MA and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, e-mail: `msepulveda@ci2ma.udec.cl`

- [2] Racke, R., Ueda, Y.: Dissipative structures for thermoelastic plate equations in $\mathbb{R}^n$. *Adv. Differential Equations* **21** (2016), 601–630.

Modelos matemáticos de sistemas biológicos

Minimización de las pérdidas futuras en una granja de producción animal, afectada por una enfermedad que es controlada por hospitalización impulsiva

MÓNICA ACEVEDO-LETELIER, KARINA VILCHES-PONCE Y ALEJANDRO ROJAS-PA

Abstract

En este trabajo nos proponemos estudiar un modelo de hospitalización impulsiva de tipo SIS con el objetivo de optimizar las utilidades futuras en un sistema agrícola ganadero. Una hospitalización impulsiva es entendida como una secuencia de cuarentenas parciales rotativas, donde una fracción de los infectados se aísla para recibir atención especial y tratar la enfermedad. Se formula un funcional del valor actual de las pérdidas de utilidades futuras debido a la enfermedad, el cual nos proponemos minimizar.

References

- [1] F. Córdova, G. Robledo, M.E. Solis, Pulse hospitalization to control SIS diseases on farms: economics effects, Journal of Biological Systems, Vol. 24, Nos. 2&3, 311-331, 2016.
- [2] S. Gao, H. Yuying, L. Chen, An modelo epidemia con impulsos para el control de plagas, Appl Matemáticas Comp 219: 4308 a 4321, 2013.
- [3] F. Córdova, G. Robledo, R. Valle, A pulse vaccination strategy at variable times depending on incidence, Journal of Biological Systems, 19(02), 329-344, 2011.
- [4] B. Shulgin, L. Stone, Z. Agur , Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model, Bulletin of mathematical biology, 60(6), 1123-1148, 1998.
- [5] A. A. Dijkhuizen, R. B. M Huirne, A. W. Jalvingh, Economic analysis of animal diseases and their control, Preventive Veterinary Medicine, 25(2), 135-149, 1995.

Un Modelo de Dinámica Poblacional con Efecto Allee e Inmigración Estocástica

GUSTAVO OSSANDO ARAYA & RICARDO CASTRO SANTIS

Abstract

En el modelo presentado, se considera una población cuya dinámica presenta efecto Allee fuerte, es decir la población tiende a desaparecer si el número de individuos desciende de una cantidad límite, pero al mismo tiempo la población recibe una continua inmigración. Se considerará que la tasa de migración es una variable aleatoria dependiente del tamaño poblacional de forma tal que no supere la capacidad disponible en el medio, en términos matemáticos se puede escribir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - A) + \xi_x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde r , K y A son parámetros del modelo y x_0 es la población inicial.

La función ξ_x es una variable aleatoria con rango en el intervalo $\left[0, \frac{\alpha}{K}(K - x)\right]$, con $0 \leq x \leq K$. El parámetro α , en tal sentido, representa la tasa máxima de inmigración.

References

- [1] Petrovskii, S., & Li, B. L. (2003). An exactly solvable model of population dynamics with density-dependent migrations and the Allee effect. *Mathematical biosciences*, 186(1), 79-91.
- [2] Menéndez, R., Gutiérrez, D., & Thomas, C. D. (2002). Migration and Allee effects in the six-spot burnet moth *Zygaena filipendulae*. *Ecological Entomology*, 27(3), 317-325.

- [3] Ackleh, A. S., Allen, L. J., & Carter, J. (2007). Establishing a beachhead: a stochastic population model with an Allee effect applied to species invasion. *Theoretical Population Biology*, 71(3), 290-300.

Dinámicas en el modelo de depredación de May-Holling-Tanner, considerando interferencia entre los depredadores

ADRIÁN CECCONATO Y EDUARDO GONZÁLEZ OLIVARES

Abstract

En este trabajo se ha estudiado un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower [1] [3] [4], con respuesta funcional hiperbólica de los depredadores (un caso especial de las del tipo Holling II)[7]; considerando la interferencia entre los depredadores al realizar la captura de las presas [2] [5]. El modelo de May-Holling-Tanner [6] es descrito por el siguiente sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de tipo Kolmogorov [2]:

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{qx}{x+a} y^p \\ \frac{dy}{dt} &= s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y \end{cases} \quad (1)$$

Donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores respectivamente para $t \geq 0$ (medidos en cantidad de individuos, biomasa o densidad por unidad de área o volumen); los parámetros, con distintos significados ecológicos, son todos positivos con $\mu = (r, K, q, a, s, n, p) \in \mathbb{R}_+^6 \times (0, 1)$. En particular, la interferencia entre los depredadores es descrita por el parámetro p .

Entre los principales resultados obtenidos, se ha probado la existencia de una región de invarianza y se ha demostrado que todas las soluciones son acotadas. Posteriormente se ha efectuado el estudio cualitativo de algunos de los puntos de equilibrio del sistema, probando que $(1, 0)$ y $(0, 0)$ son equilibrios no hiperbólicos, cuya clasificación depende del valor de los parámetros que miden la interferencia entre depredadores y de las tasas de crecimiento de la presa y de mortalidad del depredador.

Se ha probado la existencia de al menos una singularidad en el interior del primer cuadrante, y en el estudio de un caso particular, se ha mostrado la ocurrencia de bifurcaciones de Hopf y bifurcaciones silla-nodo. También se ha mostrado a través de simulaciones, valores de los parámetros para los cuales el sistema tiene un ciclo límite; dos ciclos límites, y la no existencia de ciclos límites. Las simulaciones han permitido identificar subconjuntos de parámetros que permiten describir la mayoría de las dinámicas que exhibe el caso particular estudiado.

References

- [1] Aguirre,P; González Olivares, E and Sáez, E. 2009 Three limit cycles in a Leslie-Gower predator prey model with additive Allee effect. SIAM Journal on Applied Mathematics. 69(5) 1244-1269.
- [2] Freedman, H. I. 1980. Deterministic mathematical model in population ecology. Nueva York. Marcel Dekker.
- [3] González-Olivares, E., Mena-Lorca, J., Rojas-Palma, A and Flores, J. D. 2011. Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey. Applied Mathematical Modelling 35 366-381.
- [4] González-Yañez, B., González-Olivares, E. and Mena-Lorca, J. 2006. Multistability on a Leslie-Gower type predator-prey model with non-monotonic functional response. BIOMAT. International Symposium on Mathematical and Computational Biology R. Mondaini and R. Dilao (Eds). 359-384.
- [5] Liu, J. 2013. Qualitative analysis of a Holling-Tanner predator-prey model with mutual interference. Applied Mathematics and Computation. 219 5283-5289.
- [6] Sáez, E and González-Olivares, E. 1999. Dynamics on a predator-prey model. SIAM Journal of Applied Mathematics 59(5). 1867-1878.
- [7] Turchin, P. 1957. Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis. New Jersey. Monographs in Population Biology 35

A qualitative analysis for a harvesting model of small pelagic fish with bounded fishing effort

ERICA CRUZ, HÉCTOR RAMÍREZ, OLGA VASILIEVA

Abstract

The evolution of fish stock $x(t)$ (biomass) associated with the pelagic fish can be described by

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= F(x(t)) - h(t), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0, \quad x_0 > 0, \end{cases}$$

where F is the biological growth function assumed to be strictly concave and twice differentiable such that $F(0) = F(K) = 0$; $F(x) > 0$ for all $x \in (0, K)$ ($K \gg 0$ is known as the carrying capacity) and h corresponds to harvesting function which is proposed in form of Cobb-Douglas function with $0 \leq \beta < 1$ given by

$$h(t) = Nu(t)x^\beta(t).$$

Here N is the number of fishing units (vessels) and $u(t)$ stands for the fishing effort policy (single input or control variable) that includes labor, capital, maintenance, etc. measured in fixed proportions for each vessel. In this model, we are setting constant marginal productivity of additional fishing effort units, while $0 \leq \beta < 1$ indicates the sensitivity of additional catch yield to marginal changes in the fish stock level.

Pedro Gajardo, Julio Peña and Héctor Ramírez [1] considered a non-linear harvesting function of Cobb-Douglas type $h_1(x, u) = u^\alpha x^\beta$ with $\alpha + \beta = 1$ represents the over-all fishing effort while x stands for the available fishing stock. We point out that this type of nonlinear harvesting function h_1 is used to assure that the marginal catch of pelagic species does not react in linear way to changes in stock level, in contrast with traditional fishery models.

In this work, we follow the main idea of Gajardo et al (2011) by considering a nonlinear harvesting function with constant marginal productivity of additional fishing units ($\alpha = 1, 0 \leq \beta < 1$). Our principal interest consists in finding an optimal fishing effort leading to stationary solutions under possible occurrence of fishing collapse ($\beta \rightarrow 0^+$) and thus to avoid the species extinction.

References

- [1] P. Gajardo, J. Peña-Torres, H. Ramírez. *Harvesting economic models and catch-to-biomass dependence: the case of small pelagic fish*, Natural Resource Modeling, vol. 24, (2), (2011), 268–296.

Modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional no-monotónica racional

Paulo Cesar Tintinago-Ruiz, Lina Maria Gallego-Berrío, Eduardo González-Olivares

Abstract

En este trabajo se estudia un modelo de depredación tiempo continuo de tipo Leslie-Gower [5, 8, 13], considerando que:

- i) la respuesta funcional es no-monotónica o Holling tipo IV [12], y
- ii) los depredadores disponen de un alimento alternativo.

Estos modelos no se ajustan al esquema del modelo propuesto por Vito Volterra en 1925 [13]; se caracterizan porque la tasa de crecimiento de los depredadores es del tipo logístico, donde la capacidad de soporte del medio ambiente (environmental carrying capacity) Ky es una función de la cantidad de presas x [7], esto es, dependiente de los recursos disponibles [13].

Usualmente se asume que $Ky = K(x) = nx$, es decir es proporcional a la abundancia de presas [7], tal como es considerada en el modelo de May-Holling-Tanner [1, 11].

La respuesta funcional del depredador es asumida como una función no-monotónica respecto a la densidad de presas [4, 14, 16], considerando que existe un tipo de comportamiento antidepredatorio (APB), llamado formación de *grupos de defensa* [4, 12, 15]. Este término se refiere a la disminución de la depredación debido a la habilidad de las presas para defenderse mejor cuando su aumenta su tamaño poblacional [6, 9, 10].

El modelo de depredación que analizamos es descrito por el sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov [3]

$$X_\eta : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qxy}{x^2 + bx + a} \right) x \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx + c} \right) y \end{cases} \quad (1)$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representan los tamaños poblacionales de presas y depredadores, respectivamente para $t \geq 0$, medidos en cantidad de individuos, densidad

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Depto. de Matemáticas, Universidad del Quindío, Armenia, Quindío, Colombia.
e-mail: tinti27@gmail.com, linag@uniquindio.edu.co, ejgonzal@ucv.cl

por unidad de área o volumen o biomasa; los parámetros son todos positivos, i.e., $\eta = (r, K, q, a, b, s, n, c) \in \mathbb{R}_+^8$ y tienen diferentes significados ecológicos.

El sistema (1) o campo de vectores X_η está definido en:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

Los puntos de equilibrio del campo X_μ son $(0, 0)$, $(K, 0)$ y aquellos que satisfacen las ecuaciones de las isoclinas $y = nx + c$ e $y = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x^2 + bx + a)$, es decir, las absisas de los puntos de equilibrio positivos satisfacen la ecuación:

$$p(u) = rx^3 - r(K - b)x^2 + (ar - Kbr + Knq)x - K(ar - cq) = 0$$

la cual puede tener hasta 3 raíces reales positivas, i.e., el sistema puede tener hasta 3 singularidades positivas.

Obtenemos condiciones en el espacio de parámetros para la existencia y naturaleza de estos puntos de equilibrio. Determinamos la existencia de una región de invarianza y probamos que las soluciones son acotadas; así mismo demostramos la existencia de al menos un ciclo límite y de una curva separatriz Σ [2], que divide el comportamiento de las trayectorias en el plano de fase.

References

- [1] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical System. Differential equations, maps and chaotic behaviour*, Chapman and Hall, 1992.
- [2] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics 34, Springer, 1999.
- [3] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Model in Population Ecology*, Marcel Dekker, New York, 1980.
- [4] H. I. Freedman and G. S. K. Wolkowicz, Predator-prey systems with group defence: The paradox of enrichment revisited. *Bulletin of Mathematical Biology* Vol 8 No. 5/6, pp 493-508, 1986.
- [5] E. González-Olivares, P. Tintinago-Ruiz and A. Rojas Palma, A Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid functional response, *International Journal of Computer Mathematics* 93(9) (2015) 1895-1909.
- [6] E. González-Olivares, B. González-Yañez, J. Mena-Lorca and J. D. Flores, Uniqueness of limit cycles and multiple attractors in a Gause-type predator-prey model with non-monotonic functional response and Allee effect on prey, *Mathematical Biosciences and Engineering* 10 (2013) 345-367.
- [7] P. H. Leslie and J. C. Gower, The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, *Biometrika* 47 (1960) 219-234.

- [8] R. M. May, Stability and complexity in model ecosystems (2nd edition), Princeton University Press (2001).
- [9] A. Rojas-Palma and E. González-Olivares, Gause type predator-prey models with a generalized rational non-monotonic functional response, In J. Vigo-Aguiar (Ed.) *Proceedings of the 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2014* Volume 4 (2014) 1092-1103.
- [10] S. Ruan and D. Xiao, Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 61, No 4 pp. 1445-1472, 2001.
- [11] E. Sáez and E. González-Olivares. Dynamics on a Predator-prey Model. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 59 (1999) 1867-1878.
- [12] R. J. Taylor, Predation, Chapman and Hall, 1984.
- [13] P. Turchin, *Complex populations dynamics: A theoretical/empirical synthesis*, Princeton University Press, 2003.
- [14] G. S. W. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator-prey system involving group defense, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 48 No. 3 pp. 592-606, 1988.
- [15] D. Xiao and S. Ruan, Bifurcations in a predator-prey system with group defense, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 11, No. 8, pp. 2123-2131, 2001.
- [16] H. Zhu, S.A. Campbell and G. S. K. Wolkowicz. Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 63, No. 2, pp. 636-682, 2002...

Interaction between infectious diseases with two susceptibility levels. A mathematical model.

J.P. GUTIÉRREZ-JARA - F. CÓRDOVA-LEPE - M.T. MUÑOZ-QUEZADA

Abstract

An epidemiological model that considers a population affected by two infectious diseases, both type SIS, is presented. For each disease the individuals can be in two conditions of susceptibility, one of greater degree than the other. The novelty of the model is introduced by assuming that: (a) If an individual becomes infected by one of the affections, regarding the other disease, he/she increases his/her susceptibility level. (b) An individual is placed at a lower level of susceptibility, with respect to a disease, when it recovers from it. The work presents a model through a coupled system of ordinary differential equations. The study of the dynamic behavior of the solutions is done through numerical simulations.

References

- [1] B. P. Simmons, M. S. Gelfand, Herpes simplex virus, *Infection Control* 7(7) (2015) 380–383.
- [2] B. Foxman, Urinary tract infection syndromes: Occurrence, recurrence, bacteriology, risk factors, and disease burden, *Infect. Dis. Clin. N. Am.* 28(30)(2014) 1–13.
- [3] C. Alveya, Z. Fenga, J. Glasser, A model for the coupled disease dynamics of HIV and HSV-2 with mixing among and between genders, *Mathematical Biosciences* 265 (2015) 82–100.
- [4] I. Dorigatti, A. Pugliese, Analysis of a vaccine model with cross-immunity: When can two competing infectious strains coexist?, *Mathematical Biosciences* 234 (2011) 33–46.

Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, FONDECYT 11150784, e-mail: jpgutie23@gmail.com

- [5] J. Evertsen, D. Baumgardner, A. Regnery, I. Banerjee, Diagnosis and management of pneumonia and bronchitis in outpatient primary care practices, *Prim Care Respir J.* 19 (2010) 237–241.
- [6] G. Kudesia, T. Wreghitt, Influenza viruses, In *Clinical and Diagnostic Virology Cambridge Clinical Guides* (2009) 69–72.
- [7] N. F. Britton, *Essential mathematical biology*, Springer undergraduate mathematics series, 2003.
- [8] N. González Morales, M. Núñez-López, J. Ramos-Castañeda, J. Velasco-Hernández, Transmission dynamics of two dengue serotypes with vaccination scenarios, *Mathematical Biosciences* 287 (2017) 54–71.
- [9] O. Diekmann, H. Heesterbeek, T. Britton, *Mathematical tools for understanding infectious diseases dynamics*, Princeton series in theoretical and computational biology, 2000.
- [10] O. Prosper, M. Martcheva, Impact of enhanced malaria control on the competition between *Plasmodium falciparum* and *Plasmodium vivax* in India, *Mathematical Biosciences* 242 (2013) 33–50.
- [11] P. Poole, M. Hobbs, *Acute bronchitis and acute exacerbations of chronic airways disease*, Clinical Infectious Disease Cambridge University Press. (2015) 193–198.
- [12] P. van den Driessche, J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences* 180 (2002) 29–48.
- [13] T. Principi, A. Coates, P. Parkin, D. Stephens, et al., Lo039: The effect of desaturations on subsequent medical visits in infants discharged from the emergency department with bronchiolitis, *CJEM* 18(S1) (2016) S43–S43.

Stability Analysis of a Mathematical Model of a Chain of Chemostats in Series with Delay

GONZALO ROBLEDO

Abstract

We study the system of nonlinear differential delay equations

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) &= D[s^0 - s_1(t)] - \mu_1(s_1(t))x_{11}(t), \\ \dot{x}_{11}(t) &= x_{11}(t)\mu_1(s_1(t-\tau)) - Dx_{11}(t), \\ \dot{s}_2(t) &= D[s_1(t) - s_2(t)] - \mu_1(s_2(t))x_{12}(t) - \mu_2(s_2(t))x_{22}(t), \\ \dot{x}_{12}(t) &= x_{12}(t)\mu_1(s_2(t-\tau)) + D[x_{11}(t) - x_{12}(t)], \\ \dot{x}_{22}(t) &= x_{22}(t)\mu_2(s_2(t-\tau)) - Dx_{22}(t), \end{cases} \quad (1)$$

that describes a model of a chain of two chemostats, where one contains two microbial species in competition for a single nutrient and receives an external input of the less advantaged competitor, which is cultivated in an external chemostat. We obtain sufficient conditions ensuring the coexistence of all the species in competition, summarized by upper delay bounds.

References

- [1] M. Malisoff and F. Mazenc. *Constructions of Strict Lyapunov Functions*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag London Ltd., London, UK, 2009.
- [2] F. Mazenc, M. Malisoff, and G. Robledo. "Stability and robustness analysis for a multi-species chemostat model with uncertainties," in Proceedings of the 2017 American Control Conference (Seattle, WA, 24-26 May 2017), pp. 2130-2134.
- [3] H. Smith and P. Waltman. *The Theory of the Chemostat. Dynamics of Microbial Competition*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

Hacia un modelo de competencia para organismos ectotermos y cambio climático

VÍCTOR SALDAÑA NÚÑEZ

Abstract

Consideramos un modelo de interacción competitiva de dos especies tipo Lotka-Volterra, en el cual los coeficientes de competencia de ambas poblaciones (en este caso) son funciones periódicas a pedazos (curvas de rendimiento), con la idea de incorporar variabilidad tanto en la expresión temporal como en intensidad en ellos. La hipótesis es que esta variabilidad puede romper el comportamiento asintótico que el principio de exclusión competitiva predetermina, enriqueciendo las posibilidades dinámicas.

El escenario a considerar es que la interacción se da entre organismos ectotermos. Se pretende considerar en el sistema variabilidad en temperatura (bajo la hipótesis de cambio climático) a través de la incorporación de ambas curvas de rendimiento (fitness versus temperatura). Lo mencionado anteriormente se puede ver en tres escenarios: (a) Cambio en la media de temperatura y desviación nula. (b) Temperatura constante y desviación no nula. (c) Variación en temperatura y desviación.

También cabe mencionar que se realizarán simulaciones en el programa R inicialmente, para posteriormente realizar un análisis de los escenarios presentados en estas.

References

- [1] Raymond B. Huey et al., *Predicting organismal vulnerability to climate warming: roles of behaviour, physiology and adaptation*, Philosophical transactions of the royal society, 2012.
- [2] Sergio A. Estay, Mauricio Lima and Francisco Bozinovic, *The role of temperature variability on insect performance and population dynamics in a warming world*, Forum, 2013.

Global stability of bidirectional associative memory neural networks with piecewise constant arguments

KUO-SHOU CHIU AND FERNANDO CÓRDOVA-LEPE

Abstract

The bidirectional associative memory (BAM) neural networks model, known as an extension of the unidirectional autoassociator of Hopfield [5], was first introduced by Kosko [6, 7]. It is a special class of recurrent neural networks that can store and bipolar vector pairs. The BAM network is composed of neurons arranged in two layers, the X-layer and the Y-layer. The neurons in one layer are fully interconnected to the neurons in the other layer, while there are no interconnect among neurons in the same layer. Through iterations of forward and backward information flows between the two layer, it performs a two-way associative search for stored bipolar vector pairs. As is well known, both in biological and man-made neural networks, the delays arise because of the processing of information. More specifically, in the electronic implementation of analog neural networks, the delays occur in the communication and response of neurons owing to the finite switching speed of amplifiers. Thus, study of neural dynamics with consideration of the delayed problem becomes more important to manufacture high quality neural networks. There exist some results of stability for the delayed BAM, we refer to Refs. [8, 9]. The use of constant fixed delays in models of delayed feedback provides of a good approximation in simple circuits consisting of a small number of cells. Neural networks usually have a spatial extent due to the presence of a multitude of parallel pathways with a variety of axon sizes and lengths. Therefore there will be a distribution of conduction velocities along these pathways and a distribution of propagation be modeled with discrete delays and a more appropriate way is to incorporate continuously distributed delays. To the best of my knowledge, few authors [8, 10] have discussed global stability for the BAM networks with continuously distributed delays.

To the best of our knowledge, neural network with piecewise constant argument has been developed by few authors, for example, [1, 2, 3, 4].

In this talk, a model describing dynamics of bidirectional associative memory (BAM) neural networks with piecewise constant arguments is considered.

Existence and uniqueness of the equilibrium point under more general conditions are also established. Further, we give sufficient criteria of global asymptotic stability (GAS) and uniform stability (US) of an equilibrium point. These criteria can be applied to design globally stable networks and thus have important significance in both theory and applications.

References

- [1] M. U. Akhmet, Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models, Atlantis Press, Paris, 2011.
- [2] K.-S. CHIU, M. PINTO AND J.-CH. JENG. *Existence and global convergence of periodic solutions in recurrent neural network models with a general piecewise alternately advanced and retarded argument*, Acta Appl. Math. 133 (2014), 133–152.
- [3] K.-S. CHIU. *Existence and global exponential stability of equilibrium for impulsive cellular neural network models with piecewise alternately advanced and retarded argument*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 196139, 13 pages, 2013. doi:10.1155/2013/196139
- [4] K.-S. CHIU. *Exponential stability and periodic solutions of impulsive neural network models with piecewise constant argument*, Acta Applicandae Mathematicae 151 (2017), 199–226.
- [5] J. HOPFIELD. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 81 (1984), 3088–3092.
- [6] B. KOSKO. *Adaptive bidirectional associative memories*, Appl. Opt. 26 (1987), 4947–4960.
- [7] B. KOSKO. *Bidirectional associative memories*, IEEE Trans. Systems Man Cybernet., 18 (1988), 49–60.
- [8] K. GOPALSAMY, X.Z. HE. *Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks*, IEEE Trans. Neural Networks 5 (1994), 998–1002.
- [9] V. SREE HARI RAO, BH.R.M. PHANEENDRA, V. PRAMEELA. *dynamics of bidirectional associative memory networks with transmission delays*, Differential Equations Dynam. Systems 4 (1996) 453–471.
- [10] V. SREE HARI RAO, BH.R.M. PHANEENDRA, V. PRAMEELA. *Global dynamics of bidirectional associative memory neural networks involving transmission delays and dead zones*, Neural Networks 12 (1999), 455–465.

Evaluación matemática de costos de estrategias de control para la plaga de castores en la Patagonia

DIEGO VICENCIO M.

Abstract

En 1947, la especie no nativa de castor Norteamericano fue introducida en la Patagonia Argentina, con el objetivo de crear una industria de peletería. Desde entonces, la población de castores se ha esparcido y crecido a un ritmo acelerado, resultando esto en un enorme desafío para el control de su población en Tierra del Fuego, cubriendo regiones tanto en Chile y Argentina. Razones principales para su rápido esparcimiento en parte incluyen buenas condiciones ecológicas y falta de depredadores naturales, causando así un enorme daño ecológico en la región. Este trabajo usa datos de Tierra del Fuego en tasas de crecimiento y dispersión de la población de castores, y tipos de control disponibles, diseñando modelos dinámicos de crecimiento y dispersión de la población. Estos modelos, son a su vez utilizados para el diseño de modelos de políticas de control que incluyen captura y cacería. Costos monetarios para la implementación de estos controles son considerados en orden de optimizar el costo y desarrollo de políticas de reducción de población de largo alcance.

References

- [1] Mahadev G. Bhat, Ray G. Huffaker, Suzanne M. Lenhart *Controlling Forest Damage by Dispersive Beaver Populations: Centralized Optimal Management Strategy* Ecological Applications, 3(3), 518-530 1993
- [2] Claudia Silva *El Castor americano, especie exótica invasora en la Patagonia*. La Chiricoa 15, 12-17 2012.

Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María, e-mail: vicenciodiego@gmail.com

- [3] Oscar Skewes, Fernando Gonzalez, Rodrigo Olave, Alberto Ávila, Víctor Vargas, Peter Paulsen, Horst Erich Künig *Abundance and distribution of American beaver, *Castor canadensis* (Kuhl 1820), in Tierra del Fuego and Navarino islands, Chile* European Journal of Wildlife Research, 52 (4), 292–296 2006.
- [4] Aracely Soto Simeone, Sergio Soza-Amigo *Valoración económica del bosque nativo afectado por la introducción del castor americano en Tierra del Fuego* BOSQUE 35(2) 229-234, 2014.
- [5] Petra K. Wallem, Clive G. Jones, Pablo A. Marquet, Fabián M. Jaksic *Identificación de los mecanismos subyacentes a la invasión de *Castor canadensis* (Rodentia) en el archipiélago de Tierra del Fuego, Chile.* Revista Chilena de Historia Natural 80, 309-325 2007.

MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE REBAÑO EN LAS PRESAS. ¿SON ADECUADAS LAS RESPUESTAS FUNCIONALES NO-DIFERENCIABLES?

K.VILCHES-PONCE, A.ROJAS-PALMA & E.GONZÁLEZ-OLIVARES

Abstract

Desde hace pocos años, se introduce una respuesta funcional definida por la función $h(x) = \frac{qx^\alpha}{x^\alpha + b}$, con $0 < \alpha < 1$, donde $x = x(t)$ utilizada para modelar una conducta anti-depredatoria (APB) usada por algunas especies de presas para evitar la depredación, la cual se denomina comportamiento de rebaño (prey herd behavior).

En particular, la más empleada ha sido la llamada respuesta funcional raíz cuadrada (root square functional response) [1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10], que es una función no-diferenciable para $x = 0$. Es importante señalar, que este término fue acuñado por primera vez en Ciencias Económicas en [2] con el objetivo de describir un comportamiento de masas, en el cual las personas toman sus decisiones siguiendo lo que otros están realizando en lugar de usar su propia información.

Esta presentación, se enfoca, principalmente, en el análisis de los efectos de una respuesta funcional racional y no-diferenciable [7] sobre los modelos de depredación del tipo Gause, discutiendo la buena definición (well-posed) de los sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan este tipo de interacciones en la ecología matemática.

References

- [1] V. Ajraldi, M. Pittavino and E. Venturino, Modeling herd behavior in population systems, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications* 12 (2011) 2319-2338.
- [2] A. V. Banerjee, A simple model of herd behavior, *The Quarterly Journal of Economics* 107(3) (1992) 797-817.

Departamento de Matemática Física y Estadística, Universidad Católica del Maule, e-mail: kvilches@ucm.cl; amrojas@ucm.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, e-mail: ejgonzal@ucv.cl

- [3] M. Banerjee, B.W. Kooi and E. Venturino, An ecoepidemic model with prey herd behavior and predator feeding saturation response on both healthy and diseased prey, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 12(2) (2017) 133-167.
- [4] S. P. Bera, A. Maiti, G. P. Samanta, Modelling herd behavior of prey: Analysis of a prey-predator model, *World Journal of Modelling and Simulation* 11 (2015) 3-14.
- [5] P. A. Braza, Predator-prey dynamics with square root functional responses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13 (2012) 1837-1843.
- [6] L. Chen and F. Chen, Dynamical analysis of a predator-prey model with square root functional response, *Journal of Nonlinear Functional Analysis* 2015 (2015) Article ID 8, 12 pp.
- [7] E. González-Olivares, K. Vilches-Ponce and A. Rojas-Palma, Modelling the prey herd behavior. Is the square root functional response adequate?, submitted to *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* (2017).
- [8] B. W. Kooi and E. Venturino, Ecoepidemic predator-prey model with feeding satiation, prey herd behavior and abandoned infected prey, *Mathematical Biosciences* 274 (2016) 58-76.
- [9] X. Tang, Y. Song and T. Zhang, Turing-Hopf bifurcation analysis of a predator-prey model with herd behavior and cross-diffusion, *Nonlinear Dynamics* 86 (2016) 73-89.
- [10] E. Venturino, Ecoepidemiology: a more comprehensive view of population interactions, *Mathematical Modelling in Natural Phenomena*. 11(1) (2016) 49-90.

Didáctica de la matemática

Actividad de Modelización basada en el Ciclo de Kolb para el contenido de Función Cuadrática. Una experiencia de aula.

ESTEBAN AROS SÁNCHEZ

MARIANELA CASTILLO FERNÁNDEZ

Abstract

En [1], M. Aravena y C. Caamaño mencionan que uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación media chilena en la enseñanza de la matemática tiene relación con la forma de articular los temas con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática, implicando que los estudiantes no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación.

M. Aravena en [2] añade además que en Chile existe una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza, con lo cual el implementar un trabajo matemático basado en situaciones de modelaje, puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiendo que en su futuro laboral ayuden a los alumnos del sistema educativo a superar las dificultades y obstáculos, para poder enfrentarse como ciudadanos a una sociedad cambiante, en especial para los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente.

En este trabajo se presentará una experiencia de aula que se llevó a cabo en un tercero medio de un Liceo Municipal de la ciudad de Los Ángeles, la cual consistió en tres actividades adaptadas de una actividad propuesta en [3], que tienen por objetivo introducir el contenido de función cuadrática por medio de la resolución de un problema en contexto usando modelización matemática basada en el Aprendizaje Experiencial o Ciclo de Kolb.

La experiencia fue especialmente novedosa para los estudiantes, dado que, según un pequeño estudio que se realizó en el establecimiento sobre los estilos de enseñanza de los profesores de matemática, no se suele utilizar la modelización como estrategia de enseñanza para el contenido de funciones.

References

- [1] Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). *Modelización Matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile*. Estudios Pedagógicos XXXIII, N.º 2, 7-25.

Estudiante de Pedagogía en Matemática y Educación Tecnológica, Universidad de Concepción Campus Los Ángeles, e-mail: esaros@udec.cl

Departamento de Ciencias Básicas, Escuela de Educación, Universidad de Concepción Campus Los Ángeles, e-mail: esaros@udec.cl

- [2] Aravena, M. (2011). *Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife.
- [3] Sandoval, V., Peña, M., Carrasco, V., González, C., Yáñez, S., Cariaga, E., y Colipe, E. (2014). *50 Ciclos de Kolb y 2 razones para ser utilizados*. Temuco: Universidad Católica de Temuco.

Interconexión entre teorías para comprender procesos de construcción de conocimiento matemático: el caso de modelación y abstracción en contexto

GUERRERO-ORTIZ CAROLINA

Abstract

Establecer interconexiones entre teorías es una estrategia que se ha desarrollado en educación matemática en los últimos años con la finalidad de comprender en profundidad y desde diferentes perspectivas los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [1]. En el caso de la modelación matemática gran parte de la investigación atiende al diseño de situaciones de enseñanza para favorecer el desarrollo de habilidades y conocimiento matemático [2]. Sin embargo, pocas investigaciones dan cuenta de cómo emergen los conceptos matemáticos al modelar una situación y cómo los estudiantes se apropian de estos conceptos. En esta presentación se discuten las ventajas que ofrece la interconexión entre dos elementos de la teoría al analizar la modelación de una situación real con el apoyo de material auxiliar. En particular, se considera el marco propuesto por [3] para analizar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva y la teoría de Abstracción en Contexto (AiC) para comprender cómo los estudiantes construyen conocimiento matemático abstracto [4]. Con estos dos elementos es posible identificar cuál es el rol que el material auxiliar juega como mediador en la modelación de algunas situaciones. Además se identifican y analizan los procesos de abstracción matemática cuando los individuos construyen un modelo matemático para describir la degradación de materiales en el mar, lo cual conduce al estudio de la función exponencial.

References

- [1] Kindron, I., and Bikner-Ahsbahs, A. *Advancing research by means of the networking of theories*. Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 221-232). Springer, Rotterdam, The Netherlands, 2014.
- [2] Niss, M., Blum, W., and Galbraith, P. *Introduction*. Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 3–32). Springer, New York (2007).
- [3] Dreyfus, T., Hershkowitz, R., and Schwarz, B. B. *The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory*. Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 185–217). Springer, Rotterdam, The Netherlands, 2014.
- [4] Borromeo, F. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 86–95.

El rol de la visualización no-icónica en el ETM: Profundización de la perspectiva semiótica de Duval

Carolina Henríquez Rivas - Universidad de La Frontera -
carolina.henriquez@ufrontera.cl

Introducción

La investigación actual relacionada con el proceso de *visualización* en la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha cobrado valor y vigencia. Esto se evidencia en el reciente *International Congress on Mathematical Education* (Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016). En contexto del *International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, el survey desarrollado por Presmeg (2006) ofrece una vasta revisión de la investigación realizada sobre visualización y, expone temas como: las dificultades de los estudiantes, la visualización en la enseñanza, la influencia de los computadores en la visualización matemática, entre otros. Al finalizar, Presmeg plantea interrogantes de estudio, como qué visualización para promover distintos tipos de problemas.

Espacio de Trabajo Matemático

El marco denominado *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas y, se constituye por dos planos, *cognitivo y epistemológico*, en relación con los contenidos matemáticos del dominio en juego (Kuzniak, 2011). En el plano cognitivo están presentes los procesos de *visualización, construcción y prueba* y, en el epistemológico, el *representante, artefactos y referencial*. Las componentes de los planos, se articulan mediante las génesis *semiótica, instrumental y discursiva*. En las interacciones entre las génesis se definen los *planos verticales*, que permiten relacionar el trabajo matemático caracterizando e identificando diferentes fases (de trabajo) en relación con una tarea dada. Estos son: semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis], y semiótico-discursivo [Sem-Dis] (Kuzniak y Richard, 2014), como se muestra en la figura (1).

El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores

JAIME HUINCAHUE ARCOS RITA BORROMEO-FERRI JAIME MENA-LORCA

Abstract

La relación entre la realidad y el conocimiento matemático sugiere, desde una visión educativa, estudios que planteen maneras sobre cómo generar otros significados del conocimiento matemático, sin soslayar los múltiples marcos que se han formulado y utilizado al respecto. En ese sentido, desde una aproximación cualitativa, se construye una experimentación en la formación del profesor de Matemática en Chile. Para tal fin, se plantea un marco conceptual para la enseñanza de la modelación matemática, el cual consiste en: constructos teóricos respecto a la concepción de modelación matemática [1, 3], ciclo de modelación desde una aproximación individualizada del conocimiento [2, 4], competencias de modelación [8, 9] y niveles de modelación. Con esto, se propone un curso que estudie la enseñanza de modelación matemática dirigido a la formación inicial del profesor de matemáticas; compuesto de 15 sesiones, las cuales emergen desde el marco conceptual enunciado y planificado a partir de experiencias teóricas validadas -como es el marco teórico de Borromeo-Ferri para la enseñanza de la modelación- [5, 7]. Mediante un análisis metodológico con el modelo MTSK [6], se destacan resultados hacia el desarrollo reflexivo de los estudiantes en el transcurso de la experiencia, hacia el conocimiento que tienen ellos como estudiantes y como futuros profesores, evidenciado desde la comprensión del conocimiento en todos los subdominios del dominio MK y el subdominio KMT. Los resultados muestran un progreso en el conocimiento matemático y en el conocimiento pedagógico del contenido. El trabajo discute posibles maneras para establecer modelos de enseñanza de la modelación y un momento propicio para hacer uso de una propuesta sobre la materia.

Universidad Católica del Maule, e-mail: jaime.huincahue.a@gmail.com

Universidad de Kassel, e-mail: borromeo@mathematik.uni-kassel.de

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, e-mail: jaime.mena@pucv.cl

References

- [1] Blum, W. ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics* **51** No. 1 (2002), 149–171.
- [2] Blum, W., and Leiss, D. “Filling up” – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In: *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 4*, Sant Feliu de Guixols, (2007), 1623–1633.
- [3] Borromeo-Ferri, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 86–95.
- [4] Borromeo-Ferri, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners’ modelling behaviour *Journal für Mathematik didaktik* **31** No. 1 (2010), 99–118.
- [5] Borromeo-Ferri, R. Mathematical Modeling - The Teacher’s Responsibility. In: *Proceedings Conference on mathematical modeling*, New York, (2014), 26–31.
- [6] Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones.
- [7] Huincahue, J. *Propuesta de Modelación Matemática en la Formación de Profesores y Bases para una Variedad de Modelación desde la Teoría Socioepistemológica*. Tesis doctoral no publicada, Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (2017).
- [8] Niss, M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In: *3rd Mediterranean Conference on mathematical education*, Athens, (2004), 115–124.
- [9] Mass, K. What are modelling competences? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 113–142.

Diseño e implementación de Aplicaciones móviles como apoyo al estudiante

JOSÉ KLENNER J.
jose.klenner@unab.cl

Abstract

El uso de tecnología en la enseñanza de la matemática ha representado un problema ya que se desconoce el potencial (dentro y fuera del aula) que se le puede dar, por lo que no se aprovecha y/o no se cree que el estudiante pueda lograr aprendizajes utilizando la virtualidad. El objetivo es cómo instrumentalizamos las herramientas tecnológicas en pos de la funcionalidad del conocimiento. En este sentido presentamos la construcción e implementación de un software bajo la plataforma Android, el cual, a través de un app, se permitirá modelar la derivada desde perspectivas distintas como por ejemplo: pendientes, tangentes, función derivada, etc. Hemos observado que estas aplicaciones móviles además promueven la constitución de una comunidad que no está en las aulas, que puede pertenecer a distintos colegios y niveles de formación, que probablemente tienen tablets, smartphones u otros recursos al que pueden acceder para apoyarse o colaborar con la comunidad. Esto pasa a ser un nuevo recurso para la nivelación y que debemos utilizar, para eso debemos liberarnos de la idea que los estudiantes aprenden sólo en clases o con tareas asociadas a cursos específicos, los alumnos aprenden en comunidades virtuales también. Hay que tomar conciencia que la web dispone de muchos recursos y el asunto es como aprovecharlos y, en este caso, se puede canalizar esto a través de foros con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades de argumentación. Si dispone de recursos para monitorear estos foros, se podría producir un proceso de institucionalización (Brousseau, 1986) en donde se establezca el contenido construido en forma virtual. Las variadas experiencias de apoyo virtual en que ha participado el equipo de investigadores, nos permite presentar una propuesta con fundamento didáctico, apoyados en la construcción social del conocimiento y otras ideas basales de la didáctica.

References

- [1] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-112.

- [2] Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y experiencias didácticas. NÚM. 30.3 ,237-256.

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES SOBRE LA NOCIÓN PRE NUMÉRICA PIAGETANA DE CLASIFICACIÓNEN MANUALES ESCOLARES CHILENOS

JOSÉ MEZA

Abstract

El presente trabajo, corresponde al análisis preliminar del diseño de unas situaciones de aula basadas en las nociones piagetanas de seriación y de clasificación. Se revisaron 6 textos escolares y 1 documento con orientaciones pedagógicos para Educación Parvularia proveniente del Ministerio de Educación (en total 12 experiencias de aprendizaje) y mediante un proceso de codificación abierta y luego axial, se elaboraron 4 categorías y 10 sub categorías que permitieron caracterizar los aspectos lógico-matemático y matemáticos que sugieren dichos documento, como conocimientos y aspectos predictores de la construcción del número natural. Se concluyó que los textos promueven un estudio alejado de los aspectos matemáticos que sugiere el autor y que por tanto, no aseguran la óptima construcción matemática del número natural en niños de pre escolar. Palabras clave: nociones pre numéricas, seriación y clasificación, educación inicial, didáctica de la matemática.

1 Introducción

Las Bases Curriculares de Educación Parvularia (BCEP) (Mineduc, 2005) indican que un estudiante en el segundo ciclo de Educación Parvularia, debe aprender a “establecer relaciones cada vez más complejas de semejanza y diferencia mediante la clasificación y seriación [que] ampliando así la comprensión de su entorno” (p.85), entendiéndose que dentro de su entorno está el aprendizaje del número natural y sus funciones. Una de las primeras tesis de Piaget, en el contexto del análisis del comportamiento de niños al enfrentarse a ciertos problemas, dan cuenta que el hombre evidencia diferentes formas de organización (Castorina &

Palau, 1981). Tal hallazgo, permite reconocer que la aparición de este tipo de razonamientos, tiene un componente innato y empírico. Para Piaget (1969; 1978) y otros autores (Lawrence, Theakston & Isaacs, 1968), el aprendizaje del número natural se centra en el desarrollo de las nociones lógicas-matemáticas de seriación, clasificación, conservación de cantidad y de correspondencia uno a uno. El desarrollo de estas nociones no son, necesariamente todas, anteriores al desarrollo de la noción de número, sino que la relación entre cada una de ellas y el número, se producen en momentos y maneras diferentes (Chamorro, 2005). Para el autor, dan cuenta cómo la seriación por una parte, permite coordinar la función ordinal y cardinal del número, privilegiando la primera de esta. Por otra parte, la clasificación permiten comprender la formación aditiva de este, demostrando primordialmente la función cardinal del número, pero coordinando aún ambas funciones. Una mala comprensión de la clasificación, es agrupación de elementos basándose en la semejanza y diferencia a partir de determinados atributos, despreciando el estudio aritmético asociado a la agrupación. La mirada piagetana rechaza el aprendizaje memorístico de la secuencia oral del conteo o cantinela, esto debido a que según el autor, oculta la real comprensión del concepto asociado al número natural.

2 Metodología

El estudio consistió en un análisis de contenido de un corpus de 12 experiencias de aprendizaje pertenecientes a 6 manuales para docentes para los Niveles de Transición (4 a 6 años). Para ello, se realizó un análisis de contenido mediante una decodificación abierta y luego, axial, las que permitieron elaborar 4 categorías y 10 subcategorías que se relacionaban con las orientaciones didácticas y metodológicas que sugieren los manuales y con las definiciones teóricas y didácticas que movilizan las experiencias de aprendizaje y las sugerencias al educador. Resultados Respecto a la gestión, el quehacer y las decisiones docentes que se promueve desde el punto de vista de la enseñanza, los textos invitan ocasionalmente a los educadores de párvulo (en adelante EP) a que los párvulos expliciten sus decisiones para incluir o no un elemento en alguna categoría, no obstante, no hacen alusión al estudio cuantitativo y la relación jerárquica e inclusiva que es fundamental en el estudio de la clasificación. Respecto al discurso y a las preguntas propuestas para el EP, y la cantidad de información que contienen, los manuales invitan que el adulto otorgue información que en parte, resuelve el problema, quizá con el propósito de evitar el error. Respecto a la gestión del error. Pese a lo anterior, sugieren que al enfrentarse a un error, el EP omita dicha respuesta y/o “guíe u oriente al párvulo” hasta que resuelva el problema, inhibiendo el poder y el rol del error en el aula infantil. En general, las actividades no son presentadas en el contexto de la resolución de problemas, siendo esta, una competencia fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Por lo general, los manuales sugieren que a los párvulos, se les presente la clasificación bajo la definición de agrupar y/o inclusión de elementos. Así también, la idea de “ordenar” es utilizada como un sinónimo de clasificar. Consideran además, que las categorías y el lenguaje, es el “lenguaje matemático” y que por tanto, deben ser tratados didácticamente como un aprendizaje. En su mayoría, las actividades que se proponen invitan al párvulo a comparar y no a clasificar, considerando que cuando esto

sucede, solo lo hacen bajo un atributo y para él, dos criterios. En su defecto, las actividades sugieren solo una selección de objetos para ver si pertenecen o a dicha categoría. En general, los manuales no sugieren el estudio apropiado de la noción de clasificación, pues no invitan a que el párvulo se cuestione la relación jerárquica entre las categorías y las subcategorías y/o la relación cuantitativa entre las partes y el todo, y privilegian, el mero estudio comparativo de las cualidades de los elementos y su pertenencia o no a las categorías, sin exigir por último, una inclusión de más atributos, con el objetivo de promover clasificaciones jerárquicas y/o particionales, que de algún modo, dan cuenta de un razonamiento lógico matemático, pero no en el sentido piagetano.

References

- [1] Castorina, J. & Palau, G., 1981. Introducción a la lógica operatoria de Piaget. Alcances y significado para la psicología genética. : Barcelona: Paidós.
- [2] Chamorro, C. (Ed.), (2005). Didáctica de la matemática. Colección infantil. Madrid: Pearson.
- [3] Piaget, J., 1978. La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. España: XXI Editores.
- [4] Piaget., J & Inhelder B., (2007). Psicología del niño. Madrid: Morata. (Trabajo original publicado 1969)
- [5] Mineduc, 2005. Bases Curriculares de Educación Parvularia. Chile.

Estudio de Clases para el desarrollo de la estrategia de componer 10 en estudiantes de primer grado de enseñanza básica

RAIMUNDO OLFOS, SERGIO MORALES
SOLEDAD ESTRELLA, TATIANA GOLDRINE, AMEY PINTO

Abstract

La capacidad de contar en el sistema de numeración decimal es importante para el desarrollo del sentido del número de los estudiantes. Sin embargo, privilegiar el conteo como estrategia única para resolver problemas relativos a adiciones no prepara a los estudiantes para progresar en habilidades de cálculo más complejas y avanzadas (Cheng, 2011). El investigador Garnett (1992) afirma que la fluidez en el cálculo mental está relacionada con la memorización de algunas sumas elementales, como aquellas que componen el número 10. La adquisición de la automaticidad en cálculos mentales es fundamental para el desarrollo de habilidades superiores, esto implica que la respuesta debe ser recordada por el estudiante más que derivarla de acciones de cálculo mental (Crawford, 2003). El presente trabajo da cuenta de un Estudio de Clases en que se diseña e implementa una lección de composición y descomposición de números en estudiantes de primer grado, como estrategia de cálculo mental. El objetivo de la clase diseñada buscaba que los estudiantes aprendieran y valoraran el uso de la estrategia de componer 10 para agilizar el cálculo mental de adiciones de dos números de un dígito que suman desde 11 a 18. Se muestra el análisis del diseño de las actividades de enseñanza presentadas durante la clase y los materiales empleados en ella, explicitando la justificación de su pertinencia y relevancia para la enseñanza del número en los primeros grados. Además se incluye el análisis a priori y a posteriori el análisis de la implementación de la clase, profundizando en las respuestas de los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS: FONDECYT N°1171076, FONDECYT N°1140472, CONICYT 2016-21161378, e-mail: raimundo.olfos@pucv.cl
e-mail: soledad.estrella@pucv.cl

References

- [1] Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. , 7(4), 1-14.
- [2] Crawford, D. B. (2002). Mastering math facts in your classroom. Eau Claire, WI: Otter Creek Institute.
- [3] Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. The Journal of Mathematical Behavior, 31(1), 29-47.

La teoría modos de pensamiento de Sierpinska

Nuevos enfoques y tendencias

MARCELA PARRAGUEZ

Abstract

Se presenta esta comunicación con base en la Teoría los Modos de Pensamiento de Sierpinska [1], a través de dos momentos.

Un primer momento que sitúa los modos de pensamiento –sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural– en el contexto que fueron creados por Sierpinska, esto es, en el álgebra lineal, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico por sobre el práctico [2], de los conceptos de ese fragmento de la matemática, para alcanzar es los aprendices un nivel superior de abstracción de estos tópicos. Cabe destacar que estos tres modos de pensar y entender los objetos matemáticos del álgebra lineal, no solo constituyen formas de entenderlos, sino también actúan como herramientas heurísticas al resolver problemas.

Un segundo momento, muestra través de ejemplos en otros contextos de la matemática [3], que estos tres modos de **pensamiento** constituyen un modelo de comprensión de los objetos matemáticos, al precisar sus coordinaciones o articuladores en el ir y venir de un modo a otro. Estos articuladores, que permiten transitar de un modo a otro son propios y específicos para cada concepto ([4], [5], [6]), sin embargo ellos dependen de los tipos de relaciones y objetos que los aprendices evocan al momento de resolver una situación problema. Esto último, ha permitido consolidar la extensión y enfocar los modos pensar hacia otros dominios de la matemática, –como la noción de derivada en lo local– en sus modos sintético-geométrico- convergente, analítico-operacional y analítico-estructural [7].

Es importante resaltar, que la adherencia o variedad de esta Teoría de la Didáctica de la Matemática, brinda elementos que permiten describir la comprensión de un objeto matemático en cada modo de pensar, pero ella en sí, no proporciona los elementos que actúan como articuladores entre los modos teóricos y prácticos, sin embargo la matemática o su uso los puede proporcionar ... y para eso hay que investigar!!.

References

- [1] Sierpinska, A. *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. En J.-L.Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers (2000), pp 209–246.
- [2] Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Okaç, A. *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. *Reporte de Investigación*. Montreal, Canadá: Concordia University, (2002).
- [3] Parraguez, M. *Teoría los modos de pensamiento*. *Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (2012).
- [4] Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. *Las cónicas: Una propuesta didáctica desde la teoría de Modos de Pensamiento*. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, **1** No. 7 (2013), pp 89–96.
- [5] Randolph, V. y Parraguez, M. *Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento*. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, No. 28 (2015), pp 401–409.
- [6] Astorga, M. & Parraguez, M. *Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento-Avance de Investigación*. *Revista Chilena de Educación Científica*, **2** No. 13 (2014), pp 19–24.
- [7] Pinto, I., y Parraguez, M. *Elementos articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., No. 29 (2016), pp 124–129.

Niveles de razonamiento y habilidades geométricas en estudiantes de educación secundaria. Propuesta para atender a la diversidad de género

SANTIBAÑEZ ALEXANDRA; HENRIQUEZ GONZALO;
MAUREIRA FELIPE; ARAVENA D. MARÍA

Abstract

Esta investigación está enfocada a mejorar el nivel de razonamiento geométrico y a fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de secundaria mediante una secuencia de problemas basados en el modelo de Van-Hiele (Jaime, 1993). Se toma como base la problemática existente en los establecimientos municipales con alto porcentaje de vulnerabilidad donde los estudiantes presentan un bajo razonamiento geométrico (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016), así como también la diferencia de género en los rendimientos tanto de las pruebas internacionales PISA (2012, 2015) y TIMMS (2015) como en la prueba nacional SIMCE (2015, 2016). Para la propuesta se construyeron los dispositivos de control (pretest y posttest) y la secuencia didáctica en base al modelo de Van Hiele. En el diseño de las actividades se consideró las habilidades declaradas por el MINEDUC y los procesos claves de la actividad geométrica que corresponden a la visualización y razonamiento (Fischbein, 1993; Hershkowitz, 1998; Presmeg, 2006; Duval, 2006). Los tests y la secuencia didáctica se implementarán en un curso de primero medio de un establecimiento municipal de Talca, que presenta un índice de vulnerabilidad del 70,4%. Para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico y de las habilidades que colocan a prueba los estudiantes, incluyendo la variable género, se utilizará una metodología de corte cuantitativa y en el análisis de los datos la propuesta de Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991).

Palabras claves: Razonamiento geométrico, Habilidades geométricas, Modelo de Van-Hiele, Educación secundaria.

References

- [1] Aravena, D. M.; Gutiérrez, A.; Jaime A. (2016), Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de enseñanza vulnerables de educación media en Chile, *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 34.1 (2016): 107-128
- [2] Fischbein, Efraim (1993), "The theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, núm. 2, pp. 139-162.
- [3] Jaime, Adela (1993), Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento, Tesis de doctorado, Valencia, Universidad de Valencia (España).
- [4] Hershkowitz, Rina (1998), "About Reasoning in Geometry", en Carmelo. Mammana y Vinicio Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 29-37.
- [5] Duval, Raymond (2006), "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, núm. 1-2, pp. 103-131
- [6] Gobierno de Chile- Agencia Calidad de la Educación (2014). Informe nacional resultados Chile PISA 2012, Santiago de Chile, Ministerio de Educación en: https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Estudios+Internacionales/PISA/Informe_Nacional_Resultados_Chile_PISA_2012.pdf (consulta: 15 de marzo de 2016)
- [7] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). "PISA 2015, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes OCDE", en http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf. (consulta: 15 de abril de 2017).
- [8] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). "TIMSS 2015, Resultados", en http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS2015.pdf. (consulta: 15 de mayo de 2017). Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). Resultados SIMCE 2015. En <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/investigacion/> (consulta 25 de Septiembre de 2016)
- [9] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2017). Resultados SIMCE 2016. En <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/investigacion/> (consulta Septiembre de 2017)

- [10] Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J. M. (1991), "An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels", *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), pp. 237-251
- [11] Presmeg, Norma (2006), "Research on visualization in learning and teaching mathematics", en Ángel Gutiérrez y Paolo Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, UK, Sense Publishers, pp. 205-236.
- [12] Vinner, Shlomo y Rina Hershkowitz (1983), "On concept formation in geometry", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 83, núm. 1, pp. 20-25.

Paradigmas dominantes e identidad disciplinar en la formación inicial del profesor de matemáticas: el caso de un programa en la USACH

DANIELA SOTO SOTO HÉCTOR SILVA CROCCI

Abstract

Esta presentación reporta por etapas la estructura general de un proyecto de investigación, desarrollado bajo la óptica disciplinar de la Matemática Educativa, que pretende pesquisar elementos que generen un diálogo interdisciplinario entre académicos que conforman el cuerpo docente del programa de Pedagogía y Licenciatura en Educación de Matemática y Computación (PLEMC), de la Universidad de Santiago de Chile. Desde una perspectiva que cultiva la construcción social del conocimiento matemático, se hablará de caracterizar los paradigmas epistemológicos que subyacen en los campos disciplinares que conforman dicho programa, en pos de generar un diálogo entre dichos paradigmas para fortalecer la formación inicial de los futuros profesores de matemática. Se parte de la hipótesis de que en el programa curricular de PLEMC interactúan al menos tres campos disciplinares, estos son: la Matemática; la Educación; y la Matemática Educativa. Cada uno de estos campos, a través del discurso de sus académicos, expresa que debe saber el estudiante de formación inicial [1]. En una primera etapa, se caracterizó los elementos necesarios para levantar la información. Esto se tradujo en la planificación de un seminario denominado diálogo, en el cual se invitaron a seis académicos del programa que representan los diferentes campos disciplinares. El seminario constó de reuniones quincenales de demarcaron los temas matemáticos a tratar. En este sentido, el foco medular del diálogo fue la problematización de las argumentaciones del cálculo. Para tal cometido se seleccionaron tres situaciones que buscan resignificar algunas nociones del cálculo, esto es: lo parabólico, lo asintótico y la linealidad del polinomio. Se planificó que la presentación de cada situación fuese dirigida por uno de los grupos de académicos que representen a cada campo disciplinar. La situación de la parábola fue presentada por los académicos que

cultivan el campo de la Educación; la situación de lo asintótico por los académicos del campo de la Matemática; y la situación de la linealidad del polinomio por los académicos del campo de la Matemática Educativa. En la segunda etapa se desarrolló el seminario permitiendo levantar datos audiovisuales de los diálogos, así como transcripciones de los acontecimientos discursivos que se expresaron in situ. Se contó con la participación de una observadora no participante, quien formuló las bitácoras del seminario. En la tercera etapa del proyecto se organizaron los datos, lo que contó con la transcripción de los diálogos de los académicos ante las situaciones que problematizaron las situaciones del cálculo. Esto se desarrolló bajo una perspectiva denominada análisis crítico del discurso [2]. En este sentido, de los diálogos generados en los seminarios, se sistematizaron significados locales y globales de los discursos de los académicos. Con ello se han caracterizado las primeras aproximaciones a los paradigmas que subyacen en los campos que articulan el programa en estudio, con el propósito de generar lineamientos que organicen una identidad disciplinar en los futuros profesores de matemática.

References

- [1] Soto, D. El campo de la formación del profesor de matemáticas y la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático: el caso de un programa específico. C. Dolores- Flores, M. García-González, J. Hernández y L. Sosa. *Matemática Educativa: la formación de profesores* (2013), pp117 – pp136.
- [2] Van Dijk, T. La multidisciplinaridad del análisis crítico del discurso: un alegato en favor de la diversidad. *En Métodos de análisis crítico del discurso* (2003), pp143 – pp177.

Formulación y coherencia de tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores en formación

Macarena Valenzuela Molina, Elisabeth Ramos Rodríguez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Este estudio analiza las tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores de enseñanza básica en formación en una universidad chilena. Se estudian según la formulación de acuerdo a la estructura de la clase: inicio, desarrollo y cierre; y a la coherencia con el objetivo propuesto, para ello examinaremos las producciones de un grupo de estudiantes que se centró en el tratamiento de las fracciones. Indagamos en dos momentos durante un curso de didáctica de la matemática, antes y después de realizar el ciclo de análisis didáctico, con ello hemos evidenciado mejoras en la estructura de la clase y la coherencia con el objetivo planteado, como la explicitación del objetivo y la relación directa de la tarea con éste, además de la explicitación de los tres momentos de inicio, desarrollo y cierre que permiten una progresión en el planteamiento de las tareas.

Palabras claves: Formación de profesores, tareas matemáticas escolares, coherencia, análisis didáctico.

Uno de los objetivos relevantes en la formación inicial docente (FID) es desarrollar el conocimiento profesional consistente en la selección, análisis y gestión de tareas escolares, pues movilizan diferentes capacidades en los escolares, contribuyendo al desarrollo de competencias matemáticas (Lupiáñez, 2005; Ponte, 2013), buscando conseguir una enseñanza efectiva en los escolares (Flores, Gómez y Marín, 2013). Desde esta problemática presente en la FID, es que nos hemos planteado analizar tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores de enseñanza básica en formación en una universidad chilena, según la formulación y la coherencia de ésta con el objetivo propuesto. Nuestro primer referente conceptual es el análisis didáctico (Rico, 2013) considerado como una de las herramientas que permite al profesor seleccionar, diseñar y secuenciar las tareas de tal manera de fortalecer los aprendizajes. Luego del diseño del primer plan de clases, los futuros profesores realizan el análisis didáctico (Rico, 2013). En él realizan un análisis a priori de los conceptos, epistemología y un estudio socio crítico de la historia del concepto matemático en cuestión (análisis conceptual), además de profundizar en la estructura matemática (análisis de contenido) y análisis de las expectativas, oportunidades de aprendizaje, errores y obstáculos de los conceptos matemáticos (análisis cognitivo). Luego diseñan una secuencia didáctica y la implementan (análisis de instrucción), para finalmente reflexionar sobre todo el ciclo y mejorar aspectos específicos de su práctica docente. El segundo referente conceptual corresponde a la formulación (inicio, desarrollo y cierre) y coherencia de las tareas matemáticas escolares, indicadores caracterizados por Ramos (2014).

Desde el paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo interpretativo (Hernández, Fernández

y Baptista, 2010), analizaremos las tareas matemáticas escolares sobre fracciones, diseñadas por un grupo de estudiantes de penúltimo año (octavo semestre) de Educación Básica de una universidad chilena. Ellos debían proponer dos planes de clases. Un plan de clases al iniciar el curso, luego llevar a cabo el análisis didáctico, para finalmente proponer un plan de clases final. Estas dos planificaciones son los instrumentos de recogida de datos. Indagamos a través del análisis de contenido utilizando como unidades referenciales los conjuntos de párrafos que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004).

Las categorías de análisis que utilizamos surgen de los indicadores propuestos por Ramos (2014), tenemos entonces la formulación y la coherencia de la tarea con el objetivo propuesto, donde pueden surgir categorías emergentes. El análisis de datos fue fortalecido a partir de la triangulación de expertos, a saber, las investigadoras a cargo del estudio.

Resultados

Los resultados se plantean detallando las tareas propuestas en el plan de clases inicial y final.

Plan de clases inicial

En la primera planificación el objetivo propuesto es “demostrar que comprenden las fracciones propias: comparando fracciones propias con igual y distinto denominador de manera concreta, pictórica y simbólica” (MINEDUC, 2012), en donde se plantea dos tareas centrales. La primera presenta la manipulación de una hoja, consistente en dobleces, primero se pregunta a qué fracción corresponden las partes, para finalmente preguntar por la comparación de las fracciones resultantes al doblar la hoja, ésta última coincide con el objetivo propuesto para diseñar la clase. La segunda tarea consiste en el uso de un juego con tarjetas basada en la correspondencia entre su representación pictórica y simbólica. Ambas tareas no presentan un hilo conductor, ni muchos menos una estructura de inicio, desarrollo y cierre. Además se puede observar que la primera tarea abarca más allá del objetivo propuesto, pero ésta no se conecta con la tarea siguiente sobre las tarjetas. Este diseño de tareas no posee una formulación de inicio, desarrollo y cierre, no hay conexión entre una tarea y otra y no tiene coherencia con el objetivo específico de la clase según lo planteado para su diseño, sino más bien se diseñan varias subtarefas que van más allá del objetivo de clase

Plan de clases final

Durante el desarrollo del análisis didáctico, el grupo diseña una nueva clase de fracciones, con un objetivo distinto a la primera clase (el nuevo objetivo es: ejercitar suma y resta de fracciones, su representación simbólica y pictórica problematizando por medio del juego: lotería fraccionaria), pero con una estructura acorde a lo formulado por el MINEDUC (2012), de acuerdo al inicio, desarrollo y cierre de una clase, ya que se evidencia la preocupación por establecer momentos y tiempos específicos de trabajo con metas acordes al objetivo planteado, lo que permite señalar que la tarea diseñada es coherente con el objetivo de la clase. Además se puede observar que cada una de las subtarefas propuestas durante la clase, conllevan al logro del objetivo.

Conclusiones

Luego de analizar los cambios entre un plan y otro, es apreciable que existe una mejora, pues en la primera clase no hay formulación en inicio, desarrollo y cierre, mientras que en la segunda clase es explícito. Con lo que respecta a la coherencia entre el objetivo de la clase y las tareas propuestas,

es un ámbito no logrado en el primer plan de clases, porque las tareas van más allá del objetivo, sin embargo, en el segundo plan de clases se evidencia coherencia, ya que hay una progresión en cada una de las tareas, lo que permite ir avanzando en dificultad de tal manera de lograr el objetivo final de la clase. Este último aporte es prueba del apoyo del análisis didáctico, ya que este análisis otorgó un conocimiento profesional que permite diseñar, implementar y evaluar clases coherentes al objetivo y con una formulación apta en Chile como lo afirma Rico (2013).

Este trabajo espera aportar a la formación de futuros docentes desde una mirada curricular con el método de análisis didáctico, centrándonos en aspectos específicos de la labor fundamental docente, la planificación de clases, su diseño, implementación y evaluación, lo que permite focalizarse en el logro de los aprendizajes de los alumnos en el aula escolar.

Referencias

Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). *Apuntes sobre análisis de instrucción*. Módulo 4 de mad. Documento no publicado (documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.

MINEDUC (2012). *Matemática, programa de estudio quinto año básico*. Santiago, Chile: Ministerio de educación de Chile.

Lupiañez, L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática*. Capacidades y competencias matemáticas. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico, Málaga

Ponte, J. P. (2013). *Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas*. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93-98). Barcelona: Graó.

Ramos, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación docente*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

Propuesta de enseñanza para el desarrollo de la habilidad de modelización en el dominio del aprendizaje geométrico y algebraico para estudiantes de 4o básico

VANESSA ZÚÑIGA MEJÍAS

Abstract

Vivimos en una época donde la resolución de problemas a través de la construcción de modelos pueden motivar el proceso de aprendizaje y desarrollar de una forma más integral la capacidad de los estudiantes de relacionar la situación matemática con fenómenos de la vida real, los cuales necesitan ser interpretados y evaluados de forma crítica (Aravena y Caamaño, 2007; Blomhøj, 2004; Niss, 1989; Blum y Borromeo, 2009). Con respecto a lo anterior, en nuestro país existe un escaso desarrollo de la implementación de modelos matemáticos en todos los niveles de enseñanza, esto es producto del poco trabajo desarrollado en base a la resolución de problemas, la falta de reciprocidad de las matemáticas con otras áreas del conocimiento y la escasa preparación del profesorado en esta metodología (Aravena, 2001; Aravena, Caamaño y Giménez, 2008). Atendiendo a estas consideraciones, la presente investigación propone analizar las habilidades que presentan los estudiantes de cuarto básico cuando son formados en procesos de modelización a través de la implementación de una propuesta didáctica que incorpora diversos temas del aprendizaje geométrico y algebraicos. La metodología se adscribirá a un enfoque mixto, el cual utilizará el enfoque cuantitativo y cualitativo de forma independiente. El procedimiento a utilizar para seleccionar la muestra será de tipo no probabilístico, lo cual incluye en la muestra a los sujetos que son de fácil disponibilidad. Por las características la investigación, se puede establecer que el diseño se aproxima a un estudio de caso, ya que no se pretende realizar generalizaciones, más bien, es una metodología útil para la reflexión, que favorecería la práctica tanto personal como profesional, además de ser un estudio que pueda ser mejorado en el futuro.

References

- [1] Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. Tesis Doctoral. Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat de Barcelona, España.
- [2] Aravena, M. y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. Estudios pedagógicos (Valdivia), 33(2), 7-25.
- [3] Aravena, M., Caamaño, C., y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(1), 49-92.
- [4] Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., y Zúñiga, J. (2006). Investigación educativa I. Santiago: Universidad ARCIS.
- [5] Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática educativa. Ciudad de México: Gedisa.
- [6] Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling. In International perspectives on learning and teaching mathematics. National Center for Mathematics Education.
- [7] Blum, W. y Borremeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. Journal of mathematical modelling and application, 1(1), 45-58.
- [8] Agencia de Calidad de la Educación (2016). Santiago, Chile: Estudios Internacionales. Recuperado 12 agosto de 2016 de <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/estudios-internacionales/estudios-desarrollados/>
- [9] Informe, P. I. S. A. (2012). Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. Recuperado 19 agosto de 2016 de <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-spain-ESP.pdf>

Matemática discreta

Embedding de árboles con grado máximo acotado

Parte 2

GUIDO BESOMI

Abstract

Sea T_k cualquier árbol en k aristas y grado máximo acotado por Δ , estudiaremos qué tipo de condiciones debe tener un grafo G de modo de contener una copia de T_k como subgrafo. Nuestro resultado principal establece que si G es un grafo con grado mínimo al menos $(1 + \delta)\frac{k}{2}$ y grado máximo al menos $(1 + \delta)2k$, entonces $T_k \subseteq G$. Además, los métodos utilizados servirán para dar respuestas parciales a dos conjeturas referentes a *embedding* de árboles: la conjetura $\frac{2k}{3}$ y la conjetura de Erdős-Sós.

References

- [1] Havet, F., Reed, B., Stein, M., Wood, D. (2016) A Variant of the Erdős-Sós Conjecture. *Manuscript*.
- [2] Komlós, J., Sárközy, G. N. and Szemerédi, E. (1995) Proof of a packing conjecture of Bollobás. *Combin. Probab. Comput.* **4** 241-255.
- [3] Komlós, J., Sárközy, G. N. and Szemerédi, E. (2001) Spanning Trees in Dense Graphs. *Combin. Probab. Comput.* **10** 397-416

Monochromatic ℓ -cycle partitions of $\mathcal{K}_n^{(k)}$

SEBASTIÁN BUSTAMANTE

Abstract

Given an edge-colouring of a graph or hypergraph $\mathcal{K}$, the problem of partitioning the vertices of $\mathcal{K}$ into the smallest number of monochromatic cycles has received much attention. Central to this area has been an old conjecture of Lehel [1] stating that two monochromatic disjoint cycles in different colours are sufficient to cover the vertex set of any 2-edge-colouring of the complete graph K_n . This conjecture was confirmed 31 years later by Bessy and Thomassé in [2]. In the hypergraph setting, an ℓ -cycle is a set of cyclically ordered edges such that consecutive edges intersect in exactly ℓ vertices and non consecutive edges are disjoint. We show that for sufficiently large n and every $0 < \ell \leq k/2$, two monochromatic ℓ -cycles in different colours are sufficient to partition all but at most a constant $c_{k,\ell}$ of vertices of any 2-edge-colouring of the complete k -uniform hypergraph $\mathcal{K}_n^{(k)}$. We also discuss several generalisations and open problems.

This is joint work Maya Stein.

References

- [1] Jacqueline Ayel. *Sur l'existence de deux cycles supplémentaires unicolores, disjoints et de couleurs différentes dans un graphe complet bicolore*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1979.
- [2] Stéphane Bessy and Stéphan Thomassé. Partitioning a graph into a cycle and an anticyle, a proof of Lehel's conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100:176–180, 2010.

Autómatas celulares pre-expansivos

ANAHI GAJARDO

Abstract

La expansividad es una forma de sensibilidad muy fuerte, afirma que para cualquier punto de partida, cualquier perturbación se alejará del punto inicial en algún momento. En el contexto de autómatas celulares, una perturbación pequeña es una que afecta a celdas lejanas del centro del espacio, pero podrá afectar a una cantidad infinita de celdas sin por esto dejar de ser pequeña. En esta charla haremos el estado del arte sobre una noción ligeramente más débil, la *pre-expansividad*. Esta noción, introducida en [1], es más débil pues solo exige que las perturbaciones sobre un conjunto finito de celdas lleguen a afectar todo el espacio. Se encuentra así justo entremedio de la expansividad y la sensibilidad a condiciones iniciales.

Estudiamos el caso unidimensional, caso en el cual se prueba que la pre-expansividad es una noción fuerte de sensibilidad puesto que implica la sensibilidad direccional en todas las direcciones posibles. Mostramos además varios ejemplos de autómatas pre-expansivos reversibles, que no son expansivos pues la expansividad es imposible en el contexto reversible.

Estudiamos también la pre-expansividad en dimensiones superiores. Allí lamentablemente, basándonos en [2], demostramos un resultado negativo que dice que no existen autómatas pre-expansivos lineales en dimensión mayor o igual a 2. Esto indica que de existir un autómata pre-expansivo, este debe ser no lineal, y el problema queda abierto. Cabe destacar, que en este contexto no existen tampoco autómatas expansivos [3].

Finalmente, estudiamos una noción más débil: la k -expansividad, que dice que las perturbaciones en exactamente k celdas afectan toda la evolución de un punto. Sorprendentemente, sí hay ejemplos de autómatas bi-dimensionales que son 1-expansivos y 3-expansivos, pero no 2-expansivos.

Trabajo realizado en conjunto con:

Vincent Nesme, Lycée Georges Brassens, France.

Departamento de Ingeniería Matemática y Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción. Parcialmente financiado por FONDECYT #1140684 y CONYCYT- BASAL PFB03 e-mail: anahi@ing-mat.udec.cl

Guillaume Theyssier¹, Institut de Mathématiques de Marseille - CMM - CNRS, Aix Marseille Université, Marseille, France.

References

- [1] A. GAJARDO, V. NESME, G. THEYSSIER *Pre-Expansivity in Cellular Automata*, CoRR abs/1603.07215, 2017.
- [2] J. GÄIJTSCHOW, V. NESME, R. F. WERNER. *The fractal structure of cellular automata on abelian groups*, en: Proceedings of AUTOMATA 2010, pp 55–74, INRIA Nancy Grand Est, 2010.
- [3] M. PIVATO. *Positive expansiveness versus network dimension in symbolic dynamical systems*, Theoretical Computer Science, 412(30):3838-3855, 2011.

¹Parcialmente financiado por CONYCYT- Basal PFB03, e-mail: `guillaume.theyssier@cnrs.fr`

Deciding whether a Grid is a Topological Subgraph of a Planar Graph is NP-Complete

ANDREA JIMÉNEZ

Abstract

The TOPOLOGICAL SUBGRAPH CONTAINMENT (TSC) PROBLEM is to determine for two given graphs G and H , whether H is a topological subgraph of G . On the one hand, an algorithmic implication of the famous Graph Minor Theorem of Robertson and Seymour is that, when H is fixed, the TSC PROBLEM can be solved in time polynomial in the order of the input graph G . On the other hand, when H is part of the input, the problem is NP-COMPLETE even when restricted to planar input graphs. Grids are fundamental structures in graph algorithms due to its close relation to the treewidth.

In this work, we study the computational complexity of the following decision problem: given a positive integer k and a planar graph G , is the $k \times k$ grid a topological subgraph of G ? We prove that this problem is NP-COMPLETE, even when restricted to planar graphs of maximum degree six, via a reduction from the PLANAR MONOTONE 3-SAT PROBLEM. This is joint work with Tina Janne Schmidt.

TÍTULO

MARTÍN MATAMALA

Abstract

A matching of a graph $G = (V, E)$ is a set of edges M such that for each vertex v the set $E(v) = \{uv \in E, u \in V\}$ contains at most one element of M . Let $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$. A α -matching is a function $\beta : E \rightarrow \mathbb{N}$ such that for each vertex $v \in V$, the set $\{uv \in E(v) : \beta(uv) \in \{\alpha(u), \alpha(v)\}\}$ contains at most one element. When $\alpha(u) = \alpha(v)$ for all $uv \in E$, an α -matching can be identified with the set $\{uv \in E : \beta(uv) = \alpha(u)\}$ which is a matching of G .

In this work we show that Tutte's Theorem for perfect matching has an extension into the context of α -matching.

Embedding de árboles con grado máximo acotado

Parte 1

MATÍAS PAVEZ SIGNÉ

Abstract

Sea T_k cualquier árbol en k aristas y grado máximo acotado por Δ , estudiaremos qué tipo de condiciones debe tener un grafo G de modo de contener una copia de T_k como subgrafo. Nuestro resultado principal establece que si G es un grafo con grado mínimo al menos $(1 + \delta)\frac{k}{2}$ y grado máximo al menos $(1 + \delta)2k$, entonces $T_k \subseteq G$. Además, los métodos utilizados servirán para dar respuestas parciales a dos conjeturas referentes a *embedding* de árboles: la conjetura $\frac{2k}{3}$ y la conjetura de Erdős-Sós.

References

- [1] Havet, F., Reed, B., Stein, M., Wood, D. (2016) A Variant of the Erdős-Sós Conjecture. *Manuscript*.
- [2] Komlós, J., Sárközy, G. N. and Szemerédi, E. (1995) Proof of a packing conjecture of Bollobás. *Combin. Probab. Comput.* **4** 241-255.
- [3] Komlós, J., Sárközy, G. N. and Szemerédi, E. (2001) Spanning Trees in Dense Graphs. *Combin. Probab. Comput.* **10** 397-416

Maximum Box Problem on Stochastic Points

PABLO PÉREZ-LANTERO

Abstract

Given a finite set of weighted points in $\mathbb{R}^d$ (where there can be negative weights), the maximum box problem asks for an axis-aligned rectangle (i.e., box) such that the sum of the weights of the points that it contains is maximized. We consider that each point of the input has a probability of being present in the final random point set, and these events are mutually independent; then, the total weight of a maximum box is a random variable. We aim to compute both the probability that this variable is at least a given parameter, and its expectation. We show that even in $d = 1$ these computations are $\#P$ -hard, and give pseudo polynomial-time algorithms in the case where the weights are integers in a bounded interval. For $d = 2$, we consider that each point is colored red or blue, where red points have weight $+1$ and blue points weight $-\infty$. The random variable is the maximum number of red points that can be covered with a box not containing any blue point. We prove that the above two computations are also $\#P$ -hard, and give a polynomial-time algorithm for computing the probability that there is a box containing exactly two red points, no blue point, and a given point of the plane.

This is a joint work with L. E. Caraballo, C. Seara, and I. Ventura.

Generalised colouring numbers of planar graphs

DANIEL A. QUIROZ

Abstract

The generalised colouring numbers $col_r(G)$ and $wcol_r(G)$ were introduced by Kierstead and Yang as a generalisation of the colouring number, and have found important theoretical and algorithmic applications.

We will discuss an improvement on the known upper bounds to these numbers for graphs excluding a complete graph as a minor, from the exponential bounds of Grohe *et al.* to a linear bound on $col_r(G)$ and an polynomial bound on $wcol_r(G)$. We will look at some of the main techniques used to obtain these new bounds, with an emphasis on the results for planar graphs.

This is joint work with Jan van den Heuvel, Patrice Ossona de Mendez, Roman Rabinovich and Sebastian Siebertz.

The ordinal secretary problem on graphs (and matroids)

JOSÉ A. SOTO

Abstract

An edge-weighted graph is presented edge by edge in uniform random order to an algorithm that wants to construct a large weight forest. When an edge appears, the algorithm must decide whether to take it or not, without creating any cycle. But there is a catch: the algorithm cannot see the weights, it can only compare pairs of revealed elements. Can the algorithm output a forest whose weight is large compare to the optimum one?

If we replace “finding a forest in a graph” by “finding an independent set on a given matroid” we obtain the description of the ordinal matroid secretary problem (MSP).

In this talk, I will present a technique to design, for certain matroids, algorithms with the following property: every element of the global optimum appears in the output solution with constant probability. Our technique allows us to improve the current best competitive guarantees of the MSP on most of the studied matroid, including the graphical case above for which we achieve a 4-competitive factor.

This talk is based on recent work with Abner Turkieltaub and Victor Verdugo [1].

References

- [1] José A. Soto, Abner Turkieltaub and Victor Verdugo. *Strong Algorithms for the Ordinal Matroid Secretary Problem*. To appear in the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2018)

Parameterized $(1 + \epsilon)$ -approximation algorithms for packing problems

Fabrizio Grandoni Stefan Kratsch Andreas Wiese

Abstract

Approximation algorithms and parameterized algorithms are two well-established ways to deal with NP-hard problems. In the first case, the goal is to compute in polynomial time a solution of cost close to the optimum. In the second case, the goal is to compute an optimal solution in (FPT) time $f(k)n^{O(1)}$, where k is some parameter of the input. The recent area of parameterized approximation seeks to combine the two approaches by, e.g., aiming for $(1 + \epsilon)$ -approximations in $f(k, \epsilon)n^{g(\epsilon)}$ time.

We present such algorithms for three important packing problems: for the Maximum Independent Set of Rectangles problem, for the Unsplittable Flow on a Path problem, and for the Two-Dimensional Knapsack problem with rotations. All three problems are W[1]-hard and hence we do not expect to find an FPT-algorithm for them. Also, it seems very difficult to construct a PTAS for them which motivates studying parameterized $(1 + \epsilon)$ -approximations.

Lines in Graphs

JOSÉ ZAMORA

Abstract

A well-known combinatorial theorem says that a set of n non-collinear points in the plane determines at least n distinct lines. In [1] Chen and Chvátal conjectured that this theorem extends to metric spaces, with an appropriated definition of line.

One special case is when the metric space is induced by a graph. In this case, the points are the vertices of the graph and the distance between two points is given by the length of the its shortest path.

In this talk, I will present the principal results in this topic. I will also propose a hierarchy of graphs with respect to its number of lines as a plan to study the conjecture.

References

- [1] X. Chen and V. Chvátal, Problems related to a de Bruijn - Erdős theorem, *Discrete Applied Mathematics* **156** (2008), 2101–2108.

Optimización y áreas afines

On the data completion problem and the inverse obstacle problem with partial Cauchy data for Laplace's equation

Fabien Caubet, Jérémi Dardé, Matías Godoy

We study the inverse problem of obstacle detection for Laplace's equation with partial Cauchy data. The strategy used is to reduce the inverse problem into the minimization of a cost-type functional: the Kohn-Vogelius functional. Since the boundary conditions are unknown on an inaccessible part of the boundary, the variables of the functional are the shape of the inclusion but also the Cauchy data on the inaccessible part. Hence we first focus on recovering these boundary conditions, *i.e.* on the data completion problem. Due to the ill-posedness of this problem, we regularize the functional through a Tikhonov regularization. Then we obtain several theoretical properties for this data completion problem, as convergence properties, in particular when data are corrupted by noise. Finally we propose an algorithm to solve the inverse obstacle problem with partial Cauchy data by minimizing the Kohn-Vogelius functional. Thus we obtain the gradient of the functional computing both the derivatives with respect to the missing data and to the shape. Several numerical experiences are shown to discuss the performance of the algorithm.

References

- [1] F. Caubet, J. Dardé and M. Godoy: *On the data completion problem and the inverse obstacle problem with partial Cauchy data for Laplace's equation*, accepted in ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2017.

Regularization and multiple kernels by recurrent least squares support vector machines

Nicolas Caro, Millaray Curilem, Walter Gómez

Abstract

In this work Recurrent Least Squares Support Vector Machines are used to develop time series forecasters. We study some adjustments to the original methodology based on a suitable regularization of the multipliers, and the use of multiple kernels. Numerical results of the modified algorithm are compared for different metrics. Finally, potential limitations of our approach and some possible ways for future improvements are discussed

Guaranteed value strategy for the optimal control of biogas production in continuous bio-reactors

Antoine Haddon^{1,3}, Jérôme Harmand², Héctor Ramírez¹, Alain Rapaport³

In this work, we study a problem of optimal control for the maximisation of biogas production in a continuous bioreactor, for which the analytical determination of the optimal synthesis is an open problem. We consider two kinds of growth rates: substrate dependent or substrate and biomass dependent. We propose a sub-optimal controller, as a most rapid approach path strategy, and moreover we provide guaranteed bounds for the unknown value function of the optimal control problem. This controller has the property of being a stationary state feedback for the substrate dependent case, even though the optimal control problem is with fixed finite terminal time.

References

- [1] A. Haddon, J. Harmand, H. Ramírez, A. Rapaport: *Guaranteed value strategy for the optimal control of biogas production in continuous bio-reactors*, IFAC Word Congress 2017.

Universidad Técnica Santa María
email: ??cecio.molinari@gmail.com.

Optimal control of parabolic PDEs by spectral decomposition

C. Molinari, M. Lazar

We present an algorithm for solving a constrained optimal control problem for a first order evolutionary system governed by a positive self-adjoint operator. The problem consists in identifying distributed control that minimizes a given cost functional, which comprises a cost of the control and a trajectory regulation term, while steering the final state close to a given target. More precisely, let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{U}$ be two real Hilbert spaces. Given y^T in $\mathcal{H}$ and $\varepsilon > 0$, denote $L^2_{T,\mathcal{H}} = L^2((0, T); \mathcal{H})$ and similarly for $\mathcal{U}$. In this work we consider the constrained minimisation problem

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{u \in L^2_{T,\mathcal{U}}} \left\{ J(u) : \mathcal{L}_T u \in \overline{B_\varepsilon(y^T)} \right\},$$

where $J : L^2_{T,\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$ is some given cost functional and $\mathcal{L}_T u = y_u(T)$, for y_u solution of

$$\begin{cases} y'_u(t) + \mathcal{A}y_u(t) = \mathcal{B}_t u(t) & \text{for } t \in (0, T) \\ y_u(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

We suppose the following main hypothesis on the operators involved.

- H₁** The functional J is strictly convex, coercive and lower-semicontinuous.
- H₂** The (unbounded) linear operator $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ is positive semidefinite, self-adjoint with dense domain $D(\mathcal{A})$ and compact resolvent.
- H₃** The operator $\mathcal{B}_t$ belongs to $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ for each time $t \in (0, T)$. In addition we suppose that the pair $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_t)$ is approximately controllable.

This research was partially developed while the authors were visiting University of Deusto within DyCon ERC-694126 project. It was also partly supported by Croatian Science Foundation under ConDyS Project IP-2016-06-2468. The first author was supported by CONICYT scholarship CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016.

This work extends the one in [1], where the case of control by initial datum is studied. The approach explores the dual problem and it generalises the Hilbert Uniqueness Method (HUM). The practical implementation of the algorithm is based on a spectral decomposition of the operator determining the dynamics of the system. Once this decomposition is available—which can be done off-line and saved for future use—the optimal control problem is solved almost instantaneously. It is practically reduced to a scalar non-linear equation for the optimal Lagrange multiplier. The efficiency of the algorithm is demonstrated through numerical examples corresponding to different types of control operators and penalisation terms.

References

- [1] Lazar, M., Molinari, C., Peypouquet, J.: *Optimal control of parabolic equations by spectral decomposition*, Optimization, 66(8), 1359–1381, 2017.
- [2] Peypouquet, J.: *Convex optimization in normed spaces: theory, methods and examples*, Springer Briefs in Optimization, 2015.

Lyapunov stability of differential inclusions with Lipschitz Cusco perturbations of maximal monotone operators

S. Adly, A. Hantoute, B. T. Nguyen

We characterize weak and strong invariant closed sets with respect to differential inclusions given in finite-dimensional space and governed by Lipschitz Cusco perturbations of maximal monotone operators. Correspondingly, we provide different characterizations for Lyapunov functions and pairs for such differential inclusions. Our criteria of invariance and Lyapunov functions/pairs only depend on the data of the system and the geometry of the involved candidates for invariant sets and Lyapunov functions, and thus, no need to explicit calculus of the solutions, nor to calculus on the semi-group generated by the underlying maximal monotone operator.

References

- [1] H. BRÉZIS, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans Les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam (1973), North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [2] F. H. CLARKE, YU. S. LEDYAEV, R. J. STERN, P. R. WOLENSKI, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 178. Springer-Verlag, New York, 1998.

A Complete characterization of the subdifferential of convex integral functions

Rafael Correa, Abderrahim Hantoute, Pedro Pérez-Aros

We study some subdifferentiation properties of integral functionals, given in the form

$$\hat{I}_f(x) := \int_T \max\{f(t, x(t)), 0\} d\mu(t) + \int_T \min\{f(t, x(t)), 0\} d\mu(t), \quad x(\cdot) \in \mathfrak{X},$$

with the associated integrand $f : T \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ being measurable in (t, x) and convex in x , where $(T, \mathcal{A}, \mu)$ is a complete σ -finite measure space and $\mathfrak{X}$ is a linear space of $\mathcal{A}$ -measurable functions with values on a locally convex space X .

In this work, we confine ourselves to the space of constant functions, in which case I_f becomes the continuous sum

$$x \in X \rightarrow I_f(x) = \int_T f(t, x) d\mu(t).$$

Then we give a characterization of ϵ -subdifferential of the integral functional I_f in terms of the ϵ -subdifferential of the data functions $f_t := f(t, \cdot)$. This provides a generalization of a well-known formula given by Ioffe-Levin [1].

Others formulae for the sum rule and for infinite series of convex functions will be presented. We shall also investigate exact rules to characterize the subdifferential of the integral functional I_f at a point $x \in X$ in terms of measurable selections $x^*(t) \in \partial f_t(x(t))$ for measurable functions $x(\cdot)$ close to the point x . This result is compared to the work of [2] and Lopez-Thibault [3].

Key words. Normal integrand, Convex integrand functionals, epi-pointed functions, conjugate function.

References

- [1] A. Ioffe, V. Levin: *Subdifferentials of convex functions*, Trudy Moskov. Mat. Obšč, 26, 3–73, 1972.

- [2] A. Ioffe: *Three theorems on subdifferentiation of convex integral functionals* J. Convex Anal. 13, no. 3-4, 759–772, 2006.
- [3] O. Lopez, L. Thibault, *Sequential formula for subdifferential of integral sum of convex functions* J. Nonlinear Convex Anal. 9, no. 2, 295–308, 2008.

Representación general del conjunto normal aproximado a los subniveles de funciones convexas

*A. Hantoute*¹, *A. Svensson*²

Dada una función convexa semicontinua inferior y propia Φ definida en un espacio localmente convexo X ($\Phi \in \Gamma_0(X)$), damos una representación del conjunto normal aproximado a conjuntos de subnivel $S := [\Phi \leq \lambda]$ en un punto $\bar{x} \in S$, en términos de los ϵ subdiferenciales de Φ en el punto $\bar{x}$, como en [1]. Presentamos una fórmula que extiende este resultado incluyendo ahora el caso $\bar{x} \notin S$, esto mediante la consideración de los conjuntos de la forma $[f \leq \lambda] \cup (\bar{x} + [f \leq f(\bar{x})]_\infty)$, que llamamos subniveles aumentados. Damos también una fórmula para los ϵ subdiferenciales del supremo de una familia arbitraria de funciones $(\Phi_t)_{t \in T} \subset \Gamma_0(X)$, lo cual nos permite expresar los elementos del conjunto normal aproximado a una intersección arbitraria de conjuntos de subnivel $([\Phi_t \leq \lambda])_{t \in T}$ como límite de combinaciones convexas de los ϵ subdiferenciales de las funciones individuales Φ_t .

De otra parte, suponiendo que Φ es además epipuntada, y haciendo uso de un teorema tipo Bronsted-Rockafellar, obtenemos una fórmula para el cono normal exacto a los subniveles de Φ en términos de los subdiferenciales exactos de Φ en puntos que aproximan a $\bar{x}$, extendiendo así un resultado conocido similar (ver [2]) en espacios de Banach.

References

- [1] J.-B. Hiriart-Urruty, M. Moussaoui, A. Seeger, M. Volle: *Subdifferential calculus without qualification conditions, using approximate subdifferentials: a survey*, Nonlinear Anal., 12, 1727–1754, 1995.

- [2] A. Cabot, L. Thibault: *Sequential formulae for the normal cone to sublevel sets*, TAMS, 12, 6591–6628, 2014.

Nonsmooth Lyapunov pairs for differential equations and perturbed sweeping processes

Emilio Vilches

Given $a \geq 0$ and two extended real valued functions $V, W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, we say that (V, W) is a a -weak Lyapunov pair for the dynamical system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \text{a.e. } t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

if for every $x_0 \in \mathbb{R}^n$ there exists a solution x of (1) such that

$$e^{a(t-T_0)}V(x(t)) + \int_{T_0}^t W(x(s))ds \leq V(x_0) \quad \text{for all } t \in [T_0, T].$$

Lyapunov pairs are the central idea behind the Lyapunov's indirect method to study stability properties of dynamical systems as asymptotic or finite time stability, existence of equilibria, etc.

When V and W are smooth functions (V, W) is a a -Lyapunov pair for (1) iff

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle + aV(x) \leq -W(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

Unfortunately, it is well known that some dynamical systems do not admit smooth Lyapunov pairs. Thus, it is very important to deal with nonsmooth Lyapunov pairs.

The aim of this talk is to present an explicit characterization of nonsmooth (lower semi-continuous) Lyapunov pairs for the dynamical system (1). We illustrate the flexibility of using such nonsmooth Lyapunov pairs with some examples. Furthermore, we give a criteria for weak Lyapunov pairs for perturbed sweeping processes.

This talk is based on [2, 3].

References

- [1] Q. ZHU: *Lower semicontinuous Lyapunov functions and stability*, J. Nonlinear Convex Anal., 4(3): 325-332, 2003.

- [2] A. HANTOUTE, E. VILCHES: *Lyapunov pairs for the perturbed sweeping process*. Submitted, 2017.
- [3] E. VILCHES: *Existence and Lyapunov pairs for the perturbed sweeping process governed by a fixed set*. Submitted, 2017.

Geometría compleja

Foliaciones Holomorfas: Minimales y Convexidad

CAROLINA CANALES GONZÁLEZ

Abstract

En esta charla hablaremos sobre minimales de foliaciones holomorfas y sobre como obtener información acerca de la geometría de su complemento basándose en las características de la foliación. Más precisamente, daremos una idea de como la presencia de holonomía hiperbólica en un minimal implica que su complemento es pseudoconvexo.

References

- [1] Y. M. Eliashberg and W. P. Thurston. Confoliations, volume 13 of University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

Structure of $\widetilde{\mathcal{M}}_4$

MARIELA CARVACHO VÍCTOR GONZÁLEZ

Abstract

Given a group G acting on a compact Riemann surface X it induces an action on the space of holomorphic 1-form of X . This action induces a representation group ρ called *analytic representation*.

It is known that the map to associate the pair $[X, G]$ to $[\rho]$ is injective for $g = 2$ and 3 but for genus 4 it is not injective [4].

The moduli space of genus 4, $\mathcal{M}_4$, has been studied in [1] and [3].

In this talk we show partial results about the structure of the moduli space of genus 4: 1-2 dimensional families, relation with the analytic representation and its boundary components using the results given in [2] and [5].

This is a work in progress with Víctor González-Aguilera.

References

- [1] A.Costa and M.Izquierdo **Equisymmetric strata of singular locus of the moduli space of Riemann surfaces of genus 4**. Geometry of Riemann surfaces, London Math. Society **368**, pag. 120-138 (2010)
- [2] R. Díaz and V. González-Aguilera **Limit points of the branch locus of $\mathcal{M}_g$** . arXiv 1703.07328v1 (2017)
- [3] I. Kuribayashi and A. Kuribayashi **On Automorphism Group of Compact Riemann Surfaces of Genus 4**. Proc. Japan Acad., 62, Ser. A, pag. 65-68 (1986)
- [4] H. Kimura **Classification of automorphism groups, up to topological equivalence, of compact Riemann surfaces of genus 4**. *J. Algebra* 264, no. 1, 26-54.(2003)
- [5] D. Singerman **Finitely maximal Fuchsian groups**. *J. London Math. Soc.* 6 , no. 2, 29-28. (1972)

Partially supported by Anillo PIA ACT1415 and Proyecto Interno USM 116.12.2, e-mail: mariela.carvacho@usm.cl
e-mail: victor.gonzalez@usm.cl

Construir variedades de Calabi-Yau con polítopos

PAOLA COMPARIN

Abstract

Dado P un polítopo en el reticulado M , se puede construir una variedad tórica a partir de P : se trata de la variedad X_P cuyo abanico $\Sigma_P \subset N$ es el abanico normal a P . Propiedades del polítopo se reflejan en propiedades de la variedad. Por ejemplo asumimos que P sea un polítopo reflexivo, es decir que tenga vertices en el reticulado M , tenga el origen del reticulado en su interior y el polítopo polar, definido como $P^* = \{y \in N : (x, y) \geq -1 \ \forall x \in P\}$ tenga vertices enteros también. En este caso se prueba que X_P es una variedad Fano. Batyrev en [2] muestra como obtener una familia de variedades de Calabi-Yau como hipersuperficies de X_P , ocupando el hecho que P es reflexivo. Además, si P es reflexivo, también su polar P^* lo es, así que se puede repetir la construcción obteniendo otra familia de Calabi-Yau en X_{P^*} y Batyrev prueba que las dos familias son simétricas via la simetría especular.

En [1] damos otra construcción que requiere hipotesis menos fuertes sobre los polítopos. Sea (P_1, P_2) un buen par de polítopos, o sea $P_1 \subseteq P_2$ tales que tanto P_1 cuanto P_2^* tengan vertices enteros y contengan el origen en su interior. Es esta situación la variedad X_{P_2} es $\mathbb{Q}$ -Fano con singularidades canónicas y se prueba en [1] que la familia de hipersuperficies que tengan P_1 como polítopo de Newton es una familia de Calabi-Yau. Nuevamente, en este caso también hay una construcción dual. Una tercera definición diferente es dada en [3], donde Batyrev define los polítopos casi psuedoreflexivos y a partir de ellos puede obtener variedades Calabi-Yau.

Mostraré las tres diferentes construcciones y como se relacionan en el contexto de la simetría especular.

References

- [1] M. Artebani, P. Comparin and R. Guillot. Families of Calabi-Yau hypersurfaces in $\mathbb{Q}$ -Fano toric varieties. *J. Math.Pures Appl.* **106** (2016), 319-341.

Partially supported by the project FONDECYT Postdoctorado 3150015 and the project Anillo ACT 1415 PIA CONICYT e-mail: pcomparin@udec.cl

- [2] V. V. Batyrev. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Algebraic Geom.* **3**, No. 3 (1994), 493-535.
- [3] V. V. Batyrev. The stringy Euler number of Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties and the Mavlyutov duality. arXiv:1707.02602.

Submersions and curves of constant geodesic curvature

MAURICIO GODOY

Abstract

The study of curves in surfaces having constant geodesic curvature is an old problem in differential geometry, whose origin can be traced back to classic works by Bianchi and Darboux. The problem of determining which curves have constant geodesic curvature in the more general setting of manifolds of dimension three or higher is much more complicated and, to our knowledge, there has been no comprehensive treatment of this.

In many examples in sub-Riemannian geometry, curves of constant geodesic curvature appear as images under submersions of normal sub-Riemannian geodesics. To name a couple of cases in which this situation occurs, the projections to the xy plane of sub-Riemannian geodesics in the Heisenberg group are circles, and the Hopf fibration maps sub-Riemannian geodesics in the three-dimensional sphere S^3 to parallel circles in S^2 .

In this talk, I will present a complete characterization of the submersions from a sub-Riemannian manifold to a Riemannian manifold that map normal sub-Riemannian geodesics to curves with constant geodesic curvature. These submersions are precisely the ones for which the curvature operator is parallel in horizontal directions, with respect to any affine connection satisfying certain hypotheses.

This is a joint work with Erlend Grong (Bergen and Orsay) and Irina Markina (Bergen).

Riemann surfaces defined over the reals

SAÚL QUISPE RUBEN HIDALGO ESLAM BADR

Abstract

The known (explicit) examples of Riemann surfaces not definable over their field of moduli are not real but their field of moduli is a subfield of the reals [3, 5, 4, 1]. In this talk we provide explicit families of non-hyperelliptic and hyperelliptic real Riemann surfaces which cannot be defined over their field of moduli [2].

References

- [1] M. Artebani, S. Quispe. Fields of moduli and fields of definition of odd signature curves. *Archiv der Mathematik* **99** (2012), 333–343.
- [2] E. Badr, R. Hidalgo, S. Quispe. Riemann surfaces defined over the reals. Preprint 2017.
- [3] C. J. Earle. On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (1971), 119–130. Ed. L.V. Ahlfors et al. (Princeton Univ. Press, Princeton).
- [4] R. A. Hidalgo. Non-hyperelliptic Riemann surfaces with real field of moduli but not definable over the reals. *Archiv der Mathematik* **93** (2009), 219–222.
- [5] G. Shimura. On the field of rationality for an abelian variety. *Nagoya Math. J.* **45** (1971), 167–178.

Partially supported by Project FONDECYT Iniciación en Investigación N. 11170129 and Project Anillo ACT 1415 PIA CONICYT, e-mail: saul.quispe@ufrontera.cl

Partially supported by Project FONDECYT Regular N. 1150003 and project Anillo ACT 1415 PIA CONICYT, e-mail: ruben.hidalgo@ufrontera.cl

Partially supported by Proyecto MTM2016-75980-P, e-mail: eslam@mat.uab.cat

On the one-dimensional family of Riemann surfaces of genus g with $4g$ automorphisms

SEBASTIÁN REYES CAROCCA

Abstract

Bujalance, Costa and Izquierdo have recently proved that all those compact Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ different from 3, 6, 12, 15 and 30, with exactly $4g$ automorphisms form an equisymmetric one-dimensional family, denoted by $\mathcal{F}_g$. See [1]

In this talk, for every prime number $g \geq 5$, we shall explore further properties of each Riemann surface S in $\mathcal{F}_g$ as well as of its Jacobian variety JS .

References

- [1] E. Bujalance, A. F. Costa and M. Izquierdo. On Riemann surfaces of genus g with $4g$ automorphisms. *Topology Appl.* **218** (2017), 1–18.

Física matemática

Quantum resonances and exponential decay

CLAUDIO FERNÁNDEZ

Abstract

We present a strategy to establish almost exponential decay for quantum resonances. This is based in estimating, in an explicit manner, the behavior of the Fourier transform of functions resembling a Lorentzian,

$$\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2}$$

We use this result in the case of a Hamiltonian having an embedded eigenvalue that's dissolved after adding a small perturbation.

Above is a collaboration with O. Bourget (PUC, Chile), V.Cortés (PUC, Chile) and R. Del Río (UNAM, México).

One the shape of one-phase free boundaries in the plane

NIKOLA KAMBUROV

Abstract

The one-phase free boundary problem in the plane models 2D jet flows and hollow vortices. We study its solutions under a topological constraint and obtain rigidity estimates on the shape of their free boundaries. Our results turn out to be direct counterparts to theorems in the minimal surface literature. This is joint work with David Jerison (MIT).

Multi-fold contour integrals of certain ratios of Euler gamma functions from Feynman diagrams

IGOR KONDRASHUK

Abstract

We construct a family of contour integrals of ratio of certain products of Euler gamma functions and show that the result is a linear combination of several ratios of other products of Euler gamma functions. This result corresponds to a diagrammatic relation from quantum field theory representing Belokurov-Usyukina method of loop reduction. These integrals were calculated via an implicit trick in Refs. [1, 2, 3] and in an explicit way were calculated in Ref. [4]. The integrals of this family come from Mellin-Barnes representation of Feynman diagrams related by various diagrammatic relations. Graphically the corresponding diagrammatic relations look like Bethe-Salpeter equations or like Dyson-Schwinger equations. The results presented in this talk are generalization of the results published in Ref. [4].

References

- [1] Pedro Allendes, Bernd Kniehl, Igor Kondrashuk, Eduardo A. Notte Cuello, Marko Rojas Medar, Solution to Bethe-Salpeter equation via Mellin-Barnes transform , Nuclear Physics B, 870, pp. 243-277, 2013.
- [2] Bernd Kniehl, Igor Kondrashuk, Eduardo A. Notte Cuello, Ivan Parra Ferrada, Marko Rojas Medar, Two-fold Mellin-Barnes transforms of Usyukina-Davy-dychev functions, Nuclear Physics B, 876, pp. 322-333, 2013.
- [3] Ivan González and Igor Kondrashuk, Box ladders in a non-integer dimension, Theoretical and Mathematical Physics, 177, pp. 1515-1540 , 2013.
- [4] Ivan González, Bernd A. Kniehl, Igor Kondrashuk, Eduardo A. Notte-Cuello, Ivan Parra-Ferrada and Marko A. Rojas-Medar, Explicit calculation of multi-fold contour integrals of certain ratios of Euler gamma functions. Part 1, arXiv:1608.04148

Resonancias en guías de ondas torcidas

PABLO MIRANDA

Abstract

En esta charla consideraremos el Laplaciano para una guía de ondas recta, la cual será torcida localmente. Se sabe que tal perturbación no crea nuevos valores propios. Sin embargo, es posible definir una extensión meromorfa de la resolvente del Laplaciano perturbado, la que nos permite mostrar que existe exactamente una resonancia cerca de ínfimo del espectro esencial. Calcularemos también el comportamiento asintótico de esta resonancia, en función del tamaño del torcimiento. Por último daremos una idea de como extender estos resultados para los "umbrales" superiores en el espectro del Laplaciano no perturbado.

From Anderson models to GOE statistics

CHRISTIAN SADEL

Abstract

We first prove some SDE limit result for products of random matrices. We then apply this to transfer matrices of block-Jacobi operators which we use to obtain limiting statistics for Anderson models on long strips under proper re-scaling of the randomness. With the correct sequence of limits we obtain a random matrix ensemble and finally the Sine₁ kernel. Finally we construct a sequence of graphs (antitrees) where some averaging effect of a random potential mimics the re-scaling in the step before. This way we obtain a sequence of random matrices with randomness of fixed strength (disorder) only along the diagonal for which we have limiting GOE statistics (Sine₁ process).

References

- [1] C. Sadel and B. Virag, *A central limit theorem for products of random matrices and GOE statistics for the Anderson model on long boxes*, Commun. Math. Phys. (2016) **343**:881–919
- [2] C. Sadel, *GOE statistics for Anderson models on antitrees and thin boxes in $\mathbb{Z}^3$ with deformed Laplacian*, preprint (2017) arXiv:1710.05253

Quantizations on general locally compact groups

MAXIMILIANO SANDOVAL

Abstract

This mini-talk consist of an brief introduction to the theory of Quantizations and Pseudo-differential calculus in the case when one Replaces the Additive group of real numbers with a general locally compact group. We show how the theory looks in the special case of Nilpotent groups, where we can make use of Kirillov's Orbit method.

Interacting bosons in a double-well potential: localization regime

DOMINIQUE SPEHNER

Abstract

We study the ground state of a large bosonic system trapped in a symmetric double-well potential, letting the distance between the two wells increase to infinity with the number of particles. In this context, one expects an interaction-driven transition between a delocalized state (the particles are independent and live in both wells) and a localized state (half of the particles live in each well). We start from the full many-body Schrödinger Hamiltonian in a large-filling situation where the on-site interactions and kinetic energies are comparable. When tunneling is negligible against the interaction energy, we prove a localization estimate showing that the particle number fluctuations in each well are strongly reduced. The modes in which the particles condense are minimizers of nonlinear-Schrödinger-type functionals.

Bispectralidad y Sistemas de Partículas Cuánticas Integrables

JAN FELIPE VAN DIEJEN

Abstract

En 1985 Duistermaat y GrÅijnbaum introdujeron el concepto del llamado "problema bispectral". En breve, un problema espectral se llama bispectral si la función propia satisface además una ecuación diferencial lineal en el parámetro espectral. En esta charla explicaremos como la noción de bispectralidad nos provee de una herramienta poderosa en el estudio de las funciones propias de sistemas de partículas cuánticas integrables.

(Trabajo en conjunto con Erdal Emsiz, PUC.)

Sistemas dinámicos

Difeomorfismos expansivo en medida: condiciones y ejemplos.

ALMA ARMIJO AVERILL

Abstract

Resumen

En ésta presentación vamos a definir lo que es un difeomorfismo que tiene la propiedad de ser expansivo en medida, daremos ciertas condiciones que necesitan los difeomorfismos para que tengan la propiedad, también vamos a ver que relación hay entre la propiedad y condiciones de hiperbolicidad, así mostraremos algunos ejemplos interesantes. También comentaré los resultados que estamos desarrollando con respecto al tema.

References

- [1] Ahn, J., Lee, K., Lee, M., Positively Measure Expansive and Expanding, Commun. Korean Math. Soc. 29, No. 2, 345-349, 2014.
- [2] Arbieto, A., Morales, C., Expansive measures, Publ. Mat. Urug. 14 , 61-71, 2013.
- [3] Lee, K.; Lee, M.; Moriyasu, K.; Sakai, K. , Positively measure-expansive differentiable maps., J. Math. Anal. Appl., 435, 492-507, 2016.
- [4] Morales, C. A., Measure expansive systems Preprint IMPA, D083, 2011.
- [5] Pacifico, M. J., Vieitez, J., On measure expansive diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 143, no. 2, 811-819, 2015.
- [6] Sakai, K., Positively Expansive Differentiable Maps, Acta Math. Sinica, No. 10, 1839-1846, 2010.
- [7] Sakai, K., Sumi, N., Yamamoto, K., Measure Expansive Diffeomorphisms, J. Math. Anal. Appl., 414, 546-552, 2014.

Espectro y conjunto contractible de un sistema diferencial no autónomo

Ignacio Huerta Navarro

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Universidad de Santiago de Chile

Santiago-Chile

Abstract

En esta charla mostraremos como un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, es contraído al espectro de la dicotomía exponencial (Sacker-Sell) cuando el sistema (1) admite dicotomía exponencial.

Decimos que el sistema (1) es contraído a un compacto E (ver [2]) si para cualquier $\delta > 0$, existen n funciones escalares continuas $C_1(t), \dots, C_n(t)$ y matriz $B(t)$ continua de $n \times n$ tal que

$$C_i(t) \in E, \quad \|B(t)\| \leq \delta \quad (t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n),$$

y el sistema (1) es cinemáticamente similar a

$$\dot{y} = C(t)y + B(t)y,$$

donde $C(t) = \text{diag}(C_1(t), \dots, C_n(t))$.

En el marco de mi trabajo de tesis doctoral, decimos que el sistema (1) admite **dicotomía exponencial no uniforme** (ver [1]) sobre un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ si existe un proyector $P(t)$ invariante para todo $t, s \in J$, constantes $K \geq 1$, $a < 0 < b$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)P(s)\| &\leq K e^{a(t-s)+\varepsilon|s|}, \quad t \geq s, \quad t, s \in J, \\ \|\Phi(t, s)(I - P(s))\| &\leq K e^{-b(s-t)+\varepsilon|s|}, \quad t \leq s, \quad t, s \in J. \end{aligned}$$

Parcialmente financiado por Beca Conicyt

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile e-mail:
ignacio.huerta@usach.cl

Asociada a la dicotomía exponencial no uniforme tenemos su espectro $\Sigma(A)$ el cual es definido como $\Sigma(A) = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \dot{x} = (A(t) - \gamma I)x \text{ no admite dic. exp. no uniforme}\}$, y que bajo ciertas hipótesis sobre el operador de evolución, se puede escribir como unión finita de intervalos compactos, generalizando en cierto modo el espectro de los autovalores cuando $A(t) = A$.

Finalmente, siguiendo el trabajo de F. Lin [2] mostraremos como $\Sigma(A)$ es nuestro candidato a compacto que satisface esta propiedad cuando el sistema (1) admite dicotomía exponencial no uniforme.

Trabajo conjunto con: Álvaro Castañeda

Autor 2¹, Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago-Chile

e-mail: `castaneda@uchile.com`

References

- [1] L. Barreira, C. Valls, Smoothness of invariant manifolds for nonautonomous equations. *Commun. Math. Phys.* **59** (2005), 639–677.
- [2] F. Lin, Spectrum and contractible set of linear differential systems. *Chinese Journal of Contemporary Mathematics.* **11** (1990), 425–450 (Chinese).

¹Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 1170968

Una nueva desigualdad para cociclos de matrices y una fórmula de Berger-Wang

EDUARDO OREGÓN-REYES

Abstract

En esta charla se mostrará una desigualdad que relaciona la norma de un producto de matrices $A_n \cdots A_1$ con los radios espectrales de los subproductos $A_j \cdots A_i$, con $1 \leq i \leq j \leq n$. Entre las consecuencias de esta desigualdad, se reobtiene la formula clásica de Berger-Wang, y se da una demostración más sencilla de una caracterización para el mayor exponente de Lyapunov, realizada por Ian Morris. Como ingrediente principal para la prueba de este resultado, se mostrará que para n suficientemente grande, el producto $A_n \cdots A_1$ es nulo bajo la hipótesis que las matrices $A_j \cdots A_i$ sean nilpotentes para todo $1 \leq i \leq j \leq n$.

References

- [1] E. Oregón-Reyes, A new inequality about matrix products and a Berger-Wang formula. <http://arxiv.org/abs/1710.00639>, preprint 2017.
- [2] M. Berger, Y. Wang, Bounded semigroups of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **166**, 21–27, 1992.
- [3] J. Bochi, Inequalities for numerical invariants of sets of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **368**, 71–81, 2003.
- [4] I. D. Morris, The generalised Berger-Wang formula and the spectral radius of linear cocycles. *Journal of Functional Analysis* **262**, 811–824, 2012.
- [5] E. Oregón-Reyes, Properties of sets of isometries of Gromov hyperbolic spaces. <http://arxiv.org/abs/1606.01575>, preprint 2016.

DICOTOMÍA EXPONENCIAL GENERALIZADA EN SISTEMAS DIFERENCIALES NO AUTÓNOMOS

NICOLÁS PINTO PÉREZ

Abstract

Consideremos el sistema lineal no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

Decimos que el sistema (1) está dotado de dicotomía exponencial cuando existe una proyección P y constantes positivas K, α tales que si X representa la matriz fundamental de (1), entonces:

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad (t \geq s) \quad (2)$$

$$\|X(t)(I - P)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}. \quad (s \geq t) \quad (3)$$

Definimos también el espectro de Sacker y Sell del sistema (1) como el conjunto:

$$\Sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \dot{x} = (A(t) - \lambda I)x \text{ no tiene dicotomía exponencial}\}. \quad (4)$$

Existen numerosos resultados (por ejemplo [2],[3]) que proporcionan a este conjunto propiedades destacadas que permiten describir la dinámica e hiperbolicidad del sistema (1). Además, cuando la matriz $A(t)$ es acotada, es posible caracterizar el espectro como una unión finita no vacía de intervalos compactos disjuntos.

En esta sesión se mostrará la noción de dicotomía exponencial generalizada introducida por L. Jiang en [1], algunas de sus propiedades y un ejemplo que evidencia diferencias entre la teoría espectral de Sacker y Sell y el espectro asociado a la dicotomía exponencial generalizada.

Trabajo de tesis supervisado por Gonzalo Robledo Veloso. Financiado por proyecto FONDECYT 1170968.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, e-mail: `nicolas.pinto.p@ug.uchile.cl`

References

- [1] L. Jiang, Generalized exponential dichotomy and global linearization, J. Math. Anal. Appl. 192 (1995) 813-832.
- [2] R. Sacker, A Spectral Theory for Linear Differential Systems, J. Differential equations, 27 (1978), 320-358.
- [3] J. Palmer, Exponential Separation, Exponential Dichotomy and Spectral Theory for Linear Systems of Ordinary Differential Equations, J. Differential equations, 46 (1982), 324-345.

Dichotomy Spectrum and topological conjugacy on nonautonomous unbounded difference system

ÁLVARO CASTAÑEDA, GONZALO ROBLEDO

Abstract

We will consider the nonautonomous linear system

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad (1)$$

where $x(n)$ is a column vector of $\mathbb{R}^d$ and the matrix function $n \mapsto A(n) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ is non singular. We also assume that (1) has an exponential dichotomy on $\mathbb{Z}$ [1] with projector $P = I$. We also consider the perturbed system

$$w(n+1) = A(n)w(n) + f(n, w(n)), \quad (2)$$

where $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is continuous in $\mathbb{R}^d$ is a Lipschitz function such that $n \mapsto f(n, 0)$ is bounded for any $\mathbb{Z}$.

We will present a result with sufficient conditions ensuring that (1) and (2) are topologically equivalent, namely the existence of a map $H: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ with the following properties: i) For each fixed $n \in \mathbb{Z}$, the map $u \mapsto H(n, u)$ is a bijection. ii) For any fixed $n \in \mathbb{Z}$, the maps $u \mapsto H(n, u)$ and $u \mapsto H^{-1}(n, u) = G(n, u)$ are continuous. iii) If $x(n)$ is a solution of (1), then $H[n, x(n)]$ is a solution of (2). Similarly, if $w(n)$ is a solution of (2), then $G[n, w(n)]$ is a solution of (1).

This result can also be seen as a generalization of a continuous result obtained by Lin in [3].

References

- [1] B. Aulbach, S. Siegmund, *The dichotomy spectrum for noninvertible systems of linear difference equations*. J. Diff. Eqs. Appl., **7** (2001) 895–913.
- [2] A. Castañeda, G. Robledo, *Almost reducibility of linear difference systems from a spectral point of view*, preprint, arXiv: 1607.00981.
- [3] F. Lin, *Hartman's linearization on nonautonomous unbounded system*, Nonlinear Analysis **66** (2007) 38–50.

Dinámicas Parcialmente Hiperbólicas y Exponentes de Lyapunov

FRANCISCO VALENZUELA–HENRÍQUEZ

Abstract

En el estudio de los sistemas dinámicos, es usual buscar propiedades robustas (aquellas que se conservan por una perturbación del sistema) y propiedades genéricas (aquellas que ocurren en un conjunto residual de todos los sistemas). Una propiedad importante de estudio es el de hiperbolicidad uniforme, que a pesar de ser robusta, está lejos de ser genérica (Fenómeno de Newhouse).

En esta charla, nos concentraremos en como generalizar la noción de hiperbolicidad uniforme. Una de estas formas es usando los exponentes de Lyapunov asociados al sistema, que en el caso en que todos los exponentes sean distintos de cero, diremos que nuestro sistema es “no–uniformemente hiperbólico”.

Finalizaremos presentando un resultado en conjunto con Radu Saghin y Carlos H. Vásquez en el que bajo ciertas hipótesis, tenemos abundancia de hiperbolicidad no–uniforme.

Geometría algebraica y aritmética

Grupos de automorfismo de variedades tóricas afines no normales

ROBERTO CARLOS DÍAZ VIVANCO

Abstract

Un antiguo problema de Felix Klein, conocido como Programa de Erlangen, plantea la posibilidad de determinar un objeto geométrico a través de su grupo de simetrías. Podemos considerar como objeto geométrico una variedad algebraica X y como grupo de simetrías el grupo de automorfismos $\text{Aut}(X)$. Liendo, Regeta y Utrech [3] en un paper en preparación responden la pregunta: si X es una variedad tórica afín e Y es cualquier variedad afín normal tal que $\text{Aut}(X) \simeq \text{Aut}(Y)$ ¿son X e Y isomorfos como variedad algebraica? concluyen que la respuesta es positiva para variedades tóricas distintas del toro algebraico y negativa para el toro algebraico.

En este trabajo en curso extendemos estos resultados al caso de variedades tóricas no necesariamente normales. En particular, en esta charla presentamos una generalización de la noción del conjunto de raíces $\mathcal{R}(S)$ del semigrupo $S = \sigma_M^\vee$ asociado a un cono racional poliedral σ asociado a una variedad tórica afín [2], al caso de un semigrupo afín S asociado a una variedad tórica afín no necesariamente normal.

Además establecemos un criterio para decidir si el conjunto de raíces de una variedad tórica afín no necesariamente normal coincide con el conjunto de raíces de su normalización. Como corolario obtenemos que la única superficies tóricas que está únicamente determinada por su conjunto de raíces es el espacio afín, ver también [1].

References

- [1] Kraft, H. Regeta, A. Santen, I. (2017) *Is the affine space determined by its automorphism group?*. arXiv:1707.06883v2 [math.AG]
- [2] Liendo, A. (2011) *Affine T -varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*. arXiv:0812.0802v1 [math.AG]
- [3] Liendo, A. Utrech, C. Regeta, A. (En preparación) *Characterization of affine toric varieties by its automorphism group*

On deformations of toric varieties

ANTONIO LAFACE

Abstract

Let n be a positive integer and let $T := (\mathbf{C}^*)^n$. A T -variety is a normal algebraic variety equipped with an effective action $T \times X \rightarrow X$. The complexity of X is $\dim X - \dim T$. Complexity zero T -varieties are called toric varieties. They can be described by means of the language of divisorial fans [2, 3] or via their Cox rings [1]. A one parameter deformation of a toric variety X is a flat family $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{A}^1$ whose central fiber is isomorphic to X . In this talk I will recall two approaches to deformations of toric varieties, via divisorial fans [4] and via Cox rings [6] and will compare them [5].

This is joint work with M. Melo [5].

References

- [1] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, and A. Laface, Cox rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [2] K. Altmann and J. Hausen, Polyhedral divisors and algebraic torus actions, Math. Ann. 334 (2006), no. 3, 557–607.
- [3] K. Altmann, J. Hausen, and H. Süss, Gluing affine torus actions via divisorial fans, Transform. Groups 13 (2008), no. 2, 215–242.
- [4] N. O. Ilten and R. Vollmert, Deformations of rational T-varieties, J. Algebraic Geom. 21 (2012), no. 3, 531–562.
- [5] A. Laface and M. Melo, On deformations of toric varieties, arXiv:1610.03455.
- [6] A. Mavlyutov, Deformations of toric varieties via Minkowski sum decompositions of polyhedral complexes, arXiv:0902.0967.

Departamento de Matemática, Universidad de Concepción, e-mail: antonio.laface@gmail.com .
This work has been partially supported by Proyecto Fondecyt Regular N. 1150732 and Anillo ACT 1415 PIA Conicyt.

Propiedades hereditarias de sumas de cuadrados en extensiones de cuerpos

DAVID GRIMM DAVID LEEP

Abstract

Anotando por $p(K)$ el mínimo número necesario para representar cualquier elemento totalmente positivo en K como una suma de $p(K)$ cuadrados, se puede preguntar si hay relaciones generales entre $p(K)$ y $p(E)$ para una extensión de cuerpos E/K de un cierto grado (algebraico o trascendental). Muy poco es conocido en este contexto, por ejemplo ni siquiera es conocido si $p(K) = 1$ implica que $p(K(t)) < \infty$.

Por otro lado se sabe que si $p(K(t)) = 2$ entonces necesariamente $p(K) = 1$ (y además $p(L) = 1$ para cualquier extensión finita real L/K). Conjeturamos que lo mismo vale cuando $p(E) = 2$ para una extensión finita $E/K(t)$ en lugar de $K(t)$.

En la charla voy a presentar como esta “conjetura” se relaciona con la existencia de ciertos puntos no reales en la curva sobre K con cuerpo de funciones isomorfo a E . En particular voy a presentar las tres diferentes ideas de como mostrar la existencia de tal tipos de puntos en los siguientes casos: Cónicas [2], curvas con puntos de grado impar [1], o curvas de tipo Fermat [2]. Además voy a presentar un método [3] para curvas generales pero bajo la hipótesis más fuerte que no solamente $p(E) = 2$, pero también $p(E') = 2$ para todas extensiones finitas E'/E .

References

- [1] K.J. Becher and Jan Van Geel. Sums of squares in function fields of hyperelliptic curves. *Mathematische Zeitschrift* **261** No. 4 (2009), 829–844.
- [2] D. Grimm. Splitting fields of conics and sums of squares of rational functions.. *Manuscripta Matemática* **141** Issue 3-4 (2013), 727–736.
- [3] David Grimm and David Leep. Sums quares and quadratic forms over function fields of conics (titulo preliminar). *preprint in preparation*

Local Global divisibility problem over GL_2 -type Abelian Varieties

FLORENCE GILLIBERT GABRIELE RANIERI

Abstract

We are interested in a problem called the Local Global divisibility problem over Abelian Varieties. Let k be a number field and let A/k be an abelian variety of dimension d .

Problem. Let P be in $A(k)$ and let q be a positive integer. Suppose that for all but finitely many places v of k , there exists $D_v \in A(k_v)$ such that $P = qD_v$. Does there exist $D \in A(k)$ such that $P = qD$?

Dvornicich and Zannier gave a cohomological interpretation based on the Galois representations over torsion points. Using this interpretation, Paladino, Ranieri and Viada gave a criterion for the Local-global divisibility problem in the particular case of Elliptic Curves. But in higher dimension, the size of the representation makes the problem technically more difficult. For this reason we studied the special case of GL_2 -type varieties. An abelian variety A/k is of GL_2 -type if there exists a number field $E/\mathbb{Q}$ of degree equal to d , such that an order R of E embeds in the endomorphism ring of A . This allows us to associate a p -adic Galois representation with values in $\mathrm{GL}_2(R \otimes \mathbb{Z}_p)$, in the place of $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{Z}_p)$. In a recent work with Gabriele Ranieri, we generalize the previous criterion known for Elliptic Curves in the case of GL_2 -type abelian varieties. In our talk we explain this last result.

Equidistribution of p-adic Hecke orbits on the modular curve

SEBASTIÁN HERRERO RICARDO MENARES JUAN RIVERA-LETÉLIER

Abstract

It is well known that the orbits of Hecke correspondences on the modular curve are equidistributed with respect to the hyperbolic measure. Also, by work of Duke and Clozel-Ullmo, it is known that galois orbits of CM points enjoy the same equidistribution property. Recently, Habegger has used this principle to show that the set of singular moduli that are algebraic units is finite. In this talk we will present a p-adic analogue of the aforementioned equidistribution property of Hecke correspondences, as well as some partial analogues of the equidistribution of CM points. If time allows it, we will also explain how to inject these results into Habegger's strategy in order to prove that, for certain finite sets S of primes, the set of singular moduli which are S -units is finite.

This is joint work with Sebastián Herrero (Chalmers U. of Technology) and Juan Rivera-Letelier (Rochester U.).

Sobre la definibilidad de $\mathbb{Z}$ y el número de Julia Robinson

PIERRE GILLIBERT GABRIELE RANIERI

Abstract

En el famoso congreso de 1900, Hilbert propuso una lista de veintitrés problemas en todas las ramas de la matemática. El décimo problema que Hilbert enunció es: dada una ecuación polinomial con cualquier número de incógnitas y con coeficientes enteros, idear un proceso de acuerdo con el cual pueda determinarse, en un número finito de operaciones, si la ecuación es resoluble en números enteros. Una respuesta negativa a este problema fue encontrada por Matiasевич en 1970. De manera natural, es posible formular la misma pregunta reemplazando el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ por cualquier otro anillo conmutativo. En los 70s, Julia Robinson asoció a todo anillo R de enteros algebraicos de una extensión totalmente real de $\mathbb{Q}$ (no necesariamente finita) un número real JR (que puede ser $+\infty$), en función del cual es posible en algunos casos de dar una respuesta al décimo problema de Hilbert sobre R . Robinson demostró que el JR de todo anillo de enteros algebraicos de una extensión finita es $+\infty$, que el JR del anillo de todos los enteros algebraicos totalmente reales es 4 y que JR es siempre al menos 4. Además, preguntó si existen anillos de enteros algebraicos con JR distinto de 4 y $+\infty$. En un trabajo en colaboración con Pierre Gillibert (Universidad de Viena), hemos encontrado una infinidad de anillos de enteros algebraicos con números JR todos distintos de 4 y $+\infty$. Vamos a explicitar la construcción de estos anillos y explicar como, utilizando algunos resultados de teoría analítica de números, calcular exactamente sus números de Julia Robinson.

On some Hermitian hypersurfaces defined over a finite field

ANDREA LUIGI TIRONI

Abstract

Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a hypersurface of degree $d \geq 2$ and dimension $n \geq 2$ defined over a finite field $\mathbb{F}_q$ with q elements. Denote by $N_q(X)$ the number of $\mathbb{F}_q$ -points of X and suppose that X has no $\mathbb{F}_q$ -linear components. Then it is known that

$$N_q(X) \leq \Theta_n^{d,q} := (d-1)q^n + dq^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1 .$$

In this talk, we show that if $d = \sqrt{q} + 1$ and $N_q(X) = \Theta_n^{\sqrt{q}+1,q}$, then X is projectively equivalent to a cone over a nonsingular Hermitian surface in $\mathbb{P}^3$.

References

- [1] Andrea L. Tironi, Hypersurfaces achieving the Homma-Kim bound, *Finite Fields Appl.* **48** (2017), 103–116.

Geometry of Hilbert and Quot schemes of points on smooth surfaces

TRONCOSO. S MEHROTRA S.

Abstract

In this talk we present a series of known results about the study of both geometric and topological properties for the punctual Hilbert schemes and punctual Quot schemes. Furthermore, in the case of the punctual Quot schemes we improve some results given by G. Ellingsrud and M. Lenh [1] about smoothness, irreducibility and dimension of this kind of spaces. Following the techniques presented [2] by G. Ellingsrud and S. Strømme, we derive a new formula to compute the Euler characteristic for some Quot schemes.

References

- [1] Ellingsrud, Geir and Lehn, Manfred. Irreducibility of the punctual quotient scheme of a surface, *Arkiv för Matematik* **37** No. 2 (1999), pp245–pp254.
- [2] Ellingsrud, Geir and Strømme, Stein Arild. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, *Inventiones mathematicae* **87** No. 2 (1987), pp343–pp352.

Distribución de K^2 para superficies estables

GIANCARLO URZÚA

Abstract

Alexeev demostró en [1] (mirar también [2]) que el conjunto de los K^2 de superficies estables tiene un mínimo, y que toda sucesión monótona es creciente. Desde entonces que no se sabe mucho sobre este conjunto de números racionales. Por ejemplo, >Cuál es el mínimo? >Cuáles son sus puntos de acumulación? >Tenemos un máximo cuando fijamos p_g ?

Mostraré algunos resultados en conjunto con José Ignacio Yáñez (Universidad de Utah).

References

- [1] V. Alexeev. Boundedness and K^2 for log surfaces, *Internat. J. Math.* **5**, no. 6(1994), 779–810.
- [2] V. Alexeev, S. Mori. Bounding singular surfaces of general type. *Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000)*, 143–174, Springer, Berlin, 2004.

Probabilidades

On the Marshall-Olkin Copula Model for Network Reliability under Dependent Failures

JAVIERA BARRERA

Abstract

The Marshall-Olkin (MO) copula model has emerged as the standard tool for capturing dependency in failure analysis in reliability. However, because the number of parameter of the model grows exponentially with the number of components, MO suffers of the “curse of dimensionality”. MO models are usually intended to be applied to design a network before its construction, therefore it is natural to assume that only partial information about failure behavior can be gathered, mostly from similar existing networks. To construct such a MO model, we propose an optimization approach to define the shock’s parameters in the MO copula, in order to match marginal failures probabilities and correlations between these failures. To deal with the exponential number of parameters of this problem, we use a column-generation technique. We also discuss additional criteria that can be incorporated to obtain a suitable model. Our computational experiments show that the resulting MO model produces a close estimation of the network reliability, especially when the correlation between component failures is significant.

Joint work with Omar Matus, Eduardo Moreno and Gerardo Rubino

Quantitative uniform propagation of chaos for the spatially homogeneous Boltzmann equation

ROBERTO CORTEZ

Abstract

The **Boltzmann equation** models the evolution of the distribution of positions and velocities of a huge number of particles in a gas in 3-dimensional space, subjected to elastic binary collisions. We focus on the **spatially homogeneous** version of the equation, which assumes that this distribution does not depend on the position variable, and the collisions are randomized. We study the corresponding finite N -particle system in the simpler Maxwell molecules case, which is an $(\mathbb{R}^3)^N$ -valued Markov jump process representing the evolution of the velocities of the N particles. The goal is to prove the so-called **propagation of chaos** property: the convergence, as $N \rightarrow \infty$ and for each time $t \geq 0$, of the empirical measure of the system towards the solution of the Boltzmann equation. Under suitable moments assumptions on the initial distribution, we find an explicit uniform-in-time propagation of chaos rate of order almost $N^{-1/3}$ in squared 2-Wasserstein distance.

Numerical solution of stochastic master equations using stochastic interacting wave functions

J. FERNÁNDEZ

Abstract

We develop a new approach for solving stochastic master equations with initial mixed quantum state. Thus, we deal with the numerical simulation of, for instance, continuous weak measurements on quantum systems. We focus on finite dimensional quantum state spaces. First, we obtain that the solution of the jump-diffusion stochastic master equation is represented by a mixture of pure states satisfying a system of stochastic differential equations of Schrödinger type. Then, we design three exponential schemes for these coupled stochastic Schrödinger equations, which are driven by Brownian motions and jump processes. The good performance of the new numerical integrators is illustrated by simulating the continuous monitoring of two open quantum systems formed by a quantized electromagnetic field interacting with a two-level system, under the effect of the environment. Hence, we have constructed efficient numerical methods for the stochastic master equations based on the simulation of quantum trajectories that describe the random evolution of interacting wave functions. This is a joint work with C. M. Mora (Universidad de Concepción, Chile) and R. Biscay (C. Centro de Investigación en Matemática, Guanajuato, México).

References

- [1] A. Barchielli and A. Holevo, *Constructing quantum measurement processes via classical stochastic calculus*, Stochastic Process. Appl., 58 (1995), pp. 293–317
- [2] C. Pellegrini, *Existence, uniqueness and approximation of the jump-type stochastic Schrödinger equation for two-level systems*, Stochastic Process. Appl., 120 (2010), pp. 1722–1747

Departamento de Ingeniería Matemática and CI²MA, Universidad de Concepción, Chile, e-mail: joafernandez@udec.cl

- [3] C. Mora, *Numerical solution of conservative finite-dimensional stochastic Schrödinger equations*, Ann. Appl. Probab., 15 (2005), pp. 2144–2171.
- [4] C. M. Mora, H. A. Mardones, J. C. Jimenez, M. Selva, and R. Biscay, *A stable numerical scheme for stochastic differential equations with multiplicative noise*, SIAM J. Numer. Anal., 55 (2017), pp. 1614–1649.

The Contact Process on Evolving Scale-Free Networks

AMITAI LINKER

Abstract

In this talk we present some results on the contact process running on large scale-free networks, where nodes update their connections at independent random times. We will show that depending on the parameters of the network we can observe either;

- that regardless of the infection rate there is always a virtual equilibrium, sustaining the infection for a long time, or
- that for small enough infection rates there is no virtual equilibrium so the infection dies out quickly.

This differs from previous results in the case of static scale-free networks where only the first behaviour is observed, and from networks with bounded degree where only the second behaviour is observed.

We will also show that the analysis of the asymptotic form of the metastable density of the process and its dependency on the model parameters can be used to understand the optimal mechanisms used by the infection to survive.

Joint work with Peter Mörters and Emmanuel Jacob.

References

- [1] Pastor-Satorras R and Vespignani A (2002). Epidemic dynamics in finite size scale-free networks. *Phys. Rev. E.* **65**, 035108(R).
- [2] Chatterjee S and Durrett R (2009) Contact processes on random graphs with power law degree distributions have critical value zero. *Ann. Probab.* **37**, 2332–2356.
- [3] Mountford T, Valesin D, and Yao Q (2013). Metastable densities for the contact process on power law random graphs. *Electron. J. Probab.* **103**, 1–36.

- [4] Berger N, Borgs C, Chayes JT, Saberi A (2005) On the spread of viruses on the internet. *Proceedings of the 16th Symposium on Discrete Algorithms*, (Association for Computing Machinery, New York), pp 301–310.

BIFURCACIÓN DE HOPF CUÁNTICA

CARLOS M. MORA

Abstract

Presentaremos el primer ejemplo, hasta donde conocemos, de bifurcación de Hopf en ecuaciones maestras cuánticas que describen la evolución de rayos laser. Conjuntamente con Franco Fagnola, Politecnico di Milano, hemos comprobado la presencia de este cambio estructural en la dinámica de la solución de una ecuación maestra cuántica de campo medio, que describe un sistema formado por un átomo de dos niveles acoplado a un modo de una cavidad, ambos en interacción con baños térmicos independientes. Haremos énfasis en el rol que juega el uso de técnicas de teoría de probabilidades en el estudio de la dinámica de esta ecuación maestra cuántica no-lineal, la cual es infinito-dimensional.

Supported in part by FONDECYT Grant 1140411 and BASAL Grants PFB-03.

Random Polymers on the Complete Graph

GREGORIO R. MORENO FLORES

Abstract

Consider directed polymers in a random environment on the complete graph of size N . This model can be formulated as a product of i.i.d. $N \times N$ random matrices and its large time asymptotics is captured by Lyapunov exponents. We detail this correspondence and derive the long-time limit of the model.

Next, we observe that the model becomes exactly solvable when the disorder variables are located on edges of the complete graph and follow a totally asymmetric stable law of index $\alpha \in (0, 1)$. Then, a certain notion of mean height of the polymer behaves like a random walk and we show that the height function is distributed around this mean according to an explicit law. Large N asymptotics can be taken in this setting, for instance, for the free energy of the system. Moreover, we give some perturbative results for environments which are close to the totally asymmetric stable laws.

This is a joint work with Francis Comets (Paris Diderot) and Alejandro Ramírez (PUC-Chile).

References

- [1] Comets, F., Moreno Flores, G., Ramírez, A. (2017) *Random Polymers on the Complete Graph*, arXiv:1707.01588

Acciones de grupos

Substitutions, automorphisms of the free group and measures.

N. BÉDARIDE

Abstract

In symbolic dynamics, it is classical to look at the set of ergodic measures supported by a subshift. A substitution is a morphism of the free monoid generated by a finite set. They define an important class of subshifts, where the set of ergodic measures is well understood. In this talk I will present a combinatorial tool introduced here to analyze, for a large class of automorphisms $\phi \in \text{Out}(F_N)$, the set of attracting fixed points of the ϕ -action on $\text{Curr}(F_N)$. This machinery also allows us to find new proofs of results concerning the number of ergodic measures supported by a S -adic system. This is a joint work with Arnaud Hilion and Martin Lustig.

References

- [1] N. Bédaride, A. Hilion and M. Lustig. Invariant measures for train track towers. Arxiv 1503.08000

Projective subdynamics of SFTs over virtually- Z groups

ÁLVARO BUSTOS GAJARDO

Abstract

Projective subdynamics allow the study of a subshift over a group G via other subshifts defined on subgroups $H \leq G$. In the present case, we are concerned with subshifts defined over virtually- Z groups, which have a “large” subgroup isomorphic to Z . The close relation of the group with its cyclic subgroup imposes a strong restriction over the kind of subshifts that can appear as projective subdynamics; moreover, combinatorial restrictions are now readily apparent.

In this work, we give a partial classification of the projective subdynamics of shifts of finite type (SFTs) over virtually- Z groups, on the same vein as the classification given for Z^k -SFTs shown in [1]. In particular, we discuss the “space restrictions” that arise in the realization of zero entropy Z -sofics. We also show an additional application of the tools developed to study the maximal entropy case, in which the entropy of the G -subshift equals that of its projective subdynamics. The result obtained is an analogue of the ones from [2], regarding the type of subshifts that can reach this bound.

Work done under the supervision of:

Michael Schraudner¹, CMM-DIM, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

References

- [1] Ronnie Pavlov and Michael Schraudner, *Classification of sofic projective subdynamics of multidimensional shifts of finite type*. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 3371-3421.
- [2] Aimee Johnson, Steve Kass and Kathleen Madden. *Projectional entropy in higher dimensional shifts of finite type*. Complex Systems **17** (2007), 243-257.

Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, Universidad de Chile. e-mail: abustos@dim.uchile.cl

¹e-mail: mschraudner@dim.uchile.cl

- [3] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular Automata and Groups*. Springer Science & Business Media, 2010.

EL PROBLEMA DE BURNSIDE PARA 2-GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS DE LA ESFERA

JONATHAN CONEJEROS

Abstract

Diremos que un grupo G es *finitamente generado* si existe un subconjunto finito $\mathcal{G}$ de G tal que todo elemento de G se escribe como un producto de elementos de $\mathcal{G}$. Diremos que G es *periódico* si todo elemento de G es de orden finito, esto es para todo $g \in G$ existe un número entero $n = n(g) \geq 1$ tal que $g^n = id$ (id denota el elemento neutro del grupo). El siguiente problema en teoría de grupos fue propuesto por W. Burnside en 1902 (ver [1]).

Problema de Burnside. *Sea G un grupo finitamente generado y periódico. ¿El grupo G es necesariamente finito?*

Es obvio que un grupo finitamente generado, periódico y abeliano es finito. En 1911, I. Schur (ver [8]) probó que esta conjetura es verdad para grupos lineales, subgrupos del grupo lineal sobre los números complejos. Pero E. S. Golod (ver [3]) demostró que la respuesta al problema de Burnside es negativa en general. Después, otros autores exhibieron muchos ejemplos de grupos finitamente generados, periódicos e infinitos cuyo exponente es acotado, esto quiere decir que el grupo no tiene elementos con orden muy grande.

Para *grupos no lineales* como el grupo de homeomorfismos, grupo de difeomorfismos se conjetura que tiene varias propiedades en común con el grupo lineal (ver [2] sobre el “Zimmer program”). Por ejemplo, la siguiente pregunta fue atribuida a É. Ghys y B. Farb en [2]:

Problema de Burnside para grupos de homeomorfismos. *Sea M una variedad conexa, compacta y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de M que sea finitamente generado y periódico. ¿El grupo G es necesariamente finito?*

En el caso del círculo, esta pregunta tiene una respuesta positiva. En efecto, un homeomorfismo no trivial de orden finito del círculo no tiene puntos fijos, por consecuencia la acción de un grupo periódico sobre el círculo es libre. Además, un teorema de Hilander establece que un grupo que actúa libremente sobre el círculo es necesariamente abeliano (ver sección 2.2.4 de [7]). Concluimos que si el grupo es finitamente generado y periódico entonces este es finito. Observemos que en el círculo, la hipótesis finitamente generado es crucial: por ejemplo el grupo de todas las rotaciones racionales del círculo es periódico e infinito.

Sin embargo, el problema de Burnside para grupos de homeomorfismos (o difeomorfismos) de una superficie (variedad de dimensión 2) compacta está aún sin resolver. Algunos avances para responder al problema de Burnside para grupos de homeomorfismos (para el caso de superficies) fueron demostrados por N. Guelman e I. Liousse (ver [4] y [5]) y muy recientemente por S. Hurtado (ver [6]). Ellos probaron que en algunos casos específicos tales grupos (de difeomorfismos) son necesariamente finitos, pero actualmente no se conocen contraejemplos al problema de Burnside para grupos de homeomorfismos de superficie.

Como consecuencia de los trabajos de N. Guelman e I. Liousse sabemos que si la superficie tiene género mayor o igual que 2 entonces el grupo debe ser finito. De aquí las superficies compactas interesantes para estudiar el problema de Burnside para grupos de homeomorfismos son la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y el toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Además N. Guelman e I. Liousse mostraron que el grupo también es finito en algunos casos particulares sobre estas superficies. Por ejemplo ellas demostraron el siguiente resultado.

Teorema 1 (N. Guelman e I. Liousse, [5]). *Sea G un 2-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{S}^2$ que es finitamente generado. Asumamos que el grupo G tiene exponente acotado. Entonces G es finito.*

Uno de los objetivos de esta charla es explicar (usando algunos resultados de [4]) como el resultado anterior puede ser extendido para 2-grupos de homeomorfismos de $\mathbb{S}^2$, esto es todo elemento del grupo tiene orden igual a una potencia de 2. Más específicamente nosotros demostraremos el teorema siguiente.

Teorema 2. *Sea G un 2-grupo de homeomorfismos de $\mathbb{S}^2$ que es finitamente generado. Asumamos que el grupo G tiene exponente acotado. Entonces G es finito.*

References

- [1] W. Burnside. On unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. J. Math. 33 (1902), 230-238.
- [2] D. Fisher. Groups acting on manifolds: around the Zimmer program. (e-print arXiv:0809.4849) (2008).

- [3] E. S. Golod. On nil algebras and finitely residual groups. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.* 1975, (1964), 273-276.
- [4] N. Guelman y I. Liousse. Burnside problem for measure preserving groups and for 2-groups of toral homeomorphisms. *Geometriae Dedicata* 168 (2014), no. 1, 387-396.
- [5] N. Guelman y I. Liousse. Burnside problem for groups of homeomorphisms of compact surfaces. *Bull. Braz. Math. Soc.* 48 (2017), no. 3, 389-397.
- [6] S. Hurtado. The Burside problem for $\text{Diff}_{vol}(\mathbb{S}^2)$. (e-print arXiv:1607.04603) (2016).
- [7] A. Navas. Groups of circle diffeomorphisms. Chicago lectures in mathematic series (2011).
- [8] I. Schur. über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper. [German] *Math. Ann.* 71 (1911), no. 3, 355-367.

Automorphism groups in symbolic dynamics

SEBASTIÁN DONOSO

Abstract

A subshift X is a closed subset of $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ where $\mathcal{A}$ is a finite alphabet (colors) and invariant under the shift action $\sigma: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. The automorphism group $\text{Aut}(X, \sigma)$ is the group of all homeomorphisms from X to itself that commute with σ . That is, $\text{Aut}(X, \sigma)$ is the group of self conjugacies of (X, σ) . Its study is a classical topic in symbolic dynamics but has regained a lot of attention in recent years, specially in the zero entropy case. In this talk I will survey some recent advances in the field and present many open questions.

References

- [1] M. Boyle, D. Lind, D. Rudolph. The automorphism group of a shift of finite type, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 71–114.
- [2] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a shift of subquadratic growth, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*, [arXiv:1403.0238](#).
- [3] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a shift of linear growth, *Forum of Mathematics, Sigma* **3** (2015), e5.
- [4] V. Cyr, B. Kra. The automorphism group of a minimal shift of stretched exponential growth. *J. Mod. Dyn.* **10** (2016), 483–495.
- [5] S. Donoso, F. Durand, A. Maass and S. Petite. On automorphism groups of low complexity subshifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **36** (2016), no. 1, 64–95.
- [6] S. Donoso, F. Durand, A. Maass and S. Petite. On automorphism groups of Toeplitz subshifts, *Discrete analysis* 2017:11, 19 pp.
- [7] M. Hochman. On the automorphism group of multidimensional SFTs. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **30** (2010), 809–840.

Elementos reversibles en Transformaciones de Intercambio de Intervalos.

NANCY GUELMAN

Abstract

Un elemento de un grupo es **reversible** si es conjugado a su inverso. Si la conjugación es una involución el elemento se dice **fuertemente reversible**. Analizaremos cuales son los elementos fuertemente reversibles en un grupo de transformaciones de intercambio de intervalos.

References

- [1] A. O’Farrel, I. Short. “Reversibility on Dynamics and Group Theory” , LMS Lecture Notes Serie 416. Cambridge University Press. 2015

Aperiodic $\mathbb{F}_k$ -Wang tilings with minimal alphabet size

HUGO MATURANA CORNEJO

Abstract

Motivated by the work of E.Jeandel and M.Rao [JR15], where the authors established the minimal amount of Wang tiles that produce a nonempty aperiodic $\mathbb{Z}^2$ -Wang tiling, and the article of S.Piantadosi [SP08], where he develops symbolic dynamics on $\mathbb{F}_k$, giving conditions so that a $\mathbb{F}_k$ -SFT has one periodic configuration. Our objective is to determine the minimal amount of Wang tiles needed to generate a nonempty aperiodic $\mathbb{F}_k$ -Wang tiling, with $k \geq 2$, in addition to obtaining every example with those characteristics and to determine the increase of the amount of Wang tiles with regard to the increase of k in $\mathbb{F}_k$.

Joint work with:

Michael Schraudner¹, CMM-DIM, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

References

- [Ber66] Berger, R. *The undecidability of the domino problem*. American Mathematical Soc, 1966.
- [CK96] Culik, K. An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3), 245-251.
- [JR15] Jeandel Emmanuel and Rao Michael. An aperiodic set of 11 Wang tiles. *arXiv:1506.06492*.
- [KA96] Culik, K. A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3), 259-264, 1966.
- [SP08] Piantadosi, S. T. *Symbolic dynamics on free groups*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 20(3), 725.

Departamento de ingeniería matemática, Universidad de Chile, e-mail: `hmaturana@dim.uchile.cl`

¹e-mail: `mschraudner@dim.uchile.cl`

Rigidez y geometricidad de acciones de grupos de superficies sobre el círculo

MAXIME WOLFF

Abstract

Consideramos representaciones desde un grupo de superficie cerrada a $\text{Homeo}^+(S^1)$. Kathryn Mann ha probado que las representaciones geometricas (ie, que levantan una representación fiel y discreta en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$) son rigidas (ie, todas sus deformaciones son semi-conjugadas). Junto con ella, probamos la reciproca: todas las representaciones rigidas son geometricas.

Teoría de representaciones

Ansatz de Bethe algebraica y funciones simétricas

JAN FELIPE VAN DIEJEN

Abstract

Usamos soluciones de la ecuación de Yang-Baxter cuántica, para estudiar formulas de Pieri y formulas de ramificación para los polinomios de Hall-Littlewood asociados a los grupos clásicos. (Trabajo conjunto con Erdal Emsiz).

Completeness of the Bethe Ansatz for an open q-boson system with integrable boundary interactions

ERDAL EMSIZ

Abstract

We will talk about a discrete integral-reflection representation of the five-parameter double affine Hecke algebra of type $C^\vee C$ at the critical level $q = 1$. Using this representation we endow the open finite q-boson system with integrable boundary interactions at the lattice ends. We will explain how the Bethe Ansatz entails a complete basis of eigenfunctions for the commuting quantum integrals in terms of Macdonald's three-parameter hyperoctahedral Hall-Littlewood polynomials. (This is joint work with J. F. van Diejen and I. N. Zurrián)

On the injectivity of affine Hecke algebras towers and related towers

SADEK AL HARBAT

Abstract

We define the tower of affine Hecke algebras related to each infinite family of affine Coxeter groups. noticing the non-papbolicity settings we explain the braid origins of these tower and the affine T-L algebras towers resulting, then we show some consequences of the injectivity of the defined towers.

Jucys-Murphy elements for the diagrammatical category of Soergel bimodules

STEEN RYOM-HANSEN

Abstract

Soergel introduced a category of bimodules in the nineties during his proof of the Kazhdan-Lusztig conjectures. Over the last years, a diagrammatical version $\mathcal{D}$ of this category has been developed which is better behaved in positive characteristic than the original category. Elias and Williamson proved that $\mathcal{D}$ is cellular.

In this talk we construct a family of Jucys-Murphy elements for $\mathcal{D}$. We show that they satisfy a separation criterion over the field of fractions of the ground ring which leads to a formula for the determinant of the bilinear form on the cell modules. This leads to Jantzen type filtrations and associated sum formulas.

Representations of right-angled Coxeter and Artin groups

PAOLO SENTINELLI

Abstract

We will show a way to construct an integral representation of a right-angled Coxeter group; such a representation extends to two representations of the Hecke algebra of the group. A class of representations of an Artin group will be given injecting this group in the Hecke algebra of the corresponding Coxeter group.

Sesión de pósters

1. Sobre el árbol de Bruhat-Tits y fracciones continua.
Claudio Bravo, Universidad de Chile.
2. Traza relativa de Markov en el Álgebra de Yokonuma-Hecke2.
Nelson Díaz, Universidad de Valparaíso.
3. Estudio de un problema inverso en un sistema de reacción de enzimas inmovilizadas.
Diego Gajardo, Universidad Técnica Federico Santa María.
4. El trabajo matemático en la modelización: Un diálogo entre el ciclo Blum-Borromeo y ETM.
Saúl Cosmes, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
5. La modificación de Nash.
Rolando Suárez, Universidad de Talca.