Programa de la sesión de Sistemas Dinámicos

Jueves 2 de Noviembre

• 15:40–16:10 Nicolás Pinto, Universidad de Chile.
Dicotomía exponencial generalizada en sistemas diferenciales no autónomos.

• 16:10–16:40 Ignacio Huerta, Universidad de Santiago de Chile.
Espectro y conjunto contractible de un sistema diferencial no autónomo.

• 16:40–17:10 Gonzalo Robledo, Universidad de Chile.
Dichotomy Spectrum and topological conjugacy on nonautonomous unbounded difference system.

Viernes 3 de Noviembre

• 11:10–11:40 Alma Armijo, Universidad de Las Américas.
Difeomorfismos expansivo en medida: condiciones y ejemplos.

• 11:40–12:10 Francisco Valenzuela, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Dinámicas parcialmente Hiperbólicas y exponentes de Lyapunov.

• 12:10–12:40 Eduardo Oregón, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Una nueva desigualdad para cociclos de matrices y una fórmula de Berger–Wang.

LXXXVI Encuentro Anual. Talca 2017
Sociedad de Matemática de Chile

DICOTOMÍA EXPONENCIAL GENERALIZADA EN SISTEMAS DIFERENCIALES NO AUTÓNOMOS *

NICOLÁS PINTO PÉREZ †

Abstract

Consideremos el sistema lineal no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

Decimos que el sistema (1) está dotado de dicotomía exponencial cuando existe una proyección P y constantes positivas K, α tales que si X representa la matriz fundamental de (1), entonces:

$$||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad (t \geq s) \tag{2}$$

$$||X(t)(I-P)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}. \quad (s \geq t) \tag{3}$$

Definimos también el espectro de Sacker y Sell del sistema (1) como el conjunto:

$$\Sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \dot{x} = (\lambda I - A(t))x \text{ no tiene dicotomía exponencial}\}. \tag{4}$$

Existen numerosos resultados (por ejemplo [2],[3]) que proporcionan a este conjunto propiedades destacadas que permiten describir la dinámica e hiperbolicidad del sistema (1). Además, cuando la matriz $A(t)$ es acotada, es posible caracterizar el espectro como una unión finita no vacía de intervalos compactos disjuntos.

En esta sesión se mostrará la noción de dicotomía exponencial generalizada introducida por L. Jiang en [1], algunas de sus propiedades y un ejemplo que evidencia diferencias entre la teoría espectral de Sacker y Sell y el espectro asociado a la dicotomía exponencial generalizada.

References

[1] L. Jiang, Generalized exponential dichotomy and global linearization, J. Math. Anal. Appl. 192 (1995) 813-832.

[2] R. Sacker, A Spectral Theory for Linear Differential Systems, J. Differential equations, 27 (1978), 320-358.

[3] J. Palmer, Exponential Separation, Exponential Dichotomy and Spectral Theory for Linear Systems of Ordinary Differential Equations, J. Differential equations, 46 (1982), 324-345.

*Trabajo de tesis supervisado por Gonzalo Robledo Veloso. Financiado por proyecto FONDECYT 1170968.

†Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile , e-mail: nicolas.pinto.p@ug.uchile.cl

LXXXVI Encuentro Anual. Talca 2017
Sociedad de Matemtica de Chile

Espectro y conjunto contractible de un sistema diferencial no autónomo

Ignacio Huerta Navarro
e-mail:ignacio.huerta@usach.cl*
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Santiago-Chile †

Abstract

En esta charla mostraremos como un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

donde $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, es contraído al espectro de la dicotomía exponencial (Sacker-Sell) cuando el sistema (1) admite dicotomía exponencial.

Decimos que el sistema (1) es contraído a un compacto E (ver [2]) si para cualquier $\delta > 0$, existen n funciones escalares continuas $C_1(t),\ \ldots,\ C_n(t)$ y matriz $B(t)$ continua de $n \times n$ tal que

$$C_i(t) \in E\,, \quad \|B(t)\| \leq \delta \quad (t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots,\ n),$$

y el sistema (1) es cinemáticamente similar a

$$\dot{y} = C(t)y + B(t)y,$$

donde $C(t) = diag(C_1(t), \ldots, C_n(t))$.

En el marco de mi trabajo de tesis doctoral, decimos que el sistema (1) admite **dicotomía exponencial no uniforme** (ver [1]) sobre un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ si existe un proyector $P(t)$ invariante para todo $t, s \in J$, constantes $K \geq 1$, $a < 0 < b$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|\Phi(t,s)P(s)\| &\leq Ke^{a(t-s)+\varepsilon|s|},\ t \geq s, \quad t,s \in J, \\ \|\Phi(t,s)(I-P(s))\| &\leq Ke^{-b(s-t)+\varepsilon|s|},\ t \leq s, \quad t,s \in J. \end{aligned}$$

Asociada a la dicotomía exponencial no uniforme tenemos su espectro $\Sigma(A)$ el cual es definido como $\Sigma(A) = \{\gamma \in \mathrm{R}\ |\dot{x} = (A(t) - \gamma I)x \ \ no\ \ admite\ \ dic.\ exp.\ no\ \ uniforme\}$, y que bajo ciertas hipótesis sobre el operador de evolución, se puede escribir como unión

*Parcialmente financiado por Beca Conicyt

†Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile e-mail: ignacio.huerta@usach.cl

finita de intervalos compactos, generalizando en cierto modo el espectro de los autovalores cuando $A(t) = A$.

Finalmente, siguiendo el trabajo de F. Lin [2] mostraremos como $\Sigma(A)$ es nuestro candidato a compacto que satisface esta propiedad cuando el sistema (1) admite dicotomía exponencial no uniforme.

Trabajo conjunto con: Álvaro Castañeda

Autor 2[1], Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago-Chile
e-mail: `castaneda@uchile.com`

References

[1] L. Barreira, C. Valls, Smoothness of invariant manifolds for nonautonomous equations. Commun. Math. Phys. **59** (2005), 639–677.

[2] F. Lin, Spectrum and contractible set of linear differential systems. Chinese Journal of Contemporary Mathematics. **11** (1990), 425–450 (Chinese).

[1]Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 1170968

LXXXVI Encuentro Anual. Talca 2017
Sociedad de Matemática de Chile

Dichotomy Spectrum and topological conjugacy on nonautonomous unbounded difference system

Álvaro Castañeda, Gonzalo Robledo *

Abstract

We will consider the nonautonomous linear system

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{1}$$

where $x(n)$ is a column vector of R^d and the matrix function $n \mapsto A(n) \in R^{d\times d}$ is non singular. We also assume that (1) has an exponential dichotomy on Z [1] with projector $P = I$. We also consider the perturbed system

$$w(n+1) = A(n)w(n) + f(n, w(n)), \tag{2}$$

where $f\colon Z \times R^d \to R^d$ is continuous in R^d is a Lipschitz function such that $n \mapsto f(n, 0)$ is bounded for any Z.

We will present a result with sufficient conditions ensuring that (1) and (2) are topologically equivalent, namely the existence of a map $H\colon Z \times R^d \to R^d$ with the following properties: i) For each fixed $n \in Z$, the map $u \mapsto H(n, u)$ is a bijection. ii) For any fixed $n \in Z$, the maps $u \mapsto H(n, u)$ and $u \mapsto H^{-1}(n, u) = G(n, u)$ are continuous. iii) If $x(n)$ is a solution of (1), then $H[n, x(n)]$ is a solution of (2). Similarly, if $w(n)$ is a solution of (2), then $G[n, w(n)]$ is a solution of (1).

This result can also be seen as a generalization of a continuous result obtained by Lin in [3].

References

[1] B. Aulbach, S. Siegmund, *The dichotomy spectrum for noninvertible systems of linear difference equations*. J. Diff. Eqs. Appl., **7** (2001) 895–913.

[2] A. Castañeda, G. Robledo, *Almost reducibility of linear difference systems from a spectral point of view*, preprint, arXiv: 1607.00981.

[3] F. Lin, *Hartman's linearization on nonautonomous unbounded system*, Nonlinear Analysis **66** (2007) 38–50.

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, e-mail: grobledo@uchile.cl

Difeomorfismos expansivo en medida: condiciones y ejemplos.

Alma Armijo Averill *

Abstract

Resumen

En ésta presentación vamos a definir lo que es un difeomorfismo que tiene la propiedad de ser expansivo en medida, daremos ciertas condiciones que necesitan los difeomorfismos para que tengan la propiedad, tambin vamos a ver que realcin hay entre la propiedad y condiciones de hiperbolicidad, así mostraremos algunos ejemplos interesantes. También comentaré los resultados que estamos desarrollando con respecto al tema.

References

[1] Ahn, J., Lee, K., Lee, M., Positively Measure Expansive and Expanding, Commun. Korean Math. Soc. 29, No. 2, 345-349, 2014.

[2] Arbieto, A., Morales, C., Expansive measures, Publ. Mat. Urug. 14 , 61-71, 2013.

[3] Lee, K.; Lee, M.; Moriyasu, K.; Sakai, K. , Positively measure-expansive differentiable maps., J. Math. Anal. Appl., 435, 492-507, 2016.

[4] Morales, C. A., Measure expansive systems Preprint IMPA, D083, 2011.

[5] Pacifico, M. J., Vieitez, J., On measure expansive diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 143, no. 2, 811-819, 2015.

[6] Sakai, K., Positively Expansive Differentiable Maps, Acta Math. Sinica, No. 10, 1839-1846, 2010.

[7] Sakai, K., Sumi, N., Yamamoto, K., Measure Expansive Diffeomorphisms, J. Math. Anal. Appl., 414, 546-552, 2014.

*Instituto de Matemática, Física y Estadística, Universidad de las Américas, e-mail: aarmijo@udla.cl

LXXXVI Encuentro Anual. Talca 2017
Sociedad de Matemática de Chile

Dinámicas Parcialmente Hiperbólicas y Exponentes de Lyapunov

Francisco Valenzuela–Henríquez [*]

Abstract

En el estudio de los sistemas dinámicos, es usual buscar propiedades robustas (aquellas que se conservan por una perturbación del sistema) y propiedades genéricas (aquellas que ocurren en un conjunto residual de todos los sistemas). Una propiedad importante de estudio es el de hiperbolicidad uniforme, que a pesar de ser robusta, está lejos de ser genérica (Fenómeno de Newhouse).

En esta charla, nos concentraremos en como generalizar la noción de hiperbolicidad uniforme. Una de estas formas es usando los exponentes de Lyapunov asociados al sistema, que en el caso en que todos los exponentes sean distintos de cero, diremos que nuestro sistema es "no–uniformemente hiperbólico".

Finalizaremós presentando un resultado en conjunto con Radu Saghin y Carlos H. Vásquez en el que bajo ciertas hipótesis, tenemos abundancia de hiperbolicidad no–uniforme.

[*]Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. e-mail: francisco.valenzuela@pucv.cl

LXXXVI Encuentro Anual. Talca 2017
Sociedad de Matemática de Chile

Una nueva desigualdad para cociclos de matrices y una fórmula de Berger-Wang

Eduardo Oregón-Reyes *

Abstract

En esta charla se mostrará una desigualdad que relaciona la norma de un producto de matrices $A_n \cdots A_1$ con los radios espectrales de los subproductos $A_j \cdots A_i$, con $1 \leq i \leq j \leq n$. Entre las consecuencias de esta desigualdad, se reobtiene la formula clásica de Berger-Wang, y se da una demostración más sencilla de una caracterización para el mayor exponente de Lyapunov, realizada por Ian Morris. Como ingrediente principal para la prueba de este resultado, se mostrará que para n suficientemente grande, el producto $A_n \cdots A_1$ es nulo bajo la hipótesis que las matrices $A_j \cdots A_i$ sean nilpotentes para todo $1 \leq i \leq j \leq n$.

References

[1] E. Oregón-Reyes, A new inequality about matrix products and a Berger-Wang formula. http://arxiv.org/abs/1710.00639, preprint 2017.

[2] M. Berger, Y. Wang, Bounded semigroups of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **166**, 21–27, 1992.

[3] J. Bochi, Inequalities for numerical invariants of sets of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **368**, 71-81, 2003.

[4] I. D. Morris, The generalised Berger-Wang formula and the spectral radius of linear cocycles. *Journal of Functional Analysis* **262**, 811–824, 2012.

[5] E. Oregón-Reyes, Properties of sets of isometries of Gromov hyperbolic spaces. http://arxiv.org/abs/1606.01575, preprint 2016.

*Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile , e-mail: ecoregon@mat.uc.cl