UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONCENTRACIÓN EN UN PROBLEMA ELÍPTICO 2-DIMENSIONAL CON CONDICIONES NEUMANN DE EXPONENTE GRANDE

HERNÁN IGNACIO CASTRO ZÚÑIGA

2006

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONCENTRACIÓN EN UN PROBLEMA ELÍPTICO 2-DIMENSIONAL CON CONDICIONES NEUMANN DE EXPONENTE GRANDE

HERNÁN IGNACIO CASTRO ZÚÑIGA

COMISIÓN EXAMINADORA		CALIFICACIONES:		
		NOTA (n°)	(Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA SR. JUAN DÁVILA BONCZOS	:	....	....	....
PROFESOR CO-GUÍA SR. MANUEL DEL PINO MANRESA	:	....	....	....
PROFESOR INTEGRANTE SR. MICHAŁ KOWALCZYK	:	....	....	....
PROFESOR INTEGRANTE SRA. MONICA MUSSO POLLA	:	....	....	....
NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO	:	....	....	....

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO - CHILE
AGOSTO - 2006

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: HERNÁN CASTRO ZÚÑIGA
FECHA: 25 DE AGOSTO DE 2006
PROF. GUÍA: SR. JUAN DÁVILA

CONCENTRACIÓN EN UN PROBLEMA ELÍPTICO 2-DIMENSIONAL CON CONDICIONES NEUMANN DE EXPONENTE GRANDE

En este trabajo de título se presenta un estudio de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = u^p & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio en el plano de frontera suave y p es un parámetro que tiende a infinito. Tal estudio tiene como objetivo final probar la existencia de una familia de soluciones que presenten concentración en puntos de la frontera de Ω.

Para obtener tal resultado, se ha procedido siguiendo un esquema de reducción finito-dimensional, lo que consiste, en términos generales, en buscar una solución de la forma $U + \phi$, donde U es una función escogida adecuadamente y ϕ es un término de ajuste, cuya existencia está ligada a un problema en dimensión finita. El marco analítico funcional que se plantea, es el mismo utilizado por del Pino, Kowalczyk y Musso en su estudio del problema de Liouville, pero siguiendo lo realizado por Dávila, del Pino y Musso, quienes analizan un problema de frontera asociado al del Liouville, y lo expuesto por Esposito, Musso y Pistoia respecto a un problema interior análogo al que aquí se presenta.

La primera parte de esta memoria trata con la elección de una buena aproximación inicial, la función U, de modo que se tenga el comportamiento asintótico esperado, y que el error obtenido sea lo suficientemente pequeño. El trabajo continúa al reescribir la ecuación original, para obtener una ecuación no-lineal en términos de ϕ. Para estudiar dicha ecuación, primero se realiza un completo análisis de la invertibilidad de un problema lineal asociado. En segundo lugar, se analiza la existencia en una ecuación no-lineal auxiliar vía un esquema de punto fijo, entregando, además, las condiciones necesarias de regularidad sobre la solución para reducir el problema de existencia de soluciones del problema original, al de encontrar puntos críticos de una función finito-dimensional. Finalmente, demostramos que dicha función finito-dimensional admite al menos dos puntos críticos y que tales puntos críticos resultan ser los puntos en donde se produce concentración.

Finalmente, se formulan algunas interrogantes respecto a posibles mejoras en el resultado obtenido. Así también, siguiendo lo realizado por Adimurthi y Grossi, como lo desarrollado en trabajos de Ren y Wei respecto al problema interior asociado, se conjeturan ciertos resultados que se podrían obtener respecto al comportamiento asintótico de la solución de mínima energía de este problema.

Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer a mi Madre por todo el apoyo brindado durante estos años. Es gracias a ella, y sus palabras de ánimo y confianza que desde pequeño escucho, que me permiten terminar una etapa más al presentar este documento.

Agradezco también a mi círculo familiar más cercano: mis dos Tíos, a mi Abuela y mi Abuelo, quienes han sido un soporte fundamental a lo largo de mi vida.

También agradezco a mi profesor guía Juan Dávila, por los consejos y palabras de apoyo durante el trabajo de título. Asimismo, agradezco a la Comisión y en general a todo el grupo docente del DIM, por su gran disposición a enseñar.

Agradezco a mis compañeros por su amistad, apoyo y buena onda en general, haciendo que estos años juntos hayan sido más que simplemente años de estudio.

Finalmente mis agradecimientos a quienes crearon el entorno adecuado para poder escribir este documento: Linus Torvalds por crear GNU/Linux, a Donald Knuth y a Leslie Lamport por desarrollar TeX y LaTeX respectivamente, y finalmente a los creadores de Kile por hacer un editor tan poderoso y fácil de usar.

"Facts are meaningless. You could use facts to prove anything that's even remotely true! Facts, schmacks"

Homer J. Simpson

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$ suave (de clase al menos C^2). El trabajo de título que se presenta a continuación trata del análisis de soluciones al problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = u^p & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

donde ν denota la normal exterior a $\partial\Omega$ y $p > 1$ es un exponente grande.

El propósito final de este trabajo de título es probar un teorema de existencia de soluciones que se concentran en puntos de la frontera de Ω.

1.1. Breve Marco Histórico

Para abordar este problema, la técnica utilizada es el llamado **“Método de Reducción Variacional de Liapunov-Schmidt”**, que a grandes rasgos, no es más que una aplicación avanzada del Teorema de la Función Implícita (para una exposición más detallada al respecto, una buena referencia es lo expuesto por Nirenberg en [Nir01]).

Una de las primeras aplicaciones de este método en la búsqueda de soluciones concentradas a ecuaciones diferenciales, se puede encontrar en un trabajo de Floer y Weinstein [FW86], quienes muestran que la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi - \gamma\psi^2\psi, \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t \geq 0\}$$

posee soluciones del tipo *standing waves* que se concentran cerca de cada punto crítico no-degenerado del potencial V, bajo las hipótesis que: $\gamma > 0$, V es acotado y $\hbar$ es suficientemente pequeño. Este resultado posteriormente fue extendido, utilizando el mismo método, por Oh a más dimensiones, construyendo soluciones con múltiples *peaks*, [Oh88, Oh90]. A partir de la publicación de Floer y Weinstein, el uso del método ha sido desarrollado y mejorado durante las últimas dos décadas, siendo posible encontrar en la literatura variados resultados respecto a concentración de soluciones de ecuaciones diferenciales ([dPDM04, dPF97, dPKW05, GG98, GW99, GWW00, NPT92, WW98] entre otros).

La adaptación que utilizaremos, es la presentada por del Pino, Kowalczyk y Musso en [dPKM05]. Ellos analizan el problema de Liouville

$$\begin{cases} \Delta u + \varepsilon^2 e^u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

introduciendo un nuevo marco analítico-funcional dentro del esquema de reducción variacional. En [dPKM05], los autores prueban, bajo ciertos supuestos sobre la riqueza topológica de Ω, que dado cualquier entero positivo m, entonces existe una familia de soluciones u_ε, tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \int_\Omega e^{u_\varepsilon} = 8\pi m,$$

más precisamente, prueban que $\varepsilon^2 e^{u_\varepsilon}$ se concentra como m masas de Dirac en puntos críticos de un funcional que depende de la función de Green para $-\Delta$, bajo condiciones de tipo Dirichlet.

Asimismo, en el problema de Neumann estudiado por Dávila, del Pino y Musso en [DdPM05],

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varepsilon e^u & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se repite el esquema y el marco funcional antes mencionado, para probar que existen al menos 2 familias de soluciones tales que para cada $m \geq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{\partial\Omega} e^{u_\varepsilon} = 2\pi m,$$

más aún, vuelven a caracterizar los puntos en los que se produce concentración, mediante la localización de puntos críticos de un funcional que involucra una función de Green asociada a este problema, que, de hecho, resulta ser la misma función φ_m que introducimos más adelante.

Finalmente, mostramos lo desarrollado por Esposito, Musso y Pistoia en [EMP06], respecto al problema

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0 & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

puesto que el resultado obtenido por ellos es el que intentamos repetir para nuestro caso. Tal resultado dice que dado un entero $m \geq 1$, y $p > 1$ suficientemente grande, existe una solución que satisface

$$pu_p(x)^{p+1} \rightharpoonup 8\pi e \sum_{j=1}^{m} \delta_{\xi_j}.$$

Al igual que en [dPKM05], los puntos en donde se produce concentración, están ligados a la búsqueda de puntos críticos de un funcional definido a partir de la función de Green para $-\Delta$ bajo condiciones de borde tipo Dirichlet.

1.2. Preliminares y enunciado del Teorema

Para comenzar, consideremos

$$I_p(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \quad y \quad S_p = \inf_{u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} I_p(u).$$

Gracias a que la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\partial\Omega)$ es compacta para todo $p > 0$, obtenemos que S_p es alcanzado por una función $u_p \in H^1(\Omega)$, que se conoce como la solución de mínima energía de (1.0.1). Respecto a estas soluciones, la bibliografía es más bien escasa, por lo que sólo tenemos como referencia lo hecho por Ren y Wei, [RW94, RW96], respecto a las soluciones de mínima energía para el problema

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

es decir, la función de $H_0^1(\Omega)$ que minimiza el funcional

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}$$

y es solución débil de (1.2.1). En esos trabajos se muestra que dicha solución, tiene norma L^∞ acotada y acotada lejos de cero, uniformemente en p, para p suficientemente grande. Más aún, pasando a una subsucesión, muestran que

$$p\,|\nabla u_p|^2 \ \text{ y } \ p u_p^{p+1}$$

se comportan como una delta de Dirac en torno a un punto crítico de la función de Robin $H(x,x)$, donde H es la parte regular de la función de Green del Laplaciano, con condición de Dirichlet homogénea, es decir $H(x,y) = G(x,y) - \log \frac{1}{|x-y|}$ y G solución de

$$\begin{cases} -\Delta G(x,y) = 2\pi\delta_y & x \text{ en } \Omega \\ G(x,y) = 0 & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sobre la solución de mínima energía para (1.2.1), tenemos también lo hecho por Adimurthi y Grossi, [AG04], y por El Mehdi y Grossi, [EMG04], quienes describen de manera más precisa el comportamiento de u_p a medida que p tiende a infinito, luego de identificar el problema límite del tipo Liouville para (1.2.1) dado por

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^u < \infty, \end{cases}$$

y mostrar que $\|u_p\|_\infty \to \sqrt{e}$ cuando $p \to \infty$.

Basándonos en los trabajos antes mencionandos, podríamos conjeturar que lo mismo se tendrá en nuestro caso. Es decir, debiéramos ser capaces de mostrar que, para $u_p \in H^1(\Omega)$ solución de mínima energía de (1.0.1), la norma L^∞ permanecerá acotada y lejos de cero, y más aún, procediendo como en [AG04], podríamos identificar el siguiente problema límite para (1.0.1)

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = e^v & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+ \\ \displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v < \infty, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

y mostrar que $\|u_p\| \to \sqrt{e}$ cuando $p \to \infty$.

Observación 1.1. Dado que lo necesitaremos, es conveniente mencionar que gracias a lo realizado en [LZ95, Ou00, Zha03], las únicas soluciones de (1.2.2) están dadas por la familia

$$v_{(t,\mu)}(x_1,x_2) = \log \frac{2\mu}{(x_1-t)^2 + (x_2+\mu)^2}, \tag{1.2.3}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0$ son parámetros.

Ahora bien, en esta memoria haremos el proceso "inverso", en el sentido que comenzaremos por construir soluciones de (1.0.1) a partir de $v_{(t,\mu)}$, que luego de una transformación adecuada, parezcan como una suma de soluciones de (1.2.2), concentradas en puntos de la frontera $\xi_1, \dots, \xi_m$ a medida que $p \to \infty$.

Tal como lo anunciamos, la función de Green para el problema de Neumann dada por

$$\begin{cases} -\Delta_x G(x,y) + G(x,y) = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y) = 2\pi \delta_y(x) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

y $H(x,y) = G(x,y) - \log \frac{1}{|x-y|^2}$, su parte regular, juegan un rol fundamental en la localización de los puntos donde se presenta concentración, más precisamente, si definimos, para $\xi \in \partial\Omega^m$, la función

$$\varphi_m(\xi) = -\sum_{i=1}^{m} \left(H(\xi_i, \xi_i) + \sum_{j \neq i} G(\xi_i, \xi_j) \right), \tag{1.2.5}$$

tenemos entonces el siguiente teorema, que es el resultado principal de este trabajo de título:

Teorema 1.1. *Sea $m \geq 1$ un entero. Entonces para $p > 1$ suficientemente grande, existen al menos dos soluciones u_p de (1.0.1) que satisfacen*

$$p u_p(x)^{p+1} \rightharpoonup 2\pi e \sum_{j=1}^{m} \delta_{\xi_j},$$

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \partial\Omega$ es un punto crítico de φ_m. Más precisamente, existe una secuencia $\xi^p = (\xi_1^p, \dots, \xi_m^p) \in \partial\Omega^m$ convergiendo a ξ, tal que $u_p \to 0$ uniformemente en $\Omega \setminus \cup_{j=1}^m B_d(\xi_j^p)$ y

$$\sup_{x \in B_d(\xi_j^p)} u_p(x) \xrightarrow[p \to \infty]{} \sqrt{e},$$

para cualquier $d > 0$ y cualquier $j = 1, \dots, m$.

1.3. Descripción del método utilizado

A continuación se describe lo realizado en las distintas partes en las que se dividió la demostración del Teorema 1.1.

En la Sección 2.1, entregamos una primera aproximación para la solución que estamos buscando, que llamaremos *ansatz*,[1] que será construida a partir de una familia de traslaciones

[1]Palabra de origen alemán. Se puede traducir como: planteamiento, adivinanza.

y escalamientos de la función $v_{(0,1)}$, de modo que el error asociado, por tratarse de una aproximación, tenga el tamaño apropiado, más precisamente, luego de medir el error en una norma en L^∞, este converja a cero a una tasa lo suficientemente rápida cuando p tiende a infinito. Para tales efectos, será necesaria la elección certera de los parámetros de escalamiento antes mencionados, como de la norma a utilizar en L^∞.

Luego, en la Sección 2.2, analizamos una ecuación lineal relacionada a nuestro problema. El objetivo final de esta parte de la demostración es analizar la existencia de soluciones para dicho problema lineal, situación que, debido a la naturaleza altamente singular del operador involucrado, lleva la mayor parte del trabajo asociado a la demostración.

A continuación, en la Sección 2.3, gracias a los resultados obtenidos respecto al problema lineal anterior y un resultado de punto fijo, resolvemos un problema no-linear auxiliar, que nos permite realizar una reducción variacional en la Sección 2.4. Esto consiste en reducir el problema de existencia de una solución para (1.0.1), a encontrar puntos críticos de una función en dimensión finita, que está íntimamente ligada al funcional de energía asociado al problema (1.0.1).

En la Sección 2.5 realizamos una expansión asintótica del funcional de energía, e identificamos a φ_m como el término principal de dicha expansión. Finalmente en la Sección 2.6 probamos el teorema, al demostrar que la función φ_m posee al menos los dos puntos críticos, a partir de los cuales, obtenemos las soluciones anunciadas por el Teorema 1.1.

Capítulo 2

Estudio del Problema

2.1. Buscando el *Ansatz*

Esta sección está dedicada a la búsqueda de la aproximación adecuada para una solución de (1.0.1). En primer lugar, entregamos un *ansatz* que resulta no ser el más indicado, pero que sin embargo, da el pie para la construcción del *ansatz* final. Esta última construcción se basa en la existencia de soluciones para un problema lineal en el semi-plano.

2.1.1. *Ansatz* inicial - error $\frac{1}{p^2}$

En primer lugar, notemos que u satisface (1.0.1) sí y solo sí $v(y) = \delta^{\frac{1}{p-1}} u(\delta y + \xi),\ y \in \Omega_{\delta,\xi}$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta v + \delta^2 v = 0 & \text{en } \Omega_{\delta,\xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = v^p & \text{en } \partial\Omega_{\delta,\xi}, \end{cases}$$

donde $\Omega_{\delta,\xi} = \frac{\Omega - \xi}{\delta}$.

Con esto en mente, pensamos construir una solución aproximada de (1.0.1) que tenga un punto de concentración. A partir de (1.2.3), se define, dados $\xi \in \partial\Omega$ y $\delta > 0$, la función

$$u_\xi(x) = \log \frac{2\delta}{|x - \xi - \delta \nu_\Omega(\xi)|^2}, \tag{2.1.1}$$

donde $\nu_\Omega(x)$ denota la normal exterior a Ω en x. En lo que sigue, sólo escribiremos la dependencia en el dominio de la normal cuando sea necesario. Notemos que

$$u_\xi(x) = v(A(\frac{x-\xi}{\delta})) - \log\delta,$$

donde $v(y) = v_{(0,1)}(y)$ y $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ es una rotación tal que

$$A\nu_\Omega(\xi) = \nu_{\mathbb{R}^2_+}(0). \tag{2.1.2}$$

Un primer *ansatz* para una solución que presente concentración en un punto $\xi \in \partial\Omega$ viene dado por

$$U_\xi(x) = \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{1}{p-1}}}\left(u_\xi(x) + H_\xi(x)\right),$$

con H_ξ un término de corrección definido como una solución de

$$\begin{cases} -\Delta H_\xi + H_\xi = -u_\xi & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial H_\xi}{\partial\nu} = e^{u_\xi} - \dfrac{\partial u_\xi}{\partial\nu} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Respecto a H_ξ tenemos el siguiente

Lema 2.1. *Para cualquier* $0 < \alpha < 1$

$$H_\xi(x) = H(x,\xi) - \log 2\delta + O(\delta^\alpha),$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$*, donde* $H(x,y)$ *es la parte regular de la función de Green definida en* (1.2.4)*.*

Demostración Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\xi}{\partial\nu} &= e^{u_\xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial\nu} \\ &= \frac{2\delta}{|x-\xi-\delta\nu(\xi)|^2} + 2\frac{(x-\xi-\delta\nu(\xi))\cdot\nu(x)}{|x-\xi-\delta\nu(\xi)|^2} \\ &= \frac{2\delta + 2(x-\xi-\delta\nu(\xi))\cdot\nu(x)}{|x-\xi-\delta\nu(\xi)|^2} \end{aligned}$$

Notemos que si $x \neq \xi$ entonces

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial H_\xi}{\partial\nu}(x) = 2\frac{(x-\xi)\cdot\nu(x)}{|x-\xi|^2}.$$

Ahora, la parte regular de la función de Green satisface

$$\begin{cases} -\Delta_x H(x,y) + H(x,y) = -\log \dfrac{1}{|x-y|^2} & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial H}{\partial \nu_x}(x,y) = 2\dfrac{(x-y)\cdot\nu(x)}{|x-y|^2} & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definimos $z(x) = H_\xi(x) + \log 2\delta - H(x,\xi)$, que satisface

$$\begin{cases} -\Delta z + z = \log \dfrac{1}{|x-\xi|^2} - \log \dfrac{1}{|x-\xi-\delta\nu(\xi)|^2} & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = \dfrac{\partial H_{\xi,p}}{\partial \nu} - 2\dfrac{(x-\xi)\cdot\nu(x)}{|x-\xi|^2} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Al igual que en el lema 3.1 de [DdPM05], se tiene que para todo $q > 1$

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C\delta^{1/q},$$

y para $1 < q < 2$

$$\|-\Delta z + z\|_{L^q(\Omega)} \leq C\delta.$$

De donde, gracias a la teoría L^q, se sigue que para $0 < s < \frac{1}{q}$

$$\|z\|_{W^{1+s,q}(\Omega)} \leq C\delta^{1/q},$$

y por las inclusiones de Morrey, se concluye que

$$\|z\|_{C^\gamma(\Omega)} \leq C\delta^{1/q}$$

para cualquier $0 < \gamma < \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, lo que demuestra el resultado con $\alpha = \frac{1}{q}$.

$\blacksquare$

Asumamos ahora que $\delta = \mu e^{-\frac{p}{2}}$, donde $\frac{1}{C} \leq \mu \leq C$. Gracias a esto, tenemos que

$$U_\xi(\xi) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{e} \quad \text{y} \quad U_\xi(x) = O(\frac{1}{p}) \text{ si } x \neq \xi,$$

más aún, si el parámetro μ satisface la siguiente relación

$$\log 2\mu^2 = H(\xi,\xi),$$

podemos controlar el "error" $R(x) := U^p(x) - \frac{\partial U}{\partial \nu}(x)$ para que este sea pequeño a medida que p se hace grande. Más precisamente, trabajando en una norma adecuada en $L^\infty(\partial\Omega)$, podemos decir que para p suficientemente grande

$$\|R(x)\|_* \leq \frac{C}{p^2}. \tag{2.1.4}$$

Ahora bien, para construir una solución de (1.0.1) que presente concentración en m puntos $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \partial\Omega$, el candidato natural sería

$$U_\xi(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}} \delta_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_{\xi_j}(x) + H_{\xi_j}(x) \right),$$

donde $\delta_j = \mu_j e^{-\frac{p}{2}}$ y u_{ξ_j}, H_{ξ_j} son como en (2.1.1) y (2.1.3) respectivamente. Nuevamente, una elección adecuada de los parámetros μ_j nos permitirá controlar el "error" $R(x)$, más precisamente, si pedimos que los puntos estén separados uniformemente, es decir, $|\xi_j - \xi_i| \geq d > 0$ para todo $j \neq i$ y

$$\log 2\mu_j^2 = H(\xi_j, \xi_j) + \sum_{i \neq j} \frac{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}}{\mu_i^{\frac{1}{p-1}}} G(\xi_i, \xi_j),$$

entonces, para p suficientemente grande se tendrá la misma estimación (2.1.4).

Sin embargo, esto no será suficiente para construir las soluciones buscadas, pues, como veremos, las estimaciones sobre un problema lineal y el término no-lineal que aparecen más adelante, hacen que un error de tamaño $\frac{1}{p^2}$ sea insuficiente para plantear un esquema de punto fijo para resolver el problema no-lineal. Lo mismo acontece al realizar la expansión de la energía de nuestra solución.

Para mejorar la estimación sobre el error $R(x)$, necesitamos ir mas allá en la aproximación propuesta, agregando términos de mayor orden a $u_\xi(x) + H_\xi(x)$.

2.1.2. Un problema en el semi-plano

Con el propósito de mejorar el error en el *ansatz* anterior, será necesario un pequeño estudio de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} - e^{v_\mu}\phi = e^{v_\mu} g & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

donde

$$v_\mu(x) = v_{(0,\mu)} = \log \frac{2\mu}{x_1^2 + (x_2+\mu)^2}.$$

La existencia de soluciones para (2.1.5) es un tema a revisar, pues como se demostró en [DdPM05], cualquier solución acotada del problema homogéneo

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - e^{v_\mu}\phi = 0 \quad \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

resulta ser una combinación lineal de

$$z_{0\mu}(x) = -\frac{1}{\mu}(x\cdot\nabla v_\mu(x) + 1) = \frac{1}{\mu} - 2\frac{x_2+\mu}{x_1^2+(x_2+\mu)^2}$$

y

$$z_{1\mu}(x) = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_1}(x) = -2\frac{x_1}{x_1^2+(x_2+\mu)^2}.$$

Luego para resolver (2.1.5) bastará verificar condiciones de ortogonalidad respecto a estas soluciones, como lo demostraremos en la siguiente

Proposición 2.2. *Sea $g \in C^1(\partial\mathbb{R}^2_+)$ tal que para $x_0 = (0,-\mu)$, $\mu > 0$ y $k \geq 0$ se cumple que*

$$g(x) = O(\log^k |x - x_0|) \qquad \text{cuando } |x| \to \infty, \tag{2.1.7}$$

y además verifica las condiciones de ortogonalidad siguientes

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{v_\mu} z_{0\mu} g = 0 = \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{v_\mu} z_{1\mu} g. \tag{2.1.8}$$

Entonces (2.1.5) admite una solución $\phi \in C^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$. Más aún, tenemos que para todo $0 < \alpha < 1$ y para $|x| \to \infty$

$$|\phi(x)| \leq C\frac{1}{|x|^\alpha}, \;\; |\nabla\phi(x)| \leq C\frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \text{ y } |\nabla^2\phi(x)| \leq C\frac{1}{|x|^{2+\alpha}}, \tag{2.1.9}$$

donde C es una constante que depende de $\|g\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^2_+)}$, para algún $p = p(\alpha) \geq 1$.

Demostración Sea $D := B(0, \frac{1}{2\mu}) \subseteq \mathbb{R}^2$, e $y_0 = (0, -\frac{1}{2\mu})$, veamos que podemos construir una solución para (2.1.5), usando una solución de

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } D \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - 2\mu\psi = \tilde{g} & \text{en } \partial D, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Consideremos $\Phi : \mathbb{R}^2_+ \to D$ y $\Psi : D \to \mathbb{R}^2_+$, definidas como

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + y_0, \\ \Psi(y) &= \frac{y - y_0}{|y - y_0|^2} + x_0, \end{aligned}$$

que no son más que una Transformada de Kelvin respecto al punto x_0 (resp. y_0) trasladada en y_0 (resp. x_0). Notemos que $\Phi(\partial\mathbb{R}^2_+) = \partial D \setminus \{y_0\}$, que $\Psi(\partial D \setminus \{y_0\}) = \partial\mathbb{R}^2_+$, mas aún, $\Psi \circ \Phi(x) = x$ en $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ y $\Phi \circ \Psi(y) = y$ en $\overline{D} \setminus \{y_0\}$. De lo anterior, también notamos que la función Φ manda el infinito a y_0 (que es lo que permite simplificar el análisis en infinito).

Sea entonces ψ una solución de (2.1.10) para $\tilde{g}(y) = 2\mu g(\Psi(y))$, y definamos

$$\phi_k(x) = \psi_k(\Phi(x)).$$

Veamos que ϕ_k así definido nos entrega una solución de (2.1.5), en efecto, tenemos que

$$\Delta\phi_k(x) = \frac{1}{|x - x_0|^4} \Delta\psi_k(\Phi(x)),$$

luego, para $x \in \mathbb{R}^2_+$, se tendrá que, como $\Phi(\mathbb{R}^2_+) \subseteq D$, $\Delta\phi_k = 0$ en $\mathbb{R}^2_+$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_k}{\partial\nu_{\mathbb{R}^2_+}}(x_1, 0) &= \nabla\phi_k(x_1, 0) \cdot \nu_{\mathbb{R}^2_+}(x_1, 0) \\ &= D^T\Phi(x_1, 0)\nabla\psi_k(\Phi(x_1, 0)) \cdot \nu_{\mathbb{R}^2_+}(x_1, 0) \\ &= (D\Phi(x_1, 0)\nu_{\mathbb{R}^2_+}(x_1, 0)) \cdot \nabla\psi_k(\Phi(x_1, 0)) \\ &= \frac{1}{x_1^2 + \mu^2} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu_D}(\Phi(x_1, 0)) \\ &= \frac{2\mu}{x_1^2 + \mu^2}\psi_k(\Phi(x_1, 0)) + \frac{1}{x_1^2 + \mu^2}\tilde{g}(\Phi(x_1, 0)) \\ &= e^{v_\mu(x_1, 0)}(\phi_k(x_1, 0) + g(x_1, 0)). \end{aligned}$$

Donde ésta última igualdad se obtiene pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2+\mu^2}\tilde{g}(\Phi(x_1,0)) &= \frac{2\mu}{x_1^2+\mu^2}g(\Psi(\Phi(x_1,0))) \\ &= e^{v_\mu(x_1,0)}g(x_1,0)). \end{aligned}$$

Así, tenemos efectivamente que ϕ es solución de (2.1.5).

Analicemos ahora el problema de existencia para (2.1.10):

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } D \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - 2\mu\psi = \tilde{g} & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Notemos que (2.1.10) tiene estructura variacional, luego se puede escribir en términos funcionales de la siguiente manera, encontrar $\psi \in H = H^1(D)$, con el producto interno usual, tal que

$$\psi + K\psi = G, \tag{2.1.11}$$

donde $K : H \mapsto H$ es un operador compacto autoadjunto. En efecto, consideremos el problema de encontrar $\psi \in H$, tal que

$$\int_D \nabla\psi \cdot \nabla\phi - 2\mu\int_{\partial D}\psi\phi = \int_{\partial D}\tilde{g}\phi \qquad \forall\phi \in H, \tag{2.1.12}$$

donde $\tilde{g} \in L^2(\partial D)$, que se puede escribir como

$$(\psi,\phi)_H - (\psi,\phi)_{L^2(D)} - 2\mu(\psi,\phi)_{L^2(\partial D)} = (\tilde{g},\phi)_{L^2(\partial D)}.$$

Definimos entonces $L : H \mapsto H^*$, $k : H \mapsto H^*$ y $\tilde{G} \in H^*$ como:

$$\begin{aligned} L(\psi)(\phi) &= (\psi,\phi)_H, \\ k(\psi)(\phi) &= -\int_D \psi\phi - 2\mu\int_{\partial D}\psi\phi, \\ \tilde{G}(\phi) &= \int_{\partial D}\tilde{g}\phi, \end{aligned}$$

Antes de seguir, notemos que gracias al Teorema de Riesz, la ecuación

$$L\psi = F, \quad F \in H^* \tag{2.1.13}$$

tiene una solución única, luego, se puede definir el operador lineal continuo $T : H^* \mapsto H$, $T(F) = \psi$, donde ψ es la solución de (2.1.13). Dado lo anterior, podemos escribir (2.1.12) en términos funcionales como: *Encontrar* $\psi \in H$ *tal que* $L(\psi) + k(\psi) = \tilde{G}$, esto, gracias a la invertibilidad de L en H, es equivalente a encontrar $\psi \in H$ tal que

$$\psi + T \circ k(\psi) = T(\tilde{G}).$$

Sean entonces $K = T \circ k : H \mapsto H$ y $G = T(\tilde{G}) \in H$. Vemos que K es un operador compacto y autoadjunto, luego, la Alternativa de Fredholm nos dice que la ecuación (2.1.11) tiene solución sí y solo sí

$$G \in \mathrm{Ker}(I + K)^{\perp}.$$

Ahora bien, tenemos que $\mathrm{Ker}(I + K) = \{\tilde{z}_{0\mu}, \tilde{z}_{1\mu}\}$[1], donde

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{0\mu}(y) &= z_{0\mu}(\Psi(y)) = -2y_2, \\ \tilde{z}_{1\mu}(y) &= z_{1\mu}(\Psi(y)) = -2y_1. \end{aligned}$$

Además, $G \in \mathrm{Ker}(I + K)^{\perp}$ ssi $\tilde{G}(\tilde{z}_{0\mu}) = \tilde{G}(\tilde{z}_{1\mu}) = 0$, luego para tener existencia para el problema (2.1.10), necesitamos que

$$\int\limits_{\partial D} \tilde{g}\tilde{z}_{0\mu} = 0 \quad \text{y} \quad \int\limits_{\partial D} \tilde{g}\tilde{z}_{1\mu} = 0. \tag{2.1.14}$$

Luego, si verificamos las condiciones de ortogonalidad (2.1.14), encontraremos ψ solución de (2.1.10), y por lo dicho al comienzo, una solución ϕ de (2.1.5).

Veamos que las condiciones (2.1.14) son equivalentes a las condiciones (2.1.8) del enunciado. En efecto, para $\varepsilon > 0$, escribiendo ∂D como $\partial D = \partial D \cap B(y_0, \varepsilon) \bigcup \partial D \cap B(y_0, \varepsilon)^c$ y recordando que $\Phi(\partial \mathbb{R}^2_+) = \partial D \setminus \{y_0\}$, tenemos que existe $M = M_\varepsilon > 0$, tal que

$$\Phi([-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) = \partial D \cap B(y_0, \varepsilon)^c,$$

más aún, tenemos que $M_\varepsilon \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$. Teniendo esto en mente, mediante la parametrización de $\partial D \cap B(y_0, \varepsilon)^c$ dada por

$$\begin{aligned} r : [-M_\varepsilon, M_\varepsilon] &\longrightarrow \partial D \cap B(y_0, \varepsilon)^c \\ t &\longmapsto r(t) = \Phi(t, 0) \end{aligned},$$

podemos calcular

$$\int_{\partial D \cap B(y_0,\varepsilon)^c} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu} = \int_{-M_\varepsilon}^{M_\varepsilon} 2\mu g(t,0) z_{i\mu}(t,0) \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt.$$

[1]Esto es gracias a que cualquier solución en $H^1(D)$ de (2.1.12), con $\tilde{g} \equiv 0$, resulta ser acotada, y por lo tanto, gracias al resultado mencionado al comienzo, una combinación lineal de $\tilde{z}_{0\mu}$ y $\tilde{z}_{1\mu}$

Ahora, de la definición de $r(t)$ y de Φ, tenemos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{(t^2+\mu^2)^2}(\mu^2 - t^2, -2\mu t),$$

de donde

$$\left\| \frac{dr}{dt} \right\| = \frac{1}{t^2+\mu^2} = \frac{1}{2\mu} e^{v_\mu(t,0)}.$$

Juntando lo anterior, tenemos que

$$\int_{\partial D \cap B(y_0,\varepsilon)^c} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu} = \int_{-M_\varepsilon}^{M_\varepsilon} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0) dt.$$

Luego

$$\int_{\partial D} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu} = \int_{-M_\varepsilon}^{M_\varepsilon} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0) dt + \int_{\partial D \cap B(y_0,\varepsilon)} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu}.$$

Para concluir, debemos probar que

$$\int_{\partial D \cap B(y_0,\varepsilon)} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{y}$$

$$\int_{-M_\varepsilon}^{M_\varepsilon} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0) dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0) dt.$$

Esto último es una consecuencia directa de que $g(x) = O(\log^k |x - x_0|)$ cuando $|x| \to \infty$. En efecto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que si $|y - y_0| \leq \varepsilon$, se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y) &= O(\log^k |y - y_0|), \\ \tilde{z}_{1\mu} &= -2y_1 = O(\varepsilon) \quad \text{y} \\ \tilde{z}_{0\mu} &= -2y_2 = -\frac{1}{\mu} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} |\tilde{g}\tilde{z}_{0\mu}| &\leq C \left|\log^k |y - y_0| \, y_1\right| & \text{y} \qquad |\tilde{g}\tilde{z}_{1\mu}| &\leq C \left|\log^k |y - y_0| \, y_2\right| \\ &\leq C\varepsilon \left|\log^k |y - y_0|\right| & &\leq C \left|\log^k |y - y_0|\right| + C\varepsilon \left|\log^k |y - y_0|\right|. \end{aligned}$$

Con esto en mente, basta estimar $\int_{\partial D\cap B(y_0,\varepsilon)} \left|\log^k |y-y_0|\right|$, pero

$$\int_{\partial D\cap B(y_0,\varepsilon)} \left|\log^k |y-y_0|\right| \leq C\int_0^{\varepsilon} \log^k r dr$$
$$= O(\varepsilon \log^k \frac{1}{\varepsilon}).$$

Por lo tanto, $\int_{\partial D\cap B(y_0,\varepsilon)} \tilde{g}\tilde{z}_{i\mu} = O(\varepsilon\log^k\varepsilon)$, lo que prueba la primera parte. Para la segunda integral, basta notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0)dt - \int_{-M}^{M} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0)dt = 2\int_{M}^{\infty} e^{v_\mu(t,0)} g(t,0) z_{i\mu}(t,0)dt$$
$$= O(\int_{\partial\mathbb{R}^2_+\cap B(0,M)^c} e^{v_\mu(x)} z_{i\mu}(x)\log^k|x-x_0|\,dx),$$

pero, tenemos que para cualquier $k\geq 1$

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{v}(x) z_{i\mu}(x)\log^k|x-x_0| < \infty,$$

luego

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+\cap B(0,M)^c} e^{v_\mu(x)} z_{i\mu}(x)\log^k|x-x_0|\,dx = o(1),$$

donde $o(1)$ es una cantidad que tiende a 0 cuando M tiende a ∞.

Ahora, gracias a (2.1.7), $\tilde{g}\in L^p(\partial D)$ para todo $p\geq 1$, luego, gracias a la teoría L^p (ver [LM62] para más detalles), tendremos que $\psi\in W^{1+s,p}(D)$ para todo $0<s<\frac{1}{p}$. Esto, junto con las inclusiones de Sobolev nos permiten decir que $\psi\in C^{\alpha}(\overline{D})$, para $\alpha = 1-\frac{2}{(1+s)p}$.

En lo que sigue supondremos que $\psi(y_0)=0$, pues en caso contrario, podemos definir

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(y) - 2\mu\psi(y_0)\tilde{z}_{1\mu}(y),$$

que también es solución, pues $\tilde{z}_1$ es solución del problema homogéneo y cumple con $\tilde{\psi}_k(y_0)=0$.

Veamos que si tenemos (2.1.7), entonces tenemos las condiciones de comportamiento en infinito dadas por (2.1.9) para ϕ. Para ello analicemos el comportamiento de ψ cerca de $y_0\in\partial D$.

Sea $r_0>0$ pequeño y consideremos $\bar{y}\in D\cap B(y_0,r_0)\backslash$, $\bar{y}\neq y_0$, y $R=\frac{1}{2}|\bar{y}-y_0|$. Para el caso en que $B(\bar{y},R)\subset D$, se cumple que $\Delta\psi=0$ en $\overline{B(\bar{y},R/2)}$, luego ψ es de clase C^∞ en $B(\bar{y},R/2)$, mas aún por la armonicidad, tenemos que para cualquier multi-índice β, con

$|\beta| = s$

$$\left|D^\beta \psi(\bar{y})\right| \leq \frac{C_s}{R^{2+s}} \|\psi\|_{L^1(B(\bar{y},R/2))},$$

luego podemos decir en este caso, como sabemos que $\psi \in C^\alpha(\overline{D})$, que

$$|\nabla\psi(\bar{y})| \leq \frac{C}{R}, \quad \left|\nabla^2\psi(\bar{y})\right| \leq \frac{C}{R^2}, \tag{2.1.15}$$

donde C es una constante que depende de α, más precisamente, de alguna norma $L^p(\partial D)$ de $\tilde{g}$, donde $p = p(\alpha)$.

En el caso en que $\Upsilon := B(\bar{y}, R) \cap \partial D$ es abierto (si es un punto, el caso anterior también vale), sea $B := B(\bar{y}, R) \cap D$, entonces tenemos que ψ satisface

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } B \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - 2\mu\psi = \tilde{g} & \text{en } \Upsilon. \end{cases}$$

Notar que una solución de este problema resulta ser suave, pues $\tilde{g}$ lo es en Υ. Definamos entonces, $\tilde{\psi}(y) = \psi(Ry + \bar{y})$, que satisface

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\psi} = 0 & \text{en } \tilde{B} \\ \dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\nu} - 2\mu R\tilde{\psi} = \tilde{h} & \text{en } \tilde{\Upsilon}, \end{cases}$$

donde $\tilde{h}(y) = R\tilde{g}(Ry + \bar{y})$.

Antes de continuar, recordamos las definiciones de las normas y semi-normas para los espacios de Hölder: Para $0 < \alpha \leq 1$ y k entero no-negativo, se definen

$$[f]_{\alpha,B} = \sup_{\substack{x,y\in B \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$
$$[f]_{k,\alpha,B} = \left[D^k f\right]_{\alpha,B} = \sup_{|\beta|=k} \left[D^\beta f\right]_{\alpha,B},$$

y

$$|f|_{k,\alpha,B} := \|f\|_{C^{k,\alpha}(B)} = \|f\|_{C^k(B)} + [f]_{k,\alpha,B}.$$

Con esto en mente, gracias a estimaciones Hölder para este problema (ver [GT01] por ejemplo), podemos decir que para todo $0 < \alpha < 1$

$$|\tilde{\psi}|_{2,\alpha,\tilde{B}} \leq C(\|\tilde{\psi}\|_{L^1(\tilde{B})} + |\tilde{h}|_{1,\alpha,\tilde{B}}),$$

además, como cerca de y_0, $\tilde{g} = O(\log^k |y - y_0|)$, tenemos que

$$|\tilde{h}|_{1,\alpha,\tilde{B}} \leq CR\log^k R. \tag{2.1.16}$$

Así, gracias a (2.1.16) y que $\|\tilde{\psi}\|_{L^1(\tilde{B})} = \|\psi\|_{L^1(B)} \leq C$, nos permite decir que

$$|\tilde{\psi}|_{2,\alpha,\tilde{B}} \leq C(1 + R\log^k R),$$

lo que llevado a la función original, nos dice que

$$|\psi|_{2,\alpha,B} \leq C(1 + \frac{\log^k R}{R^{1+\alpha}}),$$

y si consideramos ahora r_0 suficientemente pequeño, tendremos entonces que $R \sim 0$, y por lo tanto

$$|\psi|_{2,\alpha,B} \leq C\frac{\log^k R}{R^{1+\alpha}}.$$

De aquí obtenemos también que

$$|\psi|_{1,\alpha,B} \leq C\frac{\log^k R}{R^{\alpha}}.$$

Luego tenemos que

$$|\nabla\psi(\bar{y})| \leq C\frac{\log^k R}{R^{\alpha}}, \quad \left|\nabla^2\psi(\bar{y})\right| \leq C\frac{\log^k R}{R^{1+\alpha}}, \tag{2.1.17}$$

esto junto con (2.1.15), nos permite decir que para todo r_0 suficientemente pequeño, y para todo $y \in B(y_0, r_0) \cap D$

$$\begin{aligned} |\nabla\psi(y)| &\leq C\frac{\log^k |y - y_0|}{|y - y_0|^{\alpha}}, \\ \left|\nabla^2\psi(y)\right| &\leq C\frac{\log^k |y - y_0|}{|y - y_0|^{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Usando (2.1.18), y recordando que estamos suponiendo $\psi(y_0) = 0$, gracias al Teorema del Valor Medio, podemos decir que

$$|\psi(y)| \leq C\,|y - y_0|^{1-\alpha}\log^k |y - y_0| \tag{2.1.19}$$

Solo queda ver que se tiene la estimación para ϕ. Recordemos que $\phi(x) = \psi(\Phi(x))$, luego

$$\begin{aligned} |\nabla\phi(x)| &\leq \frac{1}{|x-x_0|^2}\,|\nabla\psi(\Phi(x))| \\ \left|\nabla^2\phi(x)\right| &\leq C\left(\frac{1}{|x-x_0|^4}\left|\nabla^2\psi(\Phi(x))\right| + \frac{1}{|x-x_0|^3}\,|\nabla\psi(\Phi(x))|\right), \end{aligned}$$

y gracias a las estimaciones sobre ψ, tenemos que, para $|x| \to \infty$

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq C\frac{\log^k|x-x_0|}{|x-x_0|^{1-\alpha}}, \\ |\nabla\phi(x)| &\leq C\frac{\log^k|x-x_0|}{|x-x_0|^{2-\alpha}}, \\ \left|\nabla^2\phi(x)\right| &\leq C\frac{\log^k|x-x_0|}{|x-x_0|^{3-\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Para concluir, cambiamos α por $1-\alpha$, y notamos que para $0 < \tilde{\alpha} < \alpha < 1$ y $|x|$ suficientemente grande $\frac{\log^k|x-x_0|}{|x-x_0|^\alpha} \leq C\frac{1}{|x|^{\tilde{\alpha}}}$ (gracias a que $|x-x_0| \geq \mu > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2_+$).

■

Finalizamos esta sección con algunas observaciones respecto a este resultado.

Observación 2.1. Si tenemos un mejor comportamiento de g cuando $|x| \to \infty$, podemos mejorar la estimación (2.1.9). Más precisamente, si suponemos ahora que $g(x) = O(\frac{1}{|x-x_0|^k})$, tendremos que $\tilde{g}(y) = O(|y-y_0|^k)$ y por lo tanto la estimación (2.1.16) queda como

$$|\tilde{h}|_{1,\alpha,\tilde{B}} \leq CR^{1+k}.$$

Lo que nos permite decir que para $|x| \to \infty$, tal como antes,

$$|\phi(x)| \leq C\frac{1}{|x|^{\alpha+k}}, |\nabla\phi(x)| \leq C\frac{1}{|x|^{1+k+\alpha}} \text{ y } \left|\nabla^2\phi(x)\right| \leq C\frac{1}{|x|^{2+k+\alpha}}. \tag{2.1.21}$$

Observación 2.2. Notar si g es una función simétrica respecto al eje y, es decir

$$g(x,0) = g(-x,0), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

y una solución ϕ (si es que existe) de (2.1.5), se puede escoger $\tilde{\phi}$ *simétrica* que sea solución del problema, pues basta tomar

$$\tilde{\phi}(x,y) = \frac{\phi(x,y) + \phi(-x,y)}{2}.$$

2.1.3. Mejorando el *Ansatz* - error $\frac{1}{p^4}$

Con el fin de obtener una mejor cota sobre el "error" $R(x)$, es necesario modificar el *ansatz* inicial. Para ello, utilizaremos funciones ϕ, soluciones del problema analizado en la sección anterior, escogiendo adecuadamente el lado derecho g.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\nu} - e^v\phi_1 = e^v g_1 & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.1.22}$$

donde $v(x) = v_1(x) = \log \frac{2}{x_1^2+(x_2+1)^2}$, y

$$g_1 = \alpha_1(v-1) - \frac{1}{2}v^2.$$

En virtud de la Proposición 2.2, para obtener soluciones de este problema, debemos comprobar las condiciones de ortogonalidad (2.1.8), donde en este caso $z_0(x) = z_{01}(x)$ y $z_1(x) = z_{11}(x)$. En primer lugar, notemos que g_1 es una función simétrica (v lo es), luego

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v g_1 z_1 = 0,$$

independientemente de la elección de α_1. Para obtener la otra condición de ortogonalidad, bastará ajustar el valor de α_1. En efecto, tenemos que podemos escribir $z_0(x) = x\cdot\nabla v(x) + 1$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v g_1 z_0 &= \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v \left(\alpha_1(v-1) - \frac{v^2}{2}\right)(x\cdot\nabla v(x)+1)dx \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{v(t,0)}(v(t,0)-1)\frac{\partial v}{\partial x_1}(t,0)t + e^{v(t,0)}(v(t,0)-1)\right)dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{v(t,0)}\frac{v^2}{2}(t,0)\frac{\partial v}{\partial x_1}(t,0)t + e^{v(t,0)}\frac{v^2}{2}(t,0)\right)dt, \end{aligned}$$

integrando por partes ambas integrales, obtenemos que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v g_1 z_0 = (\alpha_1 + 1)\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v - \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v v.$$

Luego escogemos α_1 tal que

$$(\alpha_1 + 1)\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v = \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v v,$$

más precisamente, dado que $\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v = 2\pi$ y $\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v v = -2\pi\log 2$,

$$\alpha_1 = -(1 + \log 2), \tag{2.1.23}$$

tenemos que ambas condiciones de ortogonalidad (2.1.8) se satisfacen, y por lo tanto tendremos una solución ϕ_1 para (2.1.22). Más aún, como $g_1(x) = O(\log^2|x - x_0|)$, tenemos que ϕ_1 satisface (2.1.9). Además, por la Observación 2.2, podemos asumir que ϕ_1 es simétrica. Construida esta función ϕ_1, definimos $w_1(y) := \phi_1(y) + \alpha_1 v(y)$ y ϕ_2 como una solución de

$$\begin{cases} \Delta\phi_2 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial\nu} - e^v\phi_2 = e^v g_2 & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.1.24}$$

donde

$$g_2 = \alpha_2(v - 1) - vw_1 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}w_1^2 - \frac{1}{2}w_1 v^2 + \frac{1}{8}v^4.$$

Nuevamente, para tener la existencia, debemos verificar las condiciones de ortogonalidad. Como antes, y dado que estamos suponiendo que ϕ_1 es simétrica, g_2 también lo es y por lo tanto la ortogonalidad respecto a z_1 es inmediata. Además, notamos que escogiendo α_2 tal que

$$\alpha_2\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0(v - 1) = \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0\left(vw_1 - \frac{v^3}{3} - \frac{w_1^2}{2} + \frac{w_1 v^2}{2} - \frac{v^4}{4}\right), \tag{2.1.25}$$

tendremos la otra condición de ortogonalidad, y por lo tanto una solución ϕ_2 para (2.1.24). Dado que g_2 es una función simétrica, podemos asumir que ϕ_2 también lo es. Además, dado que ϕ_1 satisface (2.1.9), tenemos que $g_2(x) = O(\log^4|x - x_0|)$, y por lo tanto, ϕ_2 también satisface (2.1.9).

Construidas estas funciones, podemos mejorar el *ansatz* inicial, al incorporar términos de mayor orden en la expansión de éste. Como al comienzo, para exponer la idea con más claridad, primero entregamos un candidato a solución que presenta concentración en un punto, para luego pasar al caso general.

Dado $\xi \in \partial\Omega$, sea $\rho > 0$ un número fijo, que solo depende de la geometría de Ω, tal que

$$F : B_\rho(0) \cap A(\Omega - \xi) \longrightarrow M \cap \mathbb{R}^2_+,$$

es un difeomorfismo y M es una vecindad del origen tal que $F(B_\rho(0) \cap A(\partial\Omega - \xi)) \subseteq M \cap \partial\mathbb{R}^2_+$, donde A es la rotación definida al comienzo[2]. Además pedimos que F preserve área. Sea $\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de corte, tal que $\eta \equiv 1$ para $|x| \leq \frac{\rho}{2}$, $\eta \equiv 0$ para $|x| > \rho$, $0 \leq \eta \leq 1$. Finalmente, para $k = 1, 2$, definimos las funciones

$$\phi_{k,\xi} = \phi_k(\frac{1}{\delta}F(A(x - \xi)))\eta(A(x - \xi))$$

y

$$w_{k,\xi}(x) = \phi_{k,\xi}(x) + \alpha_k v(\frac{1}{\delta}A(x - \xi)).$$

Así, nuestro *ansatz* final para una solución que presente concentración en el punto $\xi \in \partial\Omega$ es

$$U_\xi(x) = \frac{\gamma}{\mu^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_\xi(x) + H_\xi(x) + \frac{1}{p}(w_{1,\xi}(x) + H_{1,\xi}(x)) + \frac{1}{p^2}(w_{2,\xi}(x) + H_{2,\xi}(x)) \right), \quad (2.1.26)$$

donde $\gamma = \frac{e^{\frac{p}{2(p-1)}}}{p^{\frac{p}{p-1}}}$, u_ξ definida como en (2.1.1), H_ξ es la solución de (2.1.3), y $H_{k,\xi}$ representa un término de corrección, que está dado por el siguiente análogo al lema 2.1

Lema 2.3. *Sea $H_{k,\xi}$ solución de*

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{H}_{k,\xi} + \tilde{H}_{k,\xi} = \Delta w_{k,\xi} - w_{k,\xi} & en\ \Omega \\ \dfrac{\partial\tilde{H}_k}{\partial\nu} = \alpha_k \left(e^{u_\xi} - \dfrac{\partial u_\xi}{\partial\nu} \right) & en\ \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces, para $0 < \alpha < 1$, se tiene que

$$H_{k,\xi}(x) = \alpha_k H(x, \xi) - \alpha_k \log 2\delta^2 + O(\delta^\alpha),$$

donde, al igual que antes, $H(x, y)$ denota la parte regular de la función de Green (1.2.4).

La demostración de este lema se encuentra al final de esta sección.

Al igual que al comienzo, supondremos que $\delta = \mu e^{-\frac{p}{2}}$, $\frac{1}{C} \leq \mu \leq C$. Buscaremos una solución de (1.0.1) de la forma $u = U_{\xi_j} + \phi_{\xi_j}$, donde ϕ_{ξ_j} denota un término de orden superior en la expansión de u. Así, en términos de ϕ (en adelante omitimos la dependencia en ξ_j), el

[2]Notar que se está omitiendo la dependencia en ξ tanto de la rotación A como del enderazamiento F

problema a analizar es

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = W\phi + N(\phi) + R & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.27}$$

donde $W = pU_\xi^{p-1}$, $N(\phi) = (U_\xi + \phi)^p - U_\xi^p - pU_\xi^{p-1}$ y $R = U_\xi^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}$. Con el propósito de estimar el error R, trabajaremos con la siguiente norma en $L^\infty(\partial\Omega)$: Dado $\xi \in \partial\Omega$ y $h \in L^\infty(\partial\Omega)$, definimos

$$\|h\|_{*,\partial\Omega} = \sup_{x\in\partial\Omega} \left| \left(\frac{\sqrt{\delta}}{(|x-\xi|+\delta)^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} h(x) \right|. \tag{2.1.28}$$

En esta norma, tenemos la siguiente mejora respecto a la cota sobre el error R anunciada al comienzo, junto con una estimación del término lineal W que aparece en (2.1.27)

Proposición 2.4. *Dado $\xi \in \partial\Omega$, sea μ solución de*

$$\log 2\mu^2 = H(\xi,\xi) + (H(\xi,\xi) - \log 2\delta^2)\left(\frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2}\right),$$

donde $H(x,y)$ es la parte regular de la función de Green (1.2.4)*, $\delta := \mu e^{-p/2}$, α_1 y α_2 están dados por* (2.1.23) *y* (2.1.25) *respectivamente. Entonces existen $C, D > 0$ y $p_0 > 1$, tales que para todo $p > p_0$*

1. $\|R\|_{*,\partial\Omega} \leq \frac{C}{p^4}$,
2. $|W(x)| \leq De^{u_\xi(x)}$, *mas aún, tenemos que para $|x-\xi| \leq \frac{\rho}{2}\sqrt{\delta}$, $\delta y = A(x-\xi)$*

$$W(x) = \frac{e^{v(y)}}{\delta}\left(1 + \frac{1}{p}(\tilde{w}_{1,\xi}(y) - v(y) - \frac{v^2(y)}{2}) + O(\frac{1}{p^2}\log^3(|y|+1))\right), \tag{2.1.29}$$

donde $\tilde{w}_{k,\xi}(y) = \phi_k(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) + \alpha_k v(y)$

En la demostración de esta proposición usaremos los siguientes lemas, cuyas demostraciones se encuentran al final de esta sección

Lema 2.5. *Sea ϕ una solución de* (2.1.5)*, con g de clase $C^1(\mathbb{R}^2_+)$, que verifica* (2.1.7) *y*

$$|\nabla g(x)| = O(|x|^{-1}\log^k|x|) \text{ cuando } |x| \to \infty. \tag{2.1.30}$$

Definimos

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\frac{1}{\delta}F(A(x-\xi)))\eta(A(x-\xi)),$$

donde F, A, η y ξ son como antes. Entonces, para cada $x \in \partial\Omega$, $|x-\xi| \leq \frac{\rho}{2}$,

$$\delta\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\nu}(x) = e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(\delta y) + g(y)\right] + O(\delta^{\alpha}),$$

donde $\delta y = A(x-\xi)$ y $0 < \alpha < 1$.

Lema 2.6. *Si a, b, c son funciones tales que*

a) $-C_1 \log(|y|+1) \leq a(y) \leq C_2$,

b) $|b(y)| + |c(y)| \leq C_3 \log(|y|+1)$,

entonces

$$\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3}\right)^p = e^a\left[1 + \frac{1}{p}(b - \frac{a^2}{2}) + \frac{1}{p^2}(c - ab + \frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{a^2 b}{2} + \frac{v^4}{4}) + O(\frac{\log^6(|y|+1)}{p^3})\right].$$

Demostración [Proposición 2.4] Para simplificar la notación, trabajaremos en la variable auxiliar $\delta y = A(x-\xi)$. Notemos que gracias a la elección de H_ξ y $H_{k,\xi}$,

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial\nu}(x) = \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{1}{p-1}}}\left(e^{u_\xi(x)} + \frac{1}{p}\left(\frac{\partial\phi_{1,\xi}}{\partial\nu}(x) + \alpha_1 e^{u_\xi(x)}\right) + \frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial\phi_{2,\xi}}{\partial\nu}(x) + \alpha_2 e^{u_\xi(x)}\right)\right).$$

Por una parte, tenemos que $\frac{\partial\phi_{x,\xi}}{\partial\nu}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_{k,\xi}}{\partial\nu}(x) &= \nabla\left(\phi_k(\frac{1}{\delta}F_\xi(\delta y))\eta(\delta y)\right)\cdot\nu_\Omega(\delta y)\\ &= \delta\phi_k(\frac{1}{\delta}F_\xi(\delta y))\nabla\eta(\delta y)A\nu_\Omega(\delta y) + \frac{1}{\delta}\eta(\delta y)\nabla\phi_k(\frac{1}{\delta}F(\delta y))DF(\delta y)A\nu_\Omega(\delta y),\end{aligned}$$

Para $|x-\xi| > \frac{\rho}{2}$, tenemos que $e^{u_\xi(x)} = O(\delta)$, $\phi_k(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) = O(\delta^\alpha)$ y $\nabla\phi_k(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) = O(\delta^{1+\alpha})$, para cualquier $0 < \alpha < 1$, de donde

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial U_\xi}{\partial\nu}(x)\right| &\leq \frac{C\delta}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{1}{p-1}}}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)\\ &\leq \frac{C\delta}{p}.\end{aligned}$$

En esta región, tenemos también que $U_\xi = O(\frac{1}{p})$ uniformemente, luego

$$U_\xi(x)^p \leq \left(\frac{C}{p}\right)^p,$$

así obtenemos para $|x-\xi| > \frac{\rho}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\sqrt{\delta}}{(|x-\xi|+\delta)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\left(U_\xi(x)^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x)\right)\right| &\leq e^{\frac{p}{4}}\left(\left(\frac{C}{p}\right)^p + \frac{C\delta}{p}\right)\\ &\leq C\frac{e^{-\frac{p}{4}}}{p}. \qquad (2.1.31)\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que gracias a la elección del parámetro μ, podemos hacer la siguiente expansión del *ansatz* en la variable y

$$U_\xi(x) = \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{1}{p-1}}}\left[p + v(y) + \frac{1}{p}\tilde{w}_{1,\xi}(y) + \frac{1}{p^2}\tilde{w}_{2,\xi}(y) + O(\delta^\alpha + \delta\,|y|)\right], \qquad (2.1.32)$$

luego para $|y| \leq \frac{\rho}{2\sqrt{\delta}}$, podemos usar el lema 2.6 y obtener

$$\begin{aligned}U_\xi^p(x) &= \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[1 + \frac{v(y)}{p} + \frac{\tilde{w}_{1,\xi}(y)}{p^2} + \frac{\tilde{w}_{2,\xi}(y)}{p^3} + O\left(\frac{1}{p}(\delta^\alpha + \delta\,|y|)\right)\right]^p\\ &= \frac{e^{v(y)}}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[1 + \frac{1}{p}\left(\tilde{w}_{1,\xi}(y) - \frac{1}{2}v^2(y)\right) + \frac{1}{p^2}\left(\tilde{w}_{2,\xi}(y) - \tilde{w}_{1,\xi}(y)v(y) + \frac{1}{3}v^3(y)\right.\right.\\ &\quad\left.\left. + \frac{1}{2}\tilde{w}_{1,\xi}^2(y) - \frac{1}{2}\tilde{w}_{1,\xi}(y)v^2(y) + \frac{1}{8}v^4(y)\right) + O\left(\frac{1}{p^3}\log^6(|y|+1) + p^2\delta\,|y| + p^2\delta^\alpha\right)\right],\end{aligned}$$

además, gracias al lema 2.5, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x) &= \frac{e^{v(y)}}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[1 + \frac{1}{p}\left(\phi_{1,\xi}(\delta y) + g_1(y) + \alpha_1\right) + \frac{1}{p^2}\left(\phi_{2,\xi}(\delta y) + g_2(y) + \alpha_2\right) + O(\frac{\delta^\alpha}{p})\right]\\ &= \frac{e^{v(y)}}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[1 + \frac{1}{p}\left(\tilde{w}_{1,\xi}(y) - \frac{v^2(y)}{2}\right) + \frac{1}{p^2}\left(\tilde{w}_{2,\xi}(y) - w_1(y)v(y) + \frac{1}{3}v^3(y)\right.\right.\\ &\quad\left.\left. + \frac{1}{2}w_1^2(y) - \frac{1}{2}w_1(y)v^2(y) + \frac{1}{8}v^4(y)\right) + O(\frac{\delta^\alpha}{p})\right],\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}U_\xi(x)^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x) &= \frac{e^{v(y)}}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[\frac{1}{p^2}\left(v(y)+\frac{1}{2}v^2(y)-w_1(y)-\tilde{w}_{1,\xi}(y)\right)(w_1(y)-\tilde{w}_{1,\xi}(y))\right.\\ &\quad\left.+O\left(\frac{1}{p^3}\log^6(1+|y|)+p^2\delta\,|y|+p^2\delta^\alpha\right)\right].\end{aligned}$$

Para seguir, supongamos primero que $0 \le |y| \le \frac{\rho}{2\delta^\beta}$, con $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$ y α como antes. En este caso, tenemos que

$$|\tilde{w}_{1,\xi}(y)-w_1(y)| = |\phi_1(\frac{1}{\delta}F(\delta y))-\phi_1(y)| = O(y-\delta^{-1}F(\delta y)) = O(\delta\,|y|^2) = O(\delta^\alpha), \quad (2.1.33)$$

Y si $\frac{\rho}{2\delta^\beta} \le |y| \le \frac{\rho}{2\sqrt{\delta}}$, usando (2.1.9) para ϕ_1,

$$\begin{aligned}|\tilde{w}_{1,\xi}(y)-w_1(y)| &= |\phi_1(\frac{1}{\delta}F(\delta y))-\phi_1(y)|\\ &\le C\delta\,|y|^2 \sup_{\frac{\rho}{2\delta^\beta}\le|y|\le\frac{\rho}{2\sqrt{\delta}}}\frac{1}{|y|^{1+\alpha}}\\ &\le C\delta^\theta,\end{aligned}$$

para algún $0<\theta<1/2$. Luego, juntando ambas estimaciones, se logra que, para $0<\theta<1/2$ y para todo $0<|y|<\frac{\rho}{2\sqrt{\delta}}$

$$\left(v(y)+\frac{1}{2}v^2(y)-w_1(y)-\tilde{w}_{1,\xi}(y)\right)(w_1(y)-\tilde{w}_{1,\xi}(y)) = O(p^2\delta^\theta),$$

pues en esta región, $v(y)=O(p)$ y $\phi_1(y)=O(1)$. Así

$$U_\xi(x)^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x) = \frac{e^{v(y)}}{p^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}}\left[O\left(\frac{1}{p^3}\log^6(1+|y|)+p^2\delta\,|y|+p^2\delta^\theta\right)\right],$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\sqrt{\delta}}{(|x-\xi|+\delta)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\left(U_\xi(x)^p-\frac{\partial U_\xi}{\partial\nu}(x)\right)\right| &\le C(|y|^2+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{p^4}\frac{\log^6(|y|+1)}{(|y|+1)^2}\right)\\ &\le \frac{C}{p^4}. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Finalmente, para $\frac{\rho}{2\sqrt{\delta}} < |y| < \frac{\rho}{2\delta}$, tenemos que como $\left(1+\frac{a}{p}\right)^p \leq e^a$

$$U_\xi^p(x) = O\left(\frac{1}{p\delta}\frac{1}{(|y|+1)^2}\right),$$

luego, notando que en esta región podemos utilizar el comportamiento asintótico de ϕ_k y sus derivadas, tenemos que al igual que al comienzo de la demostración $\frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x) = O\left(\frac{1}{p\delta}\frac{1}{(|y|+1)^2} + \frac{\delta}{p}\right)$, así concluimos que

$$R(x) = O\left(\frac{1}{p\delta}\frac{1}{(|y|+1)^2}\right),$$

luego

$$\left|\left(\frac{\sqrt{\delta}}{(|x-\xi|+\delta)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\left(U_\xi(x)^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(x)\right)\right| = O(\frac{1}{p(|y|+1)^{\frac{1}{2}}}) = O(\frac{e^{-p/8}}{p}). \tag{2.1.35}$$

Juntando las tres estimaciones anteriores, se concluye la primera parte de la demostración.

Para la estimación sobre $W(x) = pU_\xi(x)^{p-1}$, notamos primero que una modificación del lema 2.6, usando las mismas hipótesis, permite concluir que

$$\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{p^2}+\frac{c}{p^3}\right)^{p-1} = e^a\left[1+\frac{1}{p}\left(b-a-\frac{a^2}{2}\right)+O\left(\frac{1}{p^2}\log^4(|y|+1)\right)\right],$$

luego, para $|y| \leq \frac{\rho}{2\sqrt{\delta}}$

$$\begin{aligned}
W(x) &= pU_\xi^{p-1}(x)\\
&= \frac{1}{\delta}e^{v(y)}\left[1+\frac{1}{p}\left(\tilde{w}_{1,\xi}(y) - v(y) - \frac{1}{2}v^2(y)\right) + O(\frac{1}{p^2}\log^4(|y|+1))\right]\\
&= \frac{e^{v(y)}}{\delta}\left[1+\frac{1}{p}\left(\tilde{w}_{1,\xi}(y) - v(y) - \frac{1}{2}v^2(y)\right) + O(\frac{1}{p^2}\log^4(|y|+1))\right].
\end{aligned}$$

Análogamente al caso de U_ξ^p, podemos decir que si $|y| > \frac{\rho}{2\delta}$, $W(x) = O(p(\frac{C}{p})^{p-1})$, y si $\frac{\rho}{2\sqrt{\delta}} < |y| < \frac{\rho}{2\delta}$ $W(x) = O(e^{u_\xi(x)})$, lo que nos da como resultado la segunda parte de la proposición.

■

Para producir una solución que presente concentración en $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \partial\Omega^m$, consideraremos

$$U_\xi(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_j(x) + H_j(x) + \frac{1}{p}(w_{1j}(x) + H_{1j}(x)) + \frac{1}{p^2}(w_{2j}(x) + H_{2j}(x)) \right), \quad (2.1.36)$$

donde $u_j := u_{\xi_j}$, $H_j := H_{\xi_j}$, $w_{ij} := w_{i,\xi_j}$ y $H_{ij} := H_{i,\xi_j}$, $i = 1, 2$.

En lo que sigue supondremos, sin perder generalidad, que $\rho_j = \rho$, para todo $j = 1, \ldots, m$, donde ρ_j es el parámetro asociado al enderazamiento F_j. Además definimos $\Omega_j = A_j(\frac{\Omega - \xi_j}{\delta_j})$. Para poder probar un análogo a la proposición 2.4, necesitamos redefinir la norma utilizada para considerar los m puntos

$$\|h\|_{*,\partial\Omega} = \sup_{x \in \partial\Omega} \left| \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{\delta_j}}{(|x - \xi_j| + \delta_j)^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} h(x) \right|, \quad (2.1.37)$$

donde $\delta_j = \mu_j e^{-\frac{p}{2}}$ y $\frac{1}{C} \leq \mu_j \leq C$ son parámetros. Así obtenemos

Proposición 2.7. *Dados $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \partial\Omega$, tales que $|\xi_i - \xi_j| > 2\rho > 0$ para $i \neq j$, sean $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tales que*

$$\begin{aligned} \log 2\mu_i^2 &= H(\xi_i, \xi_i) \left(1 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} \right) - \frac{\log 2\delta_i^2}{p} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{p} \right) \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{p-1}} G(\xi_i, \xi_j) \left(1 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} \right), \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

donde $H(x,y)$ y $G(x,y)$ están dadas por (1.2.4) y α_k están dados por (2.1.23) y (2.1.25). Entonces existen $C, D > 0$ y $p_0 > 1$, tales que para todo $p > p_0$

1. $\|R\|_{*,\partial\Omega} \leq \frac{C}{p^4}$,

2. $|W(x)| \leq D \sum_{j=1} e^{u_{\xi_j}(x)}$, *mas aún, para $|x - \xi_i| \leq \frac{\rho}{2}\sqrt{\delta_i}$, tenemos que*

$$W(x) = \frac{e^{v(y)}}{\delta_i}(1 + \frac{1}{p}(\tilde{w}_{1i}(y) - v(y) - \frac{1}{2}v^2(y)) + O(\frac{1}{p^2}\log^4(|y| + 1))) \quad (2.1.39)$$

donde $y = A_i(\frac{x - \xi_i}{\delta_i}) \in \Omega_i$.

Demostración Para demostrar esta proposición, solo diremos como utilizar los cálculos de la proposición 2.4. Primero, notemos que la estimación (2.1.31), es decir, para $|x - \xi_i| > \rho/2$, para todo $i = 1, \ldots, m$, sigue siendo válida en este caso. Para hacer la estimación "cerca" de ξ_i, ($|x - \xi_i| < \rho$, algún i), notemos que gracias a los lemas 2.1 y 2.3, tenemos que, si $v_i(x) = v(A_i(\frac{x-\xi_i}{\delta_i}))$

$$\begin{aligned}
U_\xi &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_j + H_j + \frac{1}{p}(w_{1j} + H_{1j}) + \frac{1}{p^2}(w_{2j} + H_{2j}) \right) \\
&= \sum_{j \neq i} \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_j + H_j + \frac{1}{p}(w_{1j} + H_{1j}) + \frac{1}{p^2}(w_{2j} + H_{2j}) \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\mu_i^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_i + H_i + \frac{1}{p}(w_{1i} + H_{1i}) + \frac{1}{p^2}(w_{2i} + H_{2i}) \right) \\
&= \sum_{j \neq i} \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(G(\xi_i, \xi_j)(1 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2}) + O(\delta_j^\alpha + |x - \xi_j|) \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\mu_i^{\frac{1}{p-1}}} \left(H(\xi_i, \xi_i)(1 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2}) - \frac{\log 2\delta_i^2}{p}(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{p}) - \log 2\mu_i^2 \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\mu_i^{\frac{1}{p-1}}} \left(p + v_i(x) + \frac{1}{p} w_{1i}(x) + \frac{1}{p^2} w_{2i}(x) + O(\delta_i^\alpha + |x - \xi_i|) \right),
\end{aligned}$$

luego, gracias a la elección de los parámetros μ_j, obtenemos que en esta región

$$U_\xi(x) = \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}} \delta_i^{\frac{1}{p-1}}} \left(p + v_i(x) + \frac{1}{p} w_{1i}(x) + \frac{1}{p^2} w_{2i}(x) + O(e^{-\frac{p\alpha}{2}} + |x - \xi_i|) \right), \tag{2.1.40}$$

que es idéntica a (2.1.32), por lo tanto las estimaciones (2.1.34) y (2.1.35) se pueden repetir. Similarmente, se obtiene la misma expansión (2.1.29) para $W(x) = pU_\xi^{p-1}(x)$.

■

Observación 2.3. Notar que de (2.1.38), se desprende que

$$\mu_j = \frac{1}{2\sqrt{e}} \exp\left(\frac{1}{2} H(\xi_j, \xi_j) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} G(\xi_i, \xi_j) \right) (1 + O(\frac{1}{p})), \tag{2.1.41}$$

lo que nos permite decir que el sistema (2.1.38) admite una solución para p suficientemente grande, y más aún, que se cumple que $\frac{1}{C} \leq \mu_j \leq C$, para todo $j = 1, \ldots, m$.

Observación 2.4. Con respecto al término lineal W, podemos decir más que lo dicho en la proposición anterior. Notemos que si $|x-\xi_j|\leq\varepsilon$ para algún $j\in\{1,\dots,m\}$, obtenemos que

$$p\left(U(x)+O(\frac{1}{p^3})\right)^{p-2}\leq Cp(\frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}\delta_j^{\frac{1}{p-1}}})^{p-2}e^{\frac{p-2}{p}v_j(x)}=O(e^{u_j(x)}).$$

Esta cota sigue siendo cierta si $|x-\xi_j|>\varepsilon$, $\forall j=1,\dots,m$, luego concluimos que

$$p\left(U(x)+O(\frac{1}{p^3})\right)^{p-2}=O(\sum_{j=1}^{m}e^{u_j(x)}). \tag{2.1.42}$$

Demostración [Lema 2.3] Con el fin de no recargar la notación en esta demostración, supondremos sin perder generalidad que $\xi=0$ y que $A=I$. Al igual que en la demostración del lema 2.1, definimos $z(x)=H_{k,\xi}(x)+\alpha_k\log 2\delta^2-\alpha_k H(x,\xi)$. Vemos que z satisface la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta z+z=\Delta w_{k,\xi}-w_{k,\xi}(x)+\alpha_k\log\dfrac{1}{|x|^2}+\alpha_k\log 2\delta^2 & \text{en } \Omega\\ \dfrac{\partial z}{\partial\nu}=\alpha_k\left(e^{u_\xi}-\dfrac{\partial u_\xi}{\partial\nu}-2\dfrac{x\cdot\nu(x)}{|x|^2}\right) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notamos que al igual en el lema 2.1, se cumple

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial\nu}\right\|_{L^q(\partial\Omega)}\leq C\delta^{1/q}.$$

Recordemos que por la definición de $w_{k,\xi}$, tenemos que

$$\begin{aligned} w_{k,\xi}(x) &= \phi_{k,\xi}(x)+\alpha_k v(\frac{x}{\delta})\\ &= \phi_{k,\xi}(x)+\alpha_k\log\frac{2\delta^2}{|x-\delta\nu(0)|^2}\\ &= \phi_{k,\xi}(x)+\alpha_k\log 2\delta^2+\alpha_k\log\frac{1}{|x-\delta\nu(0)|^2}, \end{aligned}$$

luego

$$\|-\Delta z(x)+z(x)\|_{L^q(\Omega)}=\left\|\Delta\phi_{k,\xi}(x)-\phi_{k,\xi}(x)+\alpha_k\left(\log\frac{1}{|x|^2}-\log\frac{1}{|x-\delta\nu(0)|^2}\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Por una parte, tenemos que para $1<q<2$

$$\left\|\log\frac{1}{|x|^2}-\log\frac{1}{|x-\delta\nu(0)|^2}\right\|_{L^q(\Omega)}\leq C\delta.$$

Analicemos entonces los términos relativos a $\phi_{k,\xi}$, es decir, tenemos que acotar

$$\|\Delta\phi_{k,\xi}(x) - \phi_{k,\xi}(x)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_{k,\xi}(x)\|_{L^q(\Omega)} + \|\phi_{k,\xi}(x)\|_{L^q(\Omega)}$$

Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega |\phi_{k,\xi}(x)|^q \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0,r)} \ldots + \int_{\Omega \cap B(0,r)^c} \ldots \\ &= J_1 + J_2, \end{aligned}$$

donde r es un radio a escoger. Como $\phi_{k,\xi}$ es acotada, tenemos que $J_1 \leq Cr^2$. Para $|x| > \rho$, $\phi_{k,\xi} = 0$, luego solo nos interesa la región $r < |x| < \rho$. Notemos que si $\delta^{-1}r \to \infty$, entonces $\delta^{-1}|x| \to \infty$, luego tendremos también que $\delta^{-1}F(x) \to \infty$[3], lo que nos permitiría usar (2.1.9). Bajo este supuesto, tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi_{k,\xi}(x)| &= \left|\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x))\eta(x)\right| \\ &\leq C\left(\frac{\delta}{|F(x)|}\right)^\alpha \\ &\leq C\left(\frac{\delta}{r}\right)^\alpha, \end{aligned}$$

luego $J_2 \leq C\left(\frac{\delta}{r}\right)^{q\alpha}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega |\Delta(\phi_{k,\xi}(x))|^q \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0,r)} \ldots + \int_{\Omega \cap B(0,r)^c} \ldots \\ &= J_3 + J_4, \end{aligned}$$

Al igual que antes, como $\Delta(\phi_{k,\xi}(x))$ es una función acotada, tenemos que $J_3 \leq Cr^2$. Para J_4, tenemos que (usando notación reducida en que índice repetido se suma)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x)) = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x_j \partial x_l}(\frac{1}{\delta}F(x))\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)\frac{\partial F_l}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{\delta}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(\frac{1}{\delta}F(x))\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i^2}(x)$$

[3] de hecho, dado que F es un difeomorfismo, $|F(x)| \geq Cr$ en esta región

de donde

$$\begin{aligned}
\left|\Delta(\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x)))\eta(x-\xi)\right| &\leq \frac{1}{\delta^2}\left|\nabla^2\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x))\right||DF(x)|^2+\frac{C}{\delta}\left|\nabla\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x))\right||\Delta F(x)| \\
&\leq \frac{C}{\delta^2}\frac{\delta^{2+\alpha}}{F(x)^{2+\alpha}}+\frac{C}{\delta}\frac{\delta^{1+\alpha}}{F(x)^{1+\alpha}} \\
&\leq C\delta^\alpha\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}+\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|\Delta\phi_{k,\xi}(x)| &= \left|\Delta(\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x)))\eta(x)+\Delta\eta(x)\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x))+2\nabla(\phi_k(\frac{1}{\delta}F(x)))\cdot\nabla\eta(x)\right| \\
&\leq C\left(\frac{\delta}{r}\right)^\alpha\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+1\right).
\end{aligned}$$

Ahora, si escogemos $r<1$, tenemos que

$$|\Delta\phi_{k,\xi}(x)|\leq C\left(\frac{\delta^\alpha}{r^{2+\alpha}}\right).$$

Juntando todo lo anterior, tenemos que

$$I_1\leq C\left(r^2+\left(\frac{\delta}{r}\right)^{q\alpha}\right),$$

$$I_2\leq C\left(r^2+\left(\frac{\delta^\alpha}{r^{2+\alpha}}\right)^q\right).$$

Luego, escogiendo $r=\delta^\beta$ con $0<\beta<\frac{\alpha}{2+\alpha}$ y p suficientemente grande (de modo que $\delta<1$), tenemos que para $1<q<2$

$$\|\Delta\phi_{k,\xi}(x)-\phi_{k,\xi}(x)\|_{L^q(\Omega)}\leq C\delta^\lambda=O(\delta^\lambda),$$

con $0<\lambda<1$. Finalmente, la conclusión es igual que en (2.1), es decir,

$$\|z\|_{C^\gamma(\Omega)}\leq C\delta^\lambda,$$

para $0<\gamma<\frac{1}{2}+\frac{1}{q}$.

■

Demostración [Lema 2.5] Como antes, supondremos que $A=I$ y que $\xi=0$. Además, trabajaremos en la variable expandida $y = \frac{x}{\delta}$, con dominio en $\Omega_\delta = \Omega/\delta$. Como $\partial\Omega$ es de clase al menos C^2, se puede representar como el grafo de una función suave en torno a 0, es decir, fijamos $R = \rho/2$ (el valor definido al comienzo de esta sección), de este modo $\partial\Omega \cap B(0, R) = \{(x_1, x_2)/x_2 = G(x_1)\}$. Además, por los supuestos sobre A y ξ, pedimos que $G(0) = G'(0) = 0$. Usamos también la función G, para escribir el enderezamiento como $F(x) = F(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - G(x_1))$.

Dado lo anterior, nos interesa estimar para $y = (y_1, y_2) \in \partial\Omega_\delta$,

$$\begin{aligned}
C(y) &:= \left|\delta\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\nu}(\delta y) - e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(\delta y) + g(y)\right]\right| \\
&= \left|\nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) \cdot (DF(\delta y) \cdot \nu_{\Omega_\delta}(y)) - e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(\delta y) + g(y)\right]\right| \\
&\leq \left|\nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) \cdot (DF(\delta y) \cdot \nu_{\Omega_\delta}(y)) - \nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) \cdot \nu_{\Omega_\delta}(y)\right| + \\
&\quad \left|\nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) \cdot \nu_{\Omega_\delta}(y) - e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(\delta y) + g(y)\right]\right| \\
&\leq C_1(y) + C_2(y).
\end{aligned}$$

Consideremos $0 < r < R$, un número pequeño a determinar, y consideremos primero el caso $r/\delta < |y| < R/\delta$. Para acotar C_1, notemos que $DF(\delta y) = O(\delta\,|y|)$, además, dado que F es un difeomorfismo, $F(\delta y) \geq C\delta\,|y|$ luego, si $\delta^{-1}r \to \infty$,

$$\begin{aligned}
C_1(y) &\leq C\delta\,|y|\,|\nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y))| \\
&\leq C\delta\,|y|\left(\frac{\delta}{\delta\,|y|}\right)^{1+\alpha} \\
&\leq C\frac{\delta}{|y|^\alpha} = O(\frac{\delta^{1+\alpha}}{r^\alpha}).
\end{aligned}$$

Ahora, escribamos $\partial\Omega_\delta$ como el grafo de la función $G_\delta(y_1) := \delta^{-1}G(\delta y_1)$. Notemos que $G_\delta'(y_1) = G'(\delta y_1) = O(\delta\,|y|)$ para todo $|y| \leq R/\delta$. Así, tenemos que para $y \in \partial\Omega_\delta \cap B(0, R/\delta)$,

$C_2(y)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} C_2(y) &= \left|\nabla\phi(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\cdot \nu_{\Omega_\delta}(y) - e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(y)+g(y)\right]\right| \\ &\leq \left|\frac{G'_\delta(y_1)}{\sqrt{G'_\delta(y_1)^2+1}}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right| + \\ &\quad \left|-\frac{1}{\sqrt{G'_\delta(y_1)^2+1}}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) - e^{v(y)}\left[\tilde{\phi}(y)+g(y)\right]\right| \\ &= C_3(y)+C_4(y). \end{aligned}$$

Para estimar $C_3(y)$, notemos primero que $\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq |x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} C_3(y) &\leq |G'_\delta(y_1)|\left|\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right| \\ &\leq C\delta\,|y|\left(\frac{\delta}{\delta\,|y|}\right)^{1+\alpha} \\ &= O(\frac{\delta^{1+\alpha}}{r^\alpha}). \end{aligned}$$

Finalmente, para $C_4(y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{G'_\delta(y_1)^2+1}}\frac{\partial\phi}{\partial y_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y)) - \frac{\partial\phi}{\partial y_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right| &\leq |G'_\delta(y_1)|^2\left|\frac{\partial\phi}{\partial y_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right| \\ &\leq C\delta^2\,|y|^2\,(\frac{1}{|y|^{1+\alpha}}) \\ &= O(\delta^2\,|y|^{1-\alpha}) = O(\delta^{1+\alpha}). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que para $B := \Omega_\delta\cap(B(0,R/\delta)\setminus B(0,r/\delta))$,

$$\begin{aligned} \left|e^{v(y)} - e^{v(\frac{1}{\delta}F(\delta y))}\right| &\leq |y-\frac{1}{\delta}F(\delta y)|\sup_{z\in B}\left|\nabla e^{v(z)}\right| \\ &\leq C\,|G_\delta(y)|\,\frac{\delta^3}{r^3} \leq C\frac{\delta^2}{r}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left|e^{v(y)}g(y)-e^{v(\frac{1}{\delta}F(\delta y))}g(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right| &\leq |y-\frac{1}{\delta}F(\delta y)|\sup_{z\in B}\left|\nabla(e^{v(z)}g(z))\right|\\ &\leq C\left|G_\delta(y)\right|\frac{\delta^3}{r^3}\log^k\frac{r}{\delta}\\ &\leq C\frac{\delta^2}{r}\log^k\frac{r}{\delta},\end{aligned}$$

pues $G_\delta(y)=O(\delta\left|y\right|^2)$. Juntando lo anterior, obtenemos que para $r/\delta<|y|<R/\delta$, y cualquier $0<\alpha<1$

$$C(y)=O(\frac{\delta^{1+\alpha}}{r^\alpha}+\delta^{1+\alpha}). \tag{2.1.43}$$

Ahora, para $0\leq|y|\leq r/\delta$, solo usamos el acotamiento de las funciones, con que que obtenemos que $C_1(y)\leq Cr$. En cuanto a C_2, vemos que $C_3(y)\leq Cr$ y que similarmente, para los términos relativos a $C_4(y)$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{G'_\delta(y_1)^2+1}}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))-\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2}(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right|\leq Cr^2,$$

$$\left|e^{v(y)}-e^{v(\frac{1}{\delta}F(\delta y))}\right|\leq C\frac{r^2}{\delta}$$

y

$$\left|e^{v(y)}g(y)-e^{v(\frac{1}{\delta}F(\delta y))}g(\frac{1}{\delta}F(\delta y))\right|\leq C\frac{r^2}{\delta}.$$

Así, $C_2(y)=O(r+r^2+\frac{r^2}{\delta})$, de donde concluimos que para $0<|y|<r/\delta$,

$$C(y)=O(r+r^2+\frac{r^2}{\delta}).$$

Luego, escogiendo $r=\delta^{\frac{1+\alpha}{2}}$, tenemos que $C(y)=O(\delta^\alpha)$ para p suficientemente grande. Usando la misma elección de r en (2.1.43), se concluye resultado.

■

Demostración [Lema 2.6] Sea $f(x)=(1+\frac{x}{p})^p$, gracias a una expansión de Taylor para el Logaritmo, obtenemos que

$$\log f(x)=x-\frac{x^2}{2p}+\frac{x^3}{3p^2}+O(\frac{x^4}{p^3}),$$

así para $x = a + \frac{b}{p} + \frac{c}{p^2}$, usando las hipótesis sobre $a(x), b(x)$ y $c(x)$, obtenemos

$$\log f(x) = a + \frac{1}{p}(b - \frac{a^2}{2}) + \frac{1}{p^2}(c - ab + \frac{a^3}{3}) + O(\frac{1}{p^3}\log^4(|y|+1)).$$

Para concluir, usamos la expansión de Taylor para la función exponencial, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3}\right)^p &= e^a \cdot \exp\left(\frac{1}{p}(b - \frac{a^2}{2}) + \frac{1}{p^2}(c - ab + \frac{a^3}{3}) + O(\frac{1}{p^3}\log^4(|y|+1))\right) \\ &= e^a \left(1 + \frac{1}{p}(b - \frac{a^2}{2}) + \frac{1}{p^2}(c - ab + \frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2 b}{2} - \frac{a^4}{8})\right. \\ &\quad \left. + O(\frac{1}{p^3}\log^6(|y|+1))\right)\end{aligned}$$

■

2.2. Análisis del Operador Linealizado

El propósito de esta sección es analizar el problema lineal siguiente: Dado $h \in L^\infty(\partial\Omega)$, encontrar ϕ y $c_1, \ldots, c_m$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - W\phi = h + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j e^{u_j} Z_{1j} & \text{en } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j}\phi = 0 & \forall j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

donde $W(x) = pU_\xi(x)^{p-1}$ y $Z_{ij}(x) = z_i(A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j}))$ donde z_i son las funciones definidas anteriormente. Dado que lo necesitaremos más adelante, hacemos explícitas las funciones Z_{ij}:

$$Z_{ij}(x) = \begin{cases} 1 - 2\delta_j \frac{(A_j(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)))_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2} & i = 0, \\ -2\delta_j \frac{(A_j(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)))_1}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2} & i = 1. \end{cases}$$

Proposición 2.8. *Consideremos $\rho > 0$ y m un entero positivo. Entonces existe $p_0 > 1$ y $C > 0$ tales que para todo $p > p_0$ y cualquier familia de puntos $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \partial\Omega$ tales que*

$$|\xi_i - \xi_j| > 2\rho \qquad \forall i \neq j, \tag{2.2.2}$$

y cualquier $h \in L^\infty(\partial\Omega)$*, existe una única solución* $\phi \in L^\infty(\Omega), c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ *de* (2.2.1)*. Mas aún, se tiene que*

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Cp \|h\|_{*,\partial\Omega}. \tag{2.2.3}$$

Antes de demostrar esta proposición, necesitamos analizar un poco el comportamiento de las funciones Z_{ij}, cuando se proyectan a Ω.

Lema 2.9. *Sea* PZ_{ij} *solución de*

$$\begin{cases} -\Delta PZ_{ij} + PZ_{ij} = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial PZ_{ij}}{\partial \nu} = e^{u_j} Z_{ij} & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

entonces, para cada $0 < \alpha < 1$*, tenemos las siguientes expansiones en* $C(\overline{\Omega})$

$$PZ_{0j} = Z_{0j} - 1 + O(\delta_j^\alpha), \quad PZ_{1j} = Z_{1j} + O(\delta_j^\alpha),$$

mas aún, en $C_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{\xi_j\})$

$$PZ_{0j} = O(\delta_j), \quad PZ_{1j} = O(\delta_j).$$

Demostración Para no recargar la notación, supondremos sin perder generalidad que A_j es la identidad. Veamos primero el caso $i = 0$. Definimos $f_1 = PZ_{0j} - Z_{0j} + 1$, y vemos que f_1 satisface

$$\begin{cases} -\Delta f_1 + f_1 = -Z_{0j} + 1 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \nu} = e^{u_j} Z_{0j} - \dfrac{\partial Z_{0j}}{\partial \nu} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tal como en el lema 2.1, bastará realizar las estimaciones en $L^q(\Omega)$, con $1 < q < 2$, para concluir. En primer lugar

$$\begin{aligned} \int_\Omega |1 - Z_{0j}|^q &= \int_\Omega \left| 2\delta_j \frac{(x - \xi_j - \delta_j \nu(\xi_j))_2}{|x - \xi_j - \delta_j \nu(\xi_j)|^2} \right|^q dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(\xi_j, 2\delta_j)} + \int_{\Omega \cap B(\xi_j, 2\delta_j)^c}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)}\left|2\delta_j\frac{(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2}\right|^q dx &\leq C\delta_j^q\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)}\left|\frac{1}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|}\right|^q dy\\ &\leq C\delta_j^q\int_0^{2\delta_j}s^{1-q}ds\\ &\leq C\delta_j^2,\end{aligned}$$

Ahora, notando que para $|x-\xi_j|>2\delta_j$, $|x-\xi_j|\leq 2\,|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)^c}\left|2\delta_j\frac{(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2}\right|^q dx &\leq C\delta_j^q\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)^c}\frac{1}{|x-\xi|^q}dx\\ &\leq C\delta_j^q\int_{2\delta_j}^{D}s^{1-q}ds\\ &\leq C\delta_j^q,\end{aligned}$$

donde $D=diam(\Omega)$. Las estimaciones anteriores nos dicen que

$$\|-\Delta f_1+f_1\|_{L^q(\Omega)}=O(\delta_j).$$

Por otra parte, para hacer la estimación en el borde, es conveniente recordar que como estamos suponiendo que $A_j=I$, luego tenemos que para todo $x\in\partial\Omega$

$$\begin{array}{ll}|(x-\xi_j)\cdot\nu(x)|\leq C\,|x-\xi_j|^2 & |1-\nu(x)\nu(\xi_j)|\leq C\,|x-\xi_j|^2\\ |1+\nu(x)_2|\leq C\,|x-\xi_j| & |\nu(x)_1|\leq C\,|x-\xi_j|\,.\end{array}\tag{2.2.4}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_{0j}}{\partial\nu}=&\,4\delta_j\frac{(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^4}-4\delta_j^2\frac{(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2\nu(\xi_j)\cdot\nu(x)}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^4}\\ &-2\delta_j\frac{\nu(x)_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}e^{u_j}Z_{0j}-\frac{\partial Z_{0j}}{\partial\nu}=&\,2\delta_j\frac{1+\nu(x)_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2}-4\delta_j^2\frac{(1-\nu(x)\cdot\nu(\xi_j))(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^4}\\ &-4\delta_j\frac{(x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j))_2(x-\xi_j)\cdot\nu(x)}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^4},\end{aligned}$$

usando (2.2.4) y teniendo presente que $\frac{|x-\xi_j|}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|} \leq C$, para todo x y para todo δ_j, obtenemos que

$$\left| e^{u_j} Z_{0j} - \frac{\partial Z_{0j}}{\partial \nu} \right| \leq C \frac{\delta_j}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi_j)|}.$$

Ahora, fijando $r > 0$ pequeño, obtenemos que para $|x-\xi_j| > r$

$$\left| e^{u_j} - \frac{\partial Z_{0j}}{\partial \nu} \right| \leq C\delta_j,$$

considerando el cambio de variable $\delta_j y = x - \xi_j$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,r)} \left| e^{u_j} - \frac{\partial Z_{0j}}{\partial \nu} \right|^q &= C\delta_j \int_{\partial\Omega_j\cap B(0,r/\delta_j)} \left| \frac{1}{|y-\nu(0)|} \right|^q dy \\
&\leq C\delta_j \int_0^{r/\delta_j} \frac{1}{(1+s)^q} ds \\
&\leq C\delta_j,
\end{aligned}$$

lo que nos dice que

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \right\|_{L^q(\partial\Omega)} = O(\delta_j^{1/q}) \tag{2.2.5}$$

Así, para $1 < q < 2$, obtenemos que

$$\|-\Delta f_1 + f_1\|_{L^q(\Omega)} + \left\| \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \right\|_{L^q(\partial\Omega)} = O(\delta_j^{1/q})$$

Veamos ahora el caso $i = 1$. Como antes, definimos $f_2 = PZ_{1j} - Z_{1j}$, y vemos que f_2 satisface la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta f_2 + f_2 = -Z_{1j} & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \nu} = e^{u_j} Z_{1j} - \dfrac{\partial Z_{1j}}{\partial \nu} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $|x-\xi_j| \leq 2\delta_j$ y $1 < q < 2$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)} |Z_{1j}|^q &= \int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)} \left| 2\delta_j \frac{(x-\xi-\delta_j\nu(\xi))_1}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^2} \right|^q \\
&\leq C\delta_j^q \int_0^{2\delta_j} s^{1-q} ds \\
&\leq C\delta_j^2.
\end{aligned}$$

Repitiendo lo hecho en el caso $i = 0$ (pues en ambos casos la estimación es igual), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)^c} |Z_{1j}|^q &\leq C\int_{\Omega\cap B(\xi_j,2\delta_j)^c} \frac{1}{|x-\xi_j|^q}\\ &\leq C\delta_j^q\int_{2\delta_j}^{D} s^{1-q}ds\\ &\leq C\delta_j^q.\end{aligned}$$

Así, para $1 < q < 2$

$$\|-\Delta f_2 + f_2\|_{L^q(\Omega)} = O(\delta_j).$$

Para el término de frontera, notemos primero que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_{1j}}{\partial\nu} = &-2\delta_j\frac{\nu(x)_1}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^2} + 4\delta_j\frac{(x-\xi-\delta_j\nu(\xi))_1(x-\xi_j)\cdot\nu(x)}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^4}\\ &+ 4\delta_j^2\frac{(x-\xi-\delta_j\nu(\xi))_1\nu(x)\cdot\nu(\xi_j)}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^4},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}e^{u_j}Z_{1j} - \frac{\partial Z_{1j}}{\partial\nu} = &4\delta_j^2\frac{(x-\xi-\delta_j\nu(\xi))_1(\nu(x)\cdot\nu(\xi_j)-1)}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^4} + 2\delta_j\frac{v(x)_1}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^2}\\ &- 4\delta_j\frac{(x-\xi-\delta_j\nu(\xi))_1(x-\xi_j)\cdot\nu(x)}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|^4},\end{aligned}$$

usando (2.2.4), obtenemos que

$$\left|e^{u_j}Z_{1j} - \frac{\partial Z_{1j}}{\partial\nu}\right| \leq C\frac{\delta_j}{|x-\xi-\delta_j\nu(\xi)|},$$

luego podemos realizar la misma estimación que en (2.2.5), es decir

$$\left\|\frac{\partial f_2}{\partial\nu}\right\|_{L^q(\partial\Omega)} = O(\delta_j^{1/q}).$$

Por lo tanto para $1 < q < 2$

$$\|-\Delta f_2 + f_2\|_{L^q(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f_2}{\partial\nu}\right\|_{L^q(\partial\Omega)} = O(\delta_j^{1/q}).$$

La conclusión es análoga a la realizada en el lema 2.1, por lo que la omitimos. Para las estimaciones en $C_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{\xi_j\})$, basta notar que las funciones $1 - Z_{0j}$ y Z_{1j} son de tamaño δ_j

lejos de ξ_j[4].

$\blacksquare$

Para demostrar la proposición 2.8 seguiremos los cálculos realizados tanto en [DdPM05] como en [EMP06], dividiendo los cálculos en 4 proposiciones. En primer lugar estudiaremos la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} - W\phi = h & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

donde seguiremos utilizando la norma $\|\cdot\|_{*,\partial\Omega}$ para estimar $h \in L^\infty(\partial\Omega)$, e introducimos, para $f \in L^\infty(\Omega)$, la norma

$$\|f\|_{**,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} \left| \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{\delta_j}}{(|x-\xi_j| + \delta_j)^{\frac{5}{2}}} \right)^{-1} f(x) \right|.$$

Al respecto, tenemos la primera de la proposiciones

Proposición 2.10. *Existe $p_0 > 1$ tal que para todo $p > p_0$ y cualquier solución ϕ de* (2.2.6) *que satisface además las condiciones de ortogonalidad*

$$\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{ij}\phi = 0, \qquad \forall i = 0,1 \quad j = 1,\dots,m, \tag{2.2.7}$$

entonces

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\|h\|_{*,\partial\Omega} + \|f\|_{**,\Omega}).$$

Para demostrar esta proposición, es necesaria la construcción de una "barrera" para poder probar un principio del máximo para (2.2.6) "lejos" de los puntos ξ_j.

Lema 2.11. *Para $p > 1$ suficientemente pequeño y $0 < \sigma < 1$, existe $R_0 > 0$ y una función suave $\psi : \Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \mapsto \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi \ge c\left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_k^\sigma}{|x-\xi_k|^{2+\sigma}}\right) & \text{en } \Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - W\psi \ge c\left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_k^\sigma}{|x-\xi_k|^{1+\sigma}}\right) & \text{en } \partial\Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \\ \psi > 0 & \text{en } \Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \\ \psi \ge 1 & \text{en } \Omega \cap (\cup_{k=1}^m \partial B(\xi_k, R_0\delta_k)) \end{cases}$$

[4] esta estimación se puede mejorar, pero no necesitamos más que eso en este trabajo.

Donde las constantes $R_1 > 0$ *y* $c > 0$ *pueden ser escogidas independientemente de* p*. Además* $0 < \psi \leq M$ *uniformemente en* $\Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k)$*.*

Demostración [Proposición 2.10] Gracias a la barrera del lema 2.11, podemos deducir el siguiente principio del máximo: Si $\phi \in H^1(\Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k))$, satisface

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi \geq 0 & \text{en } \Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - W\phi \geq 0 & \text{en } \partial\Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k) \\ \phi \geq 0 & \text{en } \Omega \cap (\cup_{k=1}^m \partial B(\xi_k, R_0\delta_k)), \end{cases}$$

entonces $\phi \geq 0$ en $\Omega \setminus \cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k)$. Sean f, h acotadas y ϕ una solución de (2.2.6) que satisface (2.2.7). Al igual que en [DdPM05], podemos estimar $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$ en términos de $\|h\|_{*,\partial\Omega}$, $\|f\|_{**,\Omega}$ y la siguiente norma interior

$$\|\phi\|_i = \sup_{\Omega \cap (\cup_{k=1}^m B(\xi_k, R_0\delta_k))} |\phi| .$$

Repitiendo lo hecho en [DdPM05], obtenemos que

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|h\|_{*,\partial\Omega} + \|f\|_{**,\Omega} + \|\phi\|_i). \tag{2.2.8}$$

Suponiendo por contradicción que existen $p_n \to \infty$ y puntos $\xi_1^n, \ldots, \xi_m^n \in \partial\Omega$ que satisfacen (2.2.2) y funciones ϕ_n, h_n, f_n tales que $\|\phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, $\|h_n\|_{*,\partial\Omega} \to 0$, $\|f\|_{**,\Omega} \to 0$, tales que para cada n, satisfacen (2.2.6) y (2.2.7). Gracias a (2.2.8) y los supuestos anteriores, tenemos que $\|\phi_n\|_i \geq d > 0$ para todo n. Con esto, podemos asumir que para algún j, se tiene que

$$\sup_{\Omega \cap B(\xi_j, R_0\delta_j)} |\phi_n| \geq d > 0.$$

Definamos $\hat{\phi}_n^j(y) = \phi_n(\delta_{j,n} A_j^{-1} y + \xi_{j,n})$, luego estimaciones elípticas nos permiten decir que $\hat{\phi}_n^j$ converge uniformemente en compactos a $\hat{\phi}_\infty^j$, una solución de (2.1.6) con $\mu = 1$, luego, por el resultado mencionado anteriormente, se puede escribir como una combinación lineal de z_0 y z_1. Por otra parte, gracias al Teorema de Lebesgue (como $\|\hat{\phi}_n^j\|_\infty \leq 1$), podemos pasar las condiciones de ortogonalidad al límite, para obtener que

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^v z_i \hat{\phi}_\infty^j = 0, \quad i = 0, 1,$$

lo que contradice $\hat{\phi}_\infty^j \neq 0$.

∎

Demostración [Lema 2.11] Siguiendo lo realizado en el lema 4.3 de [DdPM05], definimos

$$\psi_{1j}(x) = \delta_j^\sigma \frac{(x - \xi_j) \cdot \nu(\xi_j)}{r^{1+\sigma}}$$

donde $r = |x - \xi_j - \delta_j \nu(\xi_j)|$. Un cálculo directo muestra que

$$\Delta \psi_{1j} = O(\frac{\delta_j^\sigma}{r^{2+\sigma}}) \qquad \text{en } \Omega.$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, y R_1 suficientemente grande (pero independiente de p), tenemos que

$$\frac{\partial \psi_{1j}}{\partial \nu} \geq c \frac{\delta_j^\sigma}{r^{1+\sigma}} \qquad \text{para } R_1 \delta_j < r < \varepsilon.$$

También definimos

$$\psi_{2j}(x) = 1 - \frac{\delta_j^\sigma}{r^\sigma},$$

que satisface

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_{2j} &= \sigma^2 \frac{\delta_j^\sigma}{r^{2+\sigma}} \qquad \text{y} \\ \frac{\partial \psi_{2j}}{\partial \nu} &= O(\frac{\delta_j^\sigma}{r^{1+\sigma}}) \qquad \text{si } R_1 \delta_j < r < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, para C_j suficientemente grande, pero independiente de p, tenemos que

$$\psi_{3j} = \psi_{1j} + C_j \psi_{2j}$$

satisface

$$-\Delta \psi_{3j} + \psi_{3j} \geq \sigma^2 \frac{\delta_j^\sigma}{r^{2+\sigma}} \qquad \text{para } R_1 \delta_j < r < \varepsilon.$$

Además, recordando que para $|x - \xi_j| \leq \rho$, $W(x) = O(e^{u_j}) = O(\frac{\delta_j}{r^2})$, obtenemos que

$$\frac{\partial \psi_{3j}}{\partial \nu} - W \psi_{3j} \geq c' \frac{\delta_j^\sigma}{r^{1+\sigma}} \qquad \text{para } R_1 \delta_j < r < \varepsilon.$$

Para concluir, definimos $\eta_j \in C^\infty(\Omega)$, tal que $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j \equiv 1$ en $\Omega \cap B(\xi_j, \varepsilon/2)$ y $\eta_j \equiv 0$ en $\Omega \cap B(\xi_j, \varepsilon)^c$, con $|\nabla \eta_j| \leq C$ y $|\Delta \eta_j| \leq C$ en Ω. Luego para ψ_0 solución de

$$\begin{cases} -\Delta \psi_0 + \psi_0 = 1 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = 1 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

la función

$$\psi = C\psi_0 + \sum_{j=1}^{m} \eta_j \psi_{3j},$$

con C una constante suficientemente grande, satisface las condiciones requeridas (la demostración continúa de manera análoga a la hecha en el lema 4.3 de [DdPM05] por lo cual la omitimos).

■

Proposición 2.12. *Existe $p_0 > 1$ tal que para todo $p > p_0$ y cualquier solución ϕ de* (2.2.6) *que satisface además las condiciones de ortogonalidad*

$$\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j}\phi = 0, \qquad \forall j = 1, \dots, m, \tag{2.2.9}$$

entonces

$$\|\phi\|_{L^\infty\Omega} \leq Cp(\|h\|_{*,\partial\Omega} + \|f\|_{**,\Omega}).$$

Demostración Siguiendo a [EMP06], probaremos esta proposición por contradicción, en donde suponemos que $p_n \|h_n\|_{*,\partial\Omega} \to 0$, $p_n \|f_n\|_{**,\Omega} \to 0$, pero solo se satisface (2.2.9). Luego, tendremos que la función límite $\hat{\phi}^j_\infty$ debe ser proporcional a z_0, mas precisamente

$$\phi^j_n(y) \to C_j z_0(y) \quad \text{en } C^0_{loc}(\mathbb{R}^2_+).$$

La contradicción se obtendrá al probar que $C_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, m$. Para ello, utilizaremos la funciones Z_{0j} como base para construir funciones test apropiadas. Comenzamos por definir s, β_1 solución de

$$\begin{cases} \Delta s = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial s}{\partial \nu} - e^v s = e^v(z_0 + \beta_1(v-1)) & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+ \end{cases} \tag{2.2.10}$$

La existencia de s y β_1 esta garantizada por 2.2. Más aún, dado que lo necesitaremos más adelante, tenemos que

$$\beta_1 = -\frac{\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2}{\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0(v-1)} = -\frac{\pi}{-2\pi} = \frac{1}{2} \tag{2.2.11}$$

Definimos también t como una solución de

$$\begin{cases} \Delta t = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial t}{\partial \nu} - e^v t = e^v & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Si bien es cierto, 2.2 garantiza la existencia de t, con el fin de fijar ideas supondremos que $t(y) = z_0(y) - 1$, que efectivamente es una solución de (2.2.12). A partir de estas funciones y Z_{0j}, construimos

$$g_j(x) = s_j(x) - \beta_1 \log 2\delta_j^2 Z_{0j}(x) + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) t_j(x)$$

donde

$$\begin{aligned} s_j(x) &= s(\frac{1}{\delta_j} F_j(A_j(x - \xi_j))) \eta(A_j(x - \xi_j)) + \beta_1 v_j(x) \\ t_j(x) &= t(A_j(\frac{x - \xi_j}{\delta_j})) - 1 = Z_{0j}(x) - 1. \end{aligned}$$

Antes de continuar, debemos corregir esta función para llevarla a Ω. Para tal efecto, definimos $Ps_j(x) = s_j(x) + Hs_j(x)$, donde Hs_j es un término de corrección definido como una solución de

$$\begin{cases} -\Delta Hs_j + Hs_j = \Delta s_j - s_j & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial Hs_j}{\partial \nu} = \beta_1 \left(e^{u_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} \right) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Tal como en el lema 2.3, podemos decir que $Hs_j(x) = \beta_1 H(x, \xi) - \beta_1 \log 2\delta_j^2 + O(\delta_j^\alpha)$ para cualquier $0 < \alpha < 1$. También, definimos $PZ_{0j}(x)$ y $Pt_j(x) = PZ_{0j} - 1$, donde PZ_{0j} está dada por el lema 2.9. Construidas todas estas funciones, definimos

$$Pg_j(x) = Ps_j(x) - \beta_1 \log 2\delta_j^2 PZ_{0j}(x) + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) Pt_j(x)$$

Ahora, notemos que gracias a la expansión anterior y el lema antes mencionado, obtenemos que

$$Pg_j(x) = g_j(x) + \beta_1 H(x, \xi_j) + O(\delta_j^\alpha) \quad \text{en } C(\overline{\Omega}), \tag{2.2.13}$$
$$Pg_j(x) = \beta_1 G(x, \xi_j) + O(\delta_j^\alpha) \quad \text{en } C_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{\xi_j\}). \tag{2.2.14}$$

Notemos que la función Pg_j satisface

$$\begin{cases} -\Delta Pg_j + Pg_j = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial Pg_j}{\partial \nu} = \dfrac{\partial s_j}{\partial \nu} + \beta_1 \left(e^{u_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} \right) - \beta_1 \log 2\delta_j^2 e^{u_j} Z_{0j} & \text{en } \partial\Omega \\ \qquad + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) e^{u_j} (t_j + 1). \end{cases} \tag{2.2.15}$$

En lo que sigue, para no recargar la notación, omitiremos la dependencia en n, además definimos $R = \rho/2$. Entonces, tenemos ϕ solución de (2.2.6). Multiplicando (2.2.15) por ϕ e integrando por partes, obtenemos que

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial Pg_j}{\partial\nu}-WPg_j\right)\phi=\int_{\partial\Omega}hPg_j+\int_{\Omega}fPg_j \tag{2.2.16}$$

Debemos analizar cada uno de estos términos. En primer lugar, estimemos $\int_{\partial\Omega}hPg_j$:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}hPg_j &= \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}h\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}}\right)Pg_j\\ &\leq \|h\|_{*,\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}}\right)Pg_j,\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{\sqrt{\delta_j}}{(|x-\xi_j|+\delta_j)^{\frac{3}{2}}}Pg_j &= \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)}+\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)^c}\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

Para estimar I_1, hacemos el cambio de variables $\delta_j y=A_j(x-\xi_j)$, de donde

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}Pg_j(\delta_jA_j^{-1}y+\xi_j)\\ &= \int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}g_j(\delta_jA_j^{-1}y+\xi_j)+\beta_1\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}v(y)\\ &\quad -\beta_1\log 2\delta_j^2\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}z_0(y)+\beta_1H(\xi_j,\xi_j)\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}t(y)\\ &\quad +\beta_1\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}H(\delta_jA_j^{-1}y+\xi_j,\xi_j)+O(\delta^{\alpha-\frac{1}{2}})\\ &= -\beta_1\log 2\delta_j^2\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)}\frac{1}{(|y|+1)^{\frac{3}{2}}}z_0(y)+O(1)\\ &= O(|\log\delta_j|)\\ &= O(p).\end{aligned}$$

Para I_2, basta notar que lejos de ξ_j, la función Pg_j es uniformemente acotada, y

$$\frac{\sqrt{\delta_j}}{(|x-\xi_j|+\delta_j)^{\frac{3}{2}}}=O(\sqrt{\delta_j}),$$

luego $I_2 = O(\sqrt{\delta_j})$, de donde

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{\delta_j}}{(|x-\xi_j|+\delta_j)^{\frac{3}{2}}} Pg_j = O(p).$$

Para completar la estimación de esta parte, debemos acotar, para $k \neq j$, términos de la forma $\int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}} Pg_j$. Como antes, hacemos la separación en $|x-\xi_k| \leq R$ y $|x-\xi_k| > R$. Nuevamente, como Pg_j es uniformemente acotada en $|x-\xi_k| \leq R$, tenemos que

$$\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)} \frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}} Pg_j(x) = O(1).$$

Para el otro término, notamos que $Pg_j = O(|\log \delta_j|)$ (solo cerca de ξ_j), luego para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)^c} \frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k|+\delta_k)^{\frac{3}{2}}} Pg_j(x) &= O(\sqrt{\delta_k}) \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)^c} Pg_j(x) \\
&= O(e^{-\frac{\alpha p}{2}}).
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que

$$\int_{\partial\Omega} hPg_j = O(p \|h\|_{*,\partial\Omega}).$$

De manera análoga, tenemos que

$$\int_{\Omega} fPg_j = O(p \|f\|_{**,\Omega}).$$

El lado izquierdo de (2.2.16), debemos analizarlo con más cuidado. En primer lugar, escribimos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Pg_j}{\partial \nu} - WPg_j \right) \phi &= \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})} + \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})} + \int_{\partial\Omega\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{m} B(\xi_k,R))^c} \\
&\quad + \sum_{k\neq j} \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)} \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + \sum_{k\neq j} J_{4k}.
\end{aligned}$$

Veamos primero J_3 que es el término mas simple. En primer lugar, necesitamos estimar $\frac{\partial Pg_j}{\partial \nu}$

en esta región. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial P g_j}{\partial \nu} &= \frac{\partial s_j}{\partial \nu} + \beta_1 \left(e^{u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \right) - \beta_1 \log 2\delta_j^2 e^{u_j} Z_{0j} + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) e^{u_j} t_j + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) e^{u_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(s(\frac{1}{\delta_j} F_j(A_j(x-\xi_j)))\eta(A_j(x-\xi_j)) \right) + \beta_1 e^{u_j} - \beta_1 \log 2\delta_j^2 e^{u_j} Z_{0j} \\ &\quad + \beta_1 H(\xi_j, \xi_j) e^{u_j}(t_j+1)\end{aligned}$$

Ahora, gracias al lema 2.5, más precisamente en (2.1.43), podemos decir que en esta región

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(s(\frac{1}{\delta_j} F_j(A_j(x-\xi_j)))\eta(A_j(x-\xi_j)) \right) = O(\delta_j^{1+\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1$$

luego, como $e^{u_j} Z_{0j} = O(\delta_j^2)$ y $e^{u_j}(t_j+1) = O(\delta_j^2)$, tenemos que

$$\frac{\partial P g_j}{\partial \nu} = \beta_1 e^{u_j} + O(\delta_j^{1+\alpha}).$$

Esto, la estimación (2.2.14) y el hecho que en esta región $e^{u_j} = O(\delta_j)$ y $W(x) = O(p(\frac{C}{p})^{p-1})$, nos permite decir que

$$J_3 = O(\delta_j).$$

Para estimar J_{4k}, al igual que en la estimación anterior (notar que seguimos estando uniformemente lejos de ξ_j), tenemos que

$$\begin{aligned}P g_j &= \beta_1 G(x, \xi_j) + O(\delta_j^\alpha) \\ \frac{\partial P g_j}{\partial \nu} &= \beta_1 e^{u_j} + O(\delta_j^{1+\alpha}),\end{aligned}$$

pero respecto a W, debemos separar los casos. En primer lugar, para $|x-\xi_k| \leq R\sqrt{\delta_k}$, tenemos la estimación (2.1.39), es decir, para $\delta_k y = A_k(x-\xi_k)$

$$W(x) = \frac{e^{v(y)}}{\delta_k} \left(1 + \frac{1}{p}(\tilde{w}_{1k}(y) - v(y) - \frac{v^2(y)}{2}) + O(\frac{\log^4(|y|+1)}{p^2}) \right).$$

Juntando lo anterior, obtenemos que para $k \neq j$

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} \left(\frac{\partial P g_j}{\partial\nu} - W P g_j\right)\phi &= \beta_1 \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} e^{u_j}\phi \\
&\quad -\beta_1 \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} \frac{e^{v(A_k(\frac{x-\xi_k}{\delta_k}))}}{\delta_k} G(x,\xi_j)\phi + O(\frac{1}{p}) \\
&= \beta_1 \int_{\partial\Omega_k\cap B(0,R/\sqrt{\delta_k})} e^{v}\hat{\phi}^k \\
&\quad -\beta_1 G(\xi_k,\xi_j) \int_{\partial\Omega_k\cap B(0,R/\sqrt{\delta_k})} e^{v}\hat{\phi}^k + o(1) \\
&= o(1),
\end{aligned}
$$

donde la última estimación es gracias a que

$$
\int_{\partial\Omega_k\cap B(0,R/\sqrt{\delta_k})} e^{v}\hat{\phi}^k \longrightarrow C_k \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{v} z_0 = 0.
$$

Ahora, para $R\sqrt{\delta_k} \leq |x-\xi_k| \leq R$, solo podemos decir que $W(x) = O(e^{u_k})$, luego, como en esta región $e^{u_j} = O(\delta_j)$ y $G(x,\xi_j) = O(1)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)\setminus B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} & \left(\frac{\partial P g_j}{\partial\nu} - W P g_j\right)\phi = \\
&= \beta_1 \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)\setminus B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} \left(e^{u_j} - W(x)G(x,\xi_j)\right)\phi + O(\delta_j^{\alpha}) \\
&= O(\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)\setminus B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} W(x)) + O(\delta_j^{\alpha}) \\
&= O(\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)\setminus B(\xi_k,R\sqrt{\delta_k})} e^{u_k}) + O(\delta_j^{\alpha}) \\
&= O(\int_{\partial\Omega_k\cap B(0,R/\delta_k)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_k})} e^{v}) + O(\delta_j^{\alpha}) \\
&= O(\sqrt{\delta_k} + \delta_j^{\alpha}) = O(\sqrt{\delta_k}).
\end{aligned}
$$

Veamos ahora J_1, en primer lugar, notemos que gracias a estimaciones análogas a las realizadas en el lema 2.5, podemos decir que para $|x-\xi_j| \leq R\sqrt{\delta_j}$

$$
\delta_j \frac{\partial P g_j}{\partial\nu} = e^{v_j} g_j + e^{v_j} Z_{0j} + \beta_1 H(\xi_j,\xi_j) e^{v_j} + O(\delta_j^{\alpha}),
$$

así

$$\delta_j \frac{\partial P g_j}{\partial \nu} - \delta_j W P g_j = e^{v_j} Z_{0j} + (e^{v_j} - \delta_j W) P g_j - R_j + O(\delta_j^{\alpha}),$$

donde R_j es un término de corrección dado por

$$R_j := e^{v_j}(P g_j - g_j - \beta_1 H(\xi_j, \xi_j)).$$

Luego, haciendo el cambio de variables $\delta_j y = A_j(x - \xi_j)$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int\limits_{\partial\Omega_j \cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} \left(\delta_j \frac{\partial P g_j}{\partial \nu} - \delta_j W P g_j\right) \hat{\phi}^j \\
&= \int\limits_{\partial\Omega_j \cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^{v(y)} z_0(y) \hat{\phi}^j \\
&\quad + \int\limits_{\partial\Omega_j \cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} \left(e^{v(y)} - \delta_j W(\delta_j A_j^{-1} y + \xi_j)\right) P g_j(\delta_j A_j^{-1} y + \xi_j) \hat{\phi}^j \\
&\quad - \int\limits_{\partial\Omega_j \cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} R_j(\delta_j A_j^{-1} y + \xi_j)) \hat{\phi}^j + O(\delta_j^{\theta}),
\end{aligned}$$

donde $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Dado que $\hat{\phi}^j \to C_j z_0$ y $\|\hat{\phi}^j\|_\infty \leq 1$, tenemos que

$$\int\limits_{\partial\Omega_j \cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^{v(y)} z_0(y) \hat{\phi}^j = C_j \int\limits_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{v} z_0^2 + O(\delta_j^2).$$

Ahora, utilizando la expansión (2.1.39) para $W(x)$ y la expansión en esta región para $P g_j$, tenemos que

$$\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} \left(e^{v(y)} - \delta_j W(\delta_j A_j^{-1}y+\xi_j)\right) Pg_j(\delta_j A_j^{-1}y+\xi_j)\hat{\phi}^j =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{p}\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^v\left(\tilde{w}_{1j} - v - \frac{v^2}{2}\right) Pg_j(\delta_j y)\hat{\phi}^j + O(\frac{1}{p^2})\\
&= -\frac{1}{p}\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^v g_j(\delta_j y)\hat{\phi}^j\left(\tilde{w}_{1j} - v - \frac{v^2}{2}\right)\\
&\quad -\frac{\beta_1}{p}\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^v\hat{\phi}^j H(\delta_j A_j^{-1}y+\xi_j,\xi_j)\left(\tilde{w}_{1j} - v - \frac{v^2}{2}\right) + O(\frac{1}{p^2})\\
&= \frac{\beta_1\log 2\delta_j^2}{p}\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} e^v z_0\hat{\phi}^j\left(\tilde{w}_{1j} - v - \frac{v^2}{2}\right) + o(1)\\
&= -\beta_1 C_j\int\limits_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v(w_1 - v - \frac{v^2}{2})z_0^2 + o(1).
\end{aligned}$$

El término que resta es el correspondiente a R_j, para estimarlo, usamos la expansión (2.2.13) y el hecho que $\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0 = 0$ para obtener

$$\int\limits_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\sqrt{\delta_j})} R_j(\delta_j A_j^{-1}y+\xi_j))\hat{\phi}^j = o(1).$$

Reuniendo los cálculos anteriores, se llega que

$$J_1 = C_j\left(\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 - \beta_1\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v(w_1 - v - \frac{v^2}{2})z_0^2\right) + o(1)$$

Finalmente, para J_2, gracias a (2.1.43), obtenemos que

$$\delta_j\frac{\partial Pg_j}{\partial\nu} = e^{v_j}g_j + e^{v_j}Z_{0j}) + \beta_1 H(\xi_j,\xi_j)e^{v_j} + O(\delta_j^{1+\alpha}),$$

luego, para $\delta_j y = A_j(x-\xi_j)$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})}\left(\frac{\partial Pg_j}{\partial\nu}-WPg_j\right)=\\
&=\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}\left(\delta_j\frac{\partial Pg_j}{\partial\nu}(x)-\delta_j W(x)Pg_j(x)\right)dy\\
&=\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}e^v z_0\hat{\phi}^j+\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}(e^{v(y)}-\delta_j W(x))Pg_j(x)\hat{\phi}^j dy\\
&\quad-\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}R_j\hat{\phi}^j+O(\delta_j^{1+\alpha}).
\end{aligned}
$$

Pero, recordando que estamos suponiendo que $\|\phi\|_\infty\le 1$

$$\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}e^v z_0\hat{\phi}^j=O(\delta_j^{3/2}),$$

y para $0<\theta<1/2$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega_j\cap B(0,R/\delta_j)\setminus B(0,R/\sqrt{\delta_j})}\left|(e^{v(y)}-\delta_j W(x))Pg_j(x)\hat{\phi}^j\right|dy\\
&\le\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})}|(e^{u_j}-W(x))Pg_j(x)|\,dx\\
&=\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})}(e^{u_j}-W)g_j+\beta_1\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})}(e^{u_j}-w)H(x,\xi_j)+O(\delta_j^\alpha)\\
&=-\beta_1\log 2\delta_j^2\int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)\setminus B(\xi_j,R\sqrt{\delta_j})}(e^{u_j}-W)Z_{0j}+O(\sqrt{\delta_j})\\
&=O(\delta^\theta).
\end{aligned}
$$

Con lo que

$$J_2=O(\delta_j^\theta),\quad 0<\theta<\frac{1}{2},$$

de donde, juntando todo lo anterior, y recordando que $\beta_1=\frac{1}{2}$, (2.2.16) se puede escribir como

$$C_j\left(\int_{\partial\mathbb{R}^2_+}e^v z_0^2-\frac{1}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^2_+}e^v(w_1-v-\frac{v^2}{2})z_0^2\right)=o(1).$$

Para obtener la contradicción, necesitamos probar que

$$\left| \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v (w_1 - v - \frac{v^2}{2}) z_0^2 \right| \geq c > 0.$$

Dado que no conocemos explícitamente la función ϕ_1, y por lo tanto la función w_1, debemos analizar el término $\int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 w_1$. En primer lugar, usando (2.1.22) y la definición de w_1, tenemos que

$$\begin{cases} \Delta w_1 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial \nu} - e^v w_1 = -e^v \dfrac{v^2}{2} & \text{en } \partial \mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

Para calcular la integral mencionada, sea $\tilde{z}$ una solución de

$$\begin{cases} \Delta \tilde{z} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} - e^v \tilde{z} = e^v z_0^2 & \text{en } \partial \mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.2.18}$$

La existencia de tal $\tilde{z}$ esta garantizada pues se verifican ambas condiciones de ortogonalidad, es decir

$$\int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 z_1 = \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^3 = 0,$$

más aún, podemos encontrar una solución explícita de esta ecuación. Recordando que $z_{0\mu}$ es solución del problema homogéneo (2.1.6), tomando

$$\tilde{z}(y) = \frac{\partial z_{0\mu}}{\partial \mu}(y) \bigg|_{\mu=1} = -1 - 2 \frac{y_1^2 - (y_2+1)^2}{(y_1^2 + (y_2+1)^2)^2}, \tag{2.2.19}$$

encontramos una solución de (2.2.18). Con esto en mente, multiplicando (2.2.17) por $\tilde{z}$ e integrando por partes, obtenemos que

$$\int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 w_1 = -\frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v \tilde{z} v^2, \tag{2.2.20}$$

que es una integral que involucra solo funciones conocidas. Con esto, podemos decir que

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v (w_1 - v - \frac{v^2}{2}) z_0^2 \\ &\quad = \frac{1}{4} \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v v^2 (\tilde{z} + z_0^2) + \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} e^v z_0^2 v \neq 0. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración.

■

Proposición 2.13. *Existe $p_0 > 1$ tal que para todo $p > p_0$ y cualquier solución ϕ de* (2.2.1) *entonces*

$$\|\phi\|_{L^\infty \Omega} \leq Cp \|h\|_{*,\partial\Omega} .$$

Demostración Gracias a la proposición 2.12, tenemos que

$$\|\phi\|_{L^\infty \Omega} \leq Cp(\|h\|_{*,\partial\Omega} + \sum_{j=1}^{m} |c_j|),$$

pues $\|e^{u_j} Z_{1j}\|_{*,\partial\Omega} \leq 4$. Al igual que antes, razonando por contradicción, supondremos que $\|\phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ y que

$$p_n \|h_n\|_{*,\partial\Omega} \to 0, \quad p_n \sum_{j=1}^{m} \left|c_j^n\right| \geq d > 0. \tag{2.2.21}$$

Nuevamente, omitiremos la dependencia en n y denotamos $\hat{\phi}^j(y) = \phi(\delta_j A_j^{-1} y + \xi_j)$. Sea ahora PZ_{1j} como en el lema 2.9. Multiplicando (2.2.1) por PZ_{1j} e integrando por partes obtenemos que

$$\int_{\partial\Omega} hPZ_{1j} + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_{\partial\Omega} e^{u_k} Z_{1k} PZ_{1j} = \int_{\partial\Omega} (e^{u_j} - W) PZ_{1j}\phi + \int_{\partial\Omega} (Z_{1j} - PZ_{1j}) e^{u_j} \phi.$$

En primer lugar, dado que PZ_{1j} es uniformemente acotada en Ω

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} hPZ_{1j} &\leq C \int_{\partial\Omega} |h| \\
&\leq C \|h\|_{*,\partial\Omega} \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{\delta_k}}{(|x-\xi_k| + \delta_k)^{3/2}} \\
&\leq C \|h\|_{*,\partial\Omega} \left(\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} \frac{1}{(1+|y|)^{3/2}} + o(1) \right) \\
&\leq C \|h\|_{*,\partial\Omega} .
\end{aligned}$$

Por otra parte, para $0 < \beta < 1/2$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (e^{u_j} - W) P Z_{1j} \phi &= \int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h}) \cap \partial\Omega} + \int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h})^c \cap \partial\Omega} \\
&= \int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h}) \cap \partial\Omega} (e^{u_j} - W) Z_{1j} \phi + C\delta_j^{\alpha} \int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h}) \cap \partial\Omega} (e^{u_j} - W) Z_{1j} \phi \\
&\quad + O(\sqrt{\delta_j}\, \|\phi\|_\infty) \\
&= \int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h}) \cap \partial\Omega} (e^{u_j} - W) Z_{1j} \phi + O(\delta^{\beta}\, \|\phi\|_\infty).
\end{aligned}$$

Veamos un poco más en detalle la integral del lado derecho, usando la expansión de W, y el cambio de variables $\delta_j y = A_j(x - \xi_j)$

$$\begin{aligned}
\int_{B(\xi_j, R\sqrt{\delta_h}) \cap \partial\Omega} (e^{u_j} - W) Z_{1j} \phi &= -\frac{1}{p} \int_{B(0, R/\sqrt{\delta_j}) \cap \partial\Omega_j} e^v z_1 \phi_j (w_1 - v - \frac{1}{2} v^2) + O(\frac{1}{p^2}\, \|\phi\|_\infty) \\
&= O(\frac{1}{p}\, \|\phi\|_\infty). \qquad (2.2.22)
\end{aligned}$$

Tenemos también que

$$\left| \int_{\partial\Omega} (Z_{1j} - P Z_{1j}) e^{u_j} \phi \right| = O(\delta_j^{\alpha}\, \|\phi\|_\infty)$$

Finalmente, debemos estimar $\int_{\partial\Omega} e^{u_k} Z_{1k} P Z_{1j}$. Para $k = j$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j} P Z_{1j} &= \int_{\partial\Omega \cap B(\xi_j, R)} + \int_{\partial\Omega \cap B(\xi_j, R)^c} \\
&= \int_{\partial\Omega \cap B(\xi_j, R)} e^{u_j} Z_{1j} P Z_{1j} + O(\delta_j^3) \\
&= \int_{\partial\Omega \cap B(\xi_j, R)} e^{u_j} Z_{1j}^2 + O(\delta_j^{\alpha} \int_{\partial\Omega \cap B(\xi_j, R)} e^{u_j} Z_{1j}) \\
&= \int_{\partial\Omega_j \cap B(0, R/\delta_j)} e^v z_1^2 + O(\delta_j^{\alpha+1}) \\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_1^2 + O(\delta_j^{\alpha+1}). \qquad (2.2.23)
\end{aligned}$$

Y para $j \neq k$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} e^{u_k} Z_{1k} P Z_{1j} &= \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)} + \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)} + \int_{\partial\Omega\cap(B(\xi_k,R)\cup B(\xi_j,R))^c} \\
&= O(\delta_j \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_k,R)} e^{u_k} Z_{1k}) + O(\delta_k^2 \int_{\partial\Omega\cap B(\xi_j,R)} P Z_{1j}) + O(\delta_k^2\delta_j) \\
&= O(\delta_j\delta_k) \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Así juntando todo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} |c_j| &= O(\frac{1}{p}\|\phi\|_\infty + \|h\|_{*,\partial\Omega}) \qquad (2.2.25) \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

luego, como en la proposición anterior (pues la estimación anterior prueba que el lado derecho de (2.2.1) tiende a cero y podemos repetir el argumento usado antes), tendremos que

$$\hat{\phi}^j \longrightarrow C_j z_0, \quad \text{en } C_{loc}(\mathbb{R}^2_+).$$

Gracias a esto último, y el hecho que estamos suponiendo que $\|\phi\|_\infty = 1$, podemos mejorar la estimación (2.2.22), pues

$$\int_{B(0,R/\sqrt{\delta_j})\cap\partial\Omega_j} e^v z_1 \phi_j (w_1 - v - \frac{1}{2}v^2) \to C_j \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^v z_1 z_0 (w_1 - v - \frac{1}{2}v^2) = 0,^5$$

así tenemos que

$$\int_{B(\xi_j,R\sqrt{\delta_h})\cap\partial\Omega} (e^{u_j} - W) Z_{1j}\phi = o(\frac{1}{p}\|\phi\|_\infty),$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{m} |c_j| = o(\frac{1}{p}) + O(\|h\|_{*,\partial\Omega}),$$

lo que contradice (2.2.21).

■

Concluimos esta sección con la demostración de la proposición inicial

Demostración [Proposición 2.8] Siguiendo la notación de [EMP06], para probar la existen-

[5] pues la función $e^v z_0(w_1 - v - \frac{1}{2}v^2)$ es simétrica

cia de soluciones de (2.2.1), consideramos

$$K_\xi = \left\{ \sum_{j=1}^{m} c_j P Z_{1j} : c_j \in \mathbb{R}, \text{para } j = 1, \ldots, m \right\},$$

y

$$K_\xi^\perp = \left\{ \phi \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j} \phi = 0, \forall j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Sea $\Pi_\xi : L^2(\partial\Omega) \to K_\xi$, definido como

$$\Pi_\xi \phi = \sum_{j=1}^{m} c_j P Z_{1j},$$

donde $c = (c_j)$ queda *únicamente* determinado, gracias a (2.2.23) y (2.2.24), por el sistema

$$\int_{\partial\Omega} e^{u_k} Z_{1k} (\phi - \sum_{j=1}^{m} c_j P Z_{1j}) = 0, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, m.$$

Definimos también $\Pi_\xi^\perp = \mathrm{Id} - \Pi_\xi : L^2(\partial\Omega) \to K_\xi^\perp$. Definidos estos operadores, la formulación débil de la ecuación (2.2.1), se puede escribir como: Encontrar $\phi \in K_\xi^\perp \cap H^1(\Omega)$, tal que

$$(\phi, \psi)_{H^1(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} W \phi \psi = \int_{\partial\Omega} h \psi, \quad \text{para todo } \psi \in K_\xi^\perp \cap H^1(\Omega).$$

Gracias al teorema de representación de Riesz, podemos reescribir esta ecuación en $K_\xi^\perp \cap H^1(\Omega)$ como:

$$(\mathrm{Id} + K)\phi = H,$$

donde, en términos formales, $H = \Pi_\xi(-\Delta + \mathrm{Id})^{-1} h$ y $K = -\Pi_\xi(-\Delta + \mathrm{Id})^{-1} W$ resulta ser un operador compacto en $K_\xi^\perp \cap H^1(\Omega)$ gracias a la inclusión de trazas.

Finalmente, la Alternativa de Fredholm garantiza la existencia de soluciones para $H \in K_\xi^\perp$, pues la ecuación homogénea $\phi + K(\phi) = 0$ admite solo la solución nula, como lo demuestra la proposición 2.13.

■

Observación 2.5. Dado $h \in L^\infty(\Omega)$, sea ϕ la solución de (2.2.1) dada por la proposición 2.8. Multiplicando la ecuación por ϕ e integrando por partes, obtenemos que

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} W \phi^2 + \int_{\partial\Omega} h \phi.$$

Además, gracias a la segunda parte de la proposición 2.7, podemos decir que

$$|\int_{\partial\Omega} W\phi^2| \leq C\,\|\phi\|_\infty^2\,,$$

por lo tanto

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|h\|_{*,\partial\Omega} + \|\phi\|_\infty). \tag{2.2.26}$$

2.3. Problema No-Lineal Auxiliar

Consideremos el problema no-lineal

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - W\phi = R + N(\phi) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j e^{u_j} Z_{1j} & \text{en } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j}\phi = 0 & \forall j = 1,\ldots,m, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

donde $W = pU_\xi^{p-1}$, $N(\phi) = (U_\xi + \phi)^p - U_\xi^p - pU_\xi^{p-1}\phi$ y $R = U_\xi^p - \frac{\partial U_\xi}{\partial\nu}$, y U_ξ está dado por (2.1.36). Respecto a esta ecuación tenemos el siguiente

Lema 2.14. *Sea m un entero positivo. Entonces existe $p_0 > 1$ tal que para todo $p > p_0$, y para toda familia de puntos $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \partial\Omega$, tales que*

$$|\xi_j - \xi_k| > 2\rho, \quad \forall j \neq k,$$

la ecuación (2.3.1) *admite una única solución $\phi, c_1, \ldots, c_m$, tal que*

$$\|\phi\|_\infty \leq \frac{C}{p^3}. \tag{2.3.2}$$

Mas aún,

$$\sum_{j=1}^{m} |c_j| \leq \frac{C}{p^4}, \quad \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{p^3}, \tag{2.3.3}$$

Demostración De acuerdo a la sección anterior, en términos del operador T, el problema (2.3.1) se puede escribir como

$$\phi = T(N(\phi) + R) \equiv A(\phi). \tag{2.3.4}$$

Para $\theta > 0$, consideramos el espacio

$$\mathcal{F}_\theta = \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}) : \|\phi\|_\infty \leq \frac{\theta}{p^3} \right\}.$$

Gracias a la proposición 2.8, tenemos que

$$\|A(\phi)\|_\infty \leq Cp \left(\|R\|_{*,\partial\Omega} + \|N(\phi)\|_{*,\partial\Omega} \right).$$

Por una parte, por la proposición 2.7, $\|R\|_{*,\partial\Omega} = O(\frac{1}{p^4})$. Y respecto a $N(\phi)$, tenemos las siguientes estimaciones para $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_\theta$

- ⋄ $\|N(\phi)\|_{*,\partial\Omega} \leq Cp \|\phi\|_\infty^2$,
- ⋄ $\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{*,\partial\Omega} \leq Cp \max_{i=1,2} \|\phi_i\|_\infty \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$.

En efecto, tenemos que

$$|N(\phi(x))| \leq p(p-1) \left(U(x) + O(\frac{1}{p^3}) \right)^{p-2} \phi(x)^2,$$

$$|N(\phi_1(x)) - N(\phi_2(x))| \leq p(p-1) \left(U(x) + O(\frac{1}{p^3}) \right)^{p-2} \max_{i=1,2} |\phi_i| \, |\phi_1(x) - \phi_2(x)|,$$

para cualquier $x \in \partial\Omega$, luego por (2.1.42) y $\| \sum_{j=1}^{m} e^{u_j} \|_{*,\partial\Omega} \leq 4$, podemos concluir las estimaciones anteriores. Tenemos así que para cualquier $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_\theta$

$$\|A(\phi)\|_\infty \leq D'p(\|N(\phi)\|_{*,\partial\Omega} + \|R\|_{*,\partial\Omega}) \leq O(p^2 \|\phi\|_\infty^2) + \frac{D}{p^3}$$

y

$$\|A(\phi_1) - A(\phi_2)\|_\infty \leq C'p \|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{*,\partial\Omega} \leq Cp^2 \left(\max_{i=1,2} \|\phi_i\|_\infty \right) \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty,$$

donde D es una constante independiente de θ. Luego para $\|\phi\|_\infty \leq \frac{2D}{p^3}$, tenemos que

$$\|A(\phi)\|_\infty = O(\frac{1}{p} \|\phi\|_\infty) + \frac{D}{p^3} \leq \frac{2D}{p^3},$$

luego escogiendo $\theta = 2D$, tenemos que A es una contracción en $\mathcal{F}_\theta$,[6] pues

$$\|A(\phi_1) - A(\phi_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty .$$

Luego existe un único punto fijo $\phi_\xi \in \mathcal{F}_\theta$. Ahora, gracias a (2.2.25), tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} |c_j| = O(\|R\|_{*,\partial\Omega} + \|N(\phi)\|_{*,\partial\Omega} + \frac{1}{p}\|\phi\|_\infty) = O(\frac{1}{p^4}),$$

y por la Observación 2.5,

$$\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} = O(\|\phi\|_\infty (\|\phi\|_\infty + \|N(\phi)\|_{*,\partial\Omega} + \|R\|_{*,\partial\Omega})) = O(\frac{1}{p^6}),$$

lo que concluye el resultado.

■

Para concluir esta sección, discutimos acerca de la continuidad y diferenciabilidad de la función $\phi = \phi_\xi$ respecto al parámetro $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$.

Sean $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_m^1)$ y $\xi_2 = (\xi_1^2, \ldots, \xi_m^2)$, satisfaciendo $|\xi_j^i - \xi_k^i| > 2\rho$ para todo $i = 1, 2$ y $j \neq k$. Tenemos que $\phi = \phi_{\xi_1} - \phi_{\xi_2}$ satisface $-\Delta\phi + \phi = 0$ en Ω y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \nu} - W_{\xi_1}\phi &= ((U_{\xi_1} + \phi_{\xi_2})^p - (U_{\xi_2} + \phi_{\xi_2})^p) \\
&+ (U_{\xi_1} + \phi_{\xi_1})^p - (U_{\xi_1} + \phi_{\xi_2})^p - pU_{\xi_1}^{p-1}(\phi_{\xi_1} - \phi_{\xi_2}) + \frac{\partial}{\partial \nu}(U_{\xi_1} - U_{\xi_2}) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} c_j(\xi_2)(e^{u_j}(\xi_1)Z_{1j}(\xi_1) - e^{u_j}(\xi_2)Z_{1j}(\xi_2)) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} (c_j(\xi_1) - c_j(\xi_2))e^{u_j}(\xi_1)Z_{1j}(\xi_1).
\end{aligned}$$

[6]Notar que es en este punto donde es necesario que el error decaiga al menos como $\frac{1}{p^4}$.

Pero, gracias a (2.1.42), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|(U_{\xi_1}+\phi_{\xi_1})^p-(U_{\xi_1}+\phi_{\xi_2})^p-pU_{\xi_1}^{p-1}(\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2})\right\|_{*,\partial\Omega}\\
&\quad\le C(p-1)\|p(U_{\xi_1}+O(\frac{1}{p^3}))^{p-2}\|_{*,\partial\Omega}(\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty^2+\|\phi_{\xi_2}\|_\infty\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty)\\
&\quad\le C(p-1)\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty(\|\phi_{\xi_1}\|_\infty+\|\phi_{\xi_2}\|_\infty),
\end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_{*,\partial\Omega}$ es respecto a ξ_1. Gracias a la proposición 2.8 y lo recién probado, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty\le Cp\,\|(U_{\xi_1}+\phi_{\xi_2})^p-(U_{\xi_2}+\phi_{\xi_2})^p\|_{*,\partial\Omega}\\
&\quad+\sum_{j=1}^m|c_j(\xi_2)|\,\|e^{u_j}(\xi_1)Z_{1j}(\xi_1)-e^{u_j}(\xi_2)Z_{1j}(\xi_2)\|_{*,\partial\Omega}+Cp\|\frac{\partial}{\partial\nu}(U_{\xi_1}-U_{\xi_2})\|_{*,\partial\Omega}\\
&\quad+Cp(p-1)\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty(\|\phi_{\xi_1}\|_\infty+\|\phi_{\xi_2}\|_\infty),
\end{aligned}$$

y por (2.3.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_{\xi_1}-\phi_{\xi_2}\|_\infty\le Cp\,\|(U_{\xi_1}+\phi_{\xi_2})^p-(U_{\xi_2}+\phi_{\xi_2})^p\|_{*,\partial\Omega}\\
&\quad+\frac{C}{p^3}\sum_{j=1}^m\|e^{u_j}(\xi_1)Z_{1j}(\xi_1)-e^{u_j}(\xi_2)Z_{1j}(\xi_2)\|_{*,\partial\Omega}+Cp\|\frac{\partial}{\partial\nu}(U_{\xi_1}-U_{\xi_2})\|_{*,\partial\Omega}.
\end{aligned}$$

Esto, para p suficientemente grande, nos da la continuidad de la aplicación en $L^\infty(\Omega)$, y en virtud de (2.2.26) en $H^1(\Omega)$. La diferenciabilidad es una consecuencia del Teorema de la Función Implícita aplicada a la ecuación:

$$Q(\xi,\phi):=\Pi_\xi^\perp\left[U_\xi+\Pi_\xi^\perp\phi+(-\Delta+\mathrm{Id})^{-1}(U_\xi+\Pi_\xi^\perp\phi)^p\right]+\Pi_\xi\phi=0,$$

donde Π_ξ y $\Pi_\xi^\perp$ están definidos en la demostración de la proposición 2.8. Tenemos que $G(\xi,\phi_\xi)=0$ y el operador linealizado

$$\frac{\partial Q}{\partial\phi}(\xi,\phi_\xi)=\Pi_\xi^\perp\left[\mathrm{Id}+p(-\Delta+\mathrm{Id})^{-1}(U_\xi+\Pi_\xi^\perp\phi_\xi)^{p-1}\Pi_\xi^\perp\right]+\Pi_\xi$$

es invertible para p suficientemente grande, en efecto, gracias a la Alternativa de Fredholm, basta analizar la unicidad de las soluciones en $K_\xi^\perp$ de la ecuación $\frac{\partial Q}{\partial\phi}(\xi,\phi_\xi)[\psi]=0$. Ésta última es equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - W\psi = p\,(U_\xi + \phi_\xi)^{p-1}\,\psi + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j e^{u_j} Z_{1j} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Gracias, a la proposición 2.8, (2.1.42) y el hecho que $\|\phi_\xi\|_\infty = O(\frac{1}{p^3})$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_\infty &\leq Cp\left\|p\,(U_\xi + \phi_\xi)^{p-1}\,\psi\right\|_{*,\partial\Omega} \\ &\leq Cp^2\,\|\psi\|_\infty\,\|\phi_\xi\|_\infty\,\|p(U_\xi + O(\frac{1}{p^3}))^{p-2}\|_{*,\partial\Omega} \\ &\leq \frac{C}{p}\,\|\psi\|_\infty < \|\psi\|_\infty \end{aligned}$$

para p suficientemente grande, luego $\psi \equiv 0$.

2.4. Reducción Variacional

Ahora que tenemos una solución de $\phi(\xi), c_1(\xi), \ldots, c_m(\xi)$ de (2.3.1), obtendremos una solución de (2.1.27), si existe $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \partial\Omega^m$ tal que $|\xi_i - \xi_j| > 2\rho$ $i \neq j$ y

$$c_j(\xi) = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, m. \tag{2.4.1}$$

Notemos que (2.4.1) tiene una estructura variacional heredada del problema (1.0.1). En efecto, consideremos el funcional de energía

$$J_p(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega} u^{p+1},$$

y la restricción finito-dimensional de éste, dada por

$$\mathcal{F}(\xi) := J_p(U_\xi + \phi_\xi). \tag{2.4.2}$$

La siguiente proposición nos dice que puntos críticos de $\mathcal{F}$ corresponden a soluciones de (2.4.1).

Proposición 2.15. *Sea $\mathcal{F}$ definido como antes, entonces tenemos que $\mathcal{F}$ es de clase C^1, más aún, para p suficientemente grande, si $D_\xi\mathcal{F}(\bar{\xi}) = 0$, entonces $\bar{\xi}$ satisface* (2.4.1).

Demostración Como la aplicación $\xi \to \phi(\xi)$ es de clase C^1 en $H^1(\Omega)$, la condición de regularidad sobre $\mathcal{F}$ es inmediata. Ahora, si suponemos que $D_\xi \mathcal{F}(\xi) = 0$, tendremos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (\nabla(U(\xi) + \phi(\xi))\nabla(D_\xi(U(\xi) + \phi(\xi))) + (U(\xi) + \phi(\xi))(D_\xi(U(\xi) + \phi(\xi)) \\
&\quad - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega}(U(\xi) + \phi(\xi))^p D_\xi(U(\xi) + \phi(\xi)) \\
&= \sum_{j=1}^m c_j \int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j}(D_\xi U(\xi) + D_\xi\phi(\xi)) \\
&= \sum_{j=1}^m c_j \int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j} D_\xi U(\xi) - \sum_{j=1}^m c_j \int_{\partial\Omega} D_\xi(e^{u_j} Z_{1j})\phi(\xi)
\end{aligned}
$$

Pues $\int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{1j}\phi(\xi) = 0$. De la definición de $U(\xi)$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\partial_{(\xi_k)_1} U(\xi) &= \sum_{j=1}^m U_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}}\left\{\partial_{(\xi_k)_1}\left[u_j(x) + H_j(x) + \frac{1}{p}(w_{1j}(x) + H_{1j}(x)) + \frac{1}{p^2}(w_{2j}(x) + H_{2j}(x))\right]\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{p-1}(u_j(x) + H_j(x) + \frac{1}{p}(w_{1j}(x) + H_{1j}(x)) + \frac{1}{p^2}(w_{2j}(x) + H_{2j}(x)))\partial_{(\xi_k)_1}\log\mu_j\right\},
\end{aligned}
$$

pero gracias a la definición de $u_j + H_j$, $\partial_{(\xi_k)_1}(u_j + H_j) = PZ_{0j}\partial_{(\xi_k)_1}\log\mu_j - \frac{1}{\delta_j}PZ_{1j}\delta_{kj}$. Además, $\partial_{(\xi_k)_1}(w_{ij} + H_{ij}) = O(1) + O(\delta_j^{-1})\delta_{kj}$, luego como $\gamma = O(p^{-1})$,

$$
\begin{aligned}
\partial_{(\xi_k)_1} U(\xi) &= \frac{\gamma}{\mu_k^{\frac{1}{p-1}}\delta_k}(-PZ_{1k} + O(\frac{1}{p})) \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}}\left[PZ_{0j} - \frac{1}{p-1}(u_j(x) + H_j(x) + \frac{1}{p}(w_{1j}(x) + H_{1j}(x))\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{p^2}(w_{2j}(x) + H_{2j}(x)))\right]\partial_{(\xi_k)_1}\log\mu_j + O(\frac{1}{p})\right) \\
&= \frac{\gamma}{\mu_k^{\frac{1}{p-1}}\delta_k}(-PZ_{1k} + O(\frac{1}{p})) + O(\frac{1}{p}) \\
&= \frac{\gamma}{\mu_k^{\frac{1}{p-1}}\delta_k}(-PZ_{1k} + O(\frac{1}{p}))
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\partial_{(\xi_k)_1}(e^{u_j}Z_{1j}) &= e^{u_j}(Z_{1j}Z_{0j} - \nabla z_1(y)\cdot y|_{y=A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j})})\partial_{(\xi_k)_1}\log\mu_j \\ &\quad - \frac{e^{u_j}}{\delta_j}(Z_{ij}^2 + \partial_1 z_1(A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j})))\delta_{kj} \\ &= O(1).\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$0 = \partial_{(\xi_k)_1}\mathcal{F}(\xi) = -\frac{\gamma}{\delta_k\mu_k^{\frac{1}{p-1}}}\sum_{j=1}^m c_j(\xi)\int_{\partial\Omega} e^{u_j}Z_{1j}PZ_{1k} + O\left(\frac{\gamma}{p\delta_k} + \|\phi\|_\infty\right)\sum_{j=1}^m |c_j(\xi)|\,,$$

y usando (2.2.23), (2.2.24) y (2.3.2), obtenemos que

$$0 = -\frac{\gamma}{\delta_k\mu_k^{\frac{1}{p-1}}}c_k(\xi)\int_{\mathbb{R}^2_+} e^v z_1^2 + O(\frac{\gamma}{p\delta_k}\sum_{j=1}^m |c_j(\xi)|),$$

y como la estimación anterior vale para todo p suficientemente grande, necesariamente, $c_k(\xi) = 0$ para cualquier $k = 1,\ldots,m$.

∎

2.5. Expansión de la Energía

El propósito de esta sección es hacer un análisis de $\mathcal{F}(\xi)$, dando una expansión asintótica de éste. El siguiente lema, nos dice que el término principal de $\mathcal{F}(\xi)$ viene dado por la función $\varphi_m(\xi)$ definida en (1.2.5):

Lema 2.16. *Sean μ_j dados por (2.1.38) y $\gamma = \frac{e^{\frac{p}{2(p-1)}}}{p^{\frac{p}{p-1}}}$. Entonces*

$$\mathcal{F}(\xi) = mp\pi\gamma^2 + 4m\pi\gamma^2 + \pi\gamma^2\varphi_m(\xi) + \frac{\gamma^2}{2}\sum_{j=1}^m\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1j}}{\partial\nu} + O(\frac{1}{p^3}),$$

uniformemente, para todo $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$, tal que $|\xi_i - \xi_j| > 2\rho$ si $i \neq j$.

Demostración Tenemos que

$$\mathcal{F}(\xi) = J_p(U_\xi + \phi_\xi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(U_\xi + \phi_\xi)|^2 + (U_\xi + \phi_\xi)^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega}(U_\xi + \phi_\xi)^{p+1}.$$

Por una parte, multiplicando (2.3.1) por $U_\xi + \phi_\xi$, integrando por partes y usando (2.3.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}(U_\xi + \phi_\xi)^{p+1} &= \int_\Omega |\nabla(U_\xi + \phi_\xi)|^2 + (U_\xi + \phi_\xi)^2 + \sum_{j=1}^m |c_j| \int_{\partial\Omega} e^{u_j} Z_{ij} U_\xi \\
&= \int_\Omega |\nabla(U_\xi + \phi_\xi)|^2 + (U_\xi + \phi_\xi)^2 + O(\frac{1}{p^4}),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
J_p(U_\xi + \phi_\xi) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega |\nabla(U_\xi + \phi_\xi)|^2 + (U_\xi + \phi_\xi)^2 + O(\frac{1}{p^4}) \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\left[\int_\Omega(|\nabla U_\xi|^2 + U_\xi^2) + 2\int_\Omega(\nabla U_\xi \nabla\phi_\xi + U_\xi\phi_\xi)\right. \\
&\quad \left. + \int_\Omega(|\nabla\phi_\xi|^2 + \phi_\xi^2)\right] + O(\frac{1}{p^4}).
\end{aligned}$$

Desarrollemos el término $I := \int_\Omega(|\nabla U_\xi|^2 + U_\xi^2)$

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega(|\nabla U_\xi|^2 + U_\xi^2) \\
&= \int_\Omega(|\sum_{j=1}^m \nabla U_j|^2 + (\sum_{j=1}^m U_j)^2) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_\Omega(|\nabla U_i|^2 + U_i^2) + 2\sum_{j\neq i}\int_\Omega(\nabla U_j \nabla U_i + U_j U_i).
\end{aligned}$$

Por una parte, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla U_i|^2 &+ U_i^2) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial\nu} U_i \\ &= \frac{\gamma^2}{\mu_i^{\frac{2}{p-1}}} \Bigg[\int_{\partial\Omega} \left(e^{u_i(x)} + \frac{1}{p} \left(\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(x) + \alpha_1 e^{u_i(x)} \right) + \frac{1}{p^2} \left(\frac{\partial\phi_{2i}}{\partial\nu}(x) + \alpha_2 e^{u_i(x)} \right) \right) \times \\ &\quad \left(u_i(x) + H_i(x) + \frac{1}{p}(w_{1i}(x) + H_{1i}(x)) + \frac{1}{p^2}(w_{2i}(x) + H_{2i}(x)) \right) \Bigg] \\ &= \frac{\gamma^2}{\mu_i^{\frac{2}{p-1}}} \left[\int_{\partial\Omega} e^{u_i}(u_i + H_i) + \frac{1}{p} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(u_i + H_i) + O(\frac{1}{p}) \right].\end{aligned}$$

Veamos el comportamiento de la primera integral

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} e^{u_i}(u_i + H_i) &= \int_{\partial\Omega} \frac{2\delta_i}{|x - \xi_i - \delta_i\nu(\xi_i)|^2} \left(\log \frac{2\delta_i}{|x - \xi_i - \delta_i\nu(\xi_i)|^2} + H_i(x) \right) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{2\delta_i}{|x - \xi_i - \delta_i\nu(\xi_i)|^2} \left(\log \frac{1}{|x - \xi_i - \delta_i\nu(\xi_i)|^2} + H(x, \xi_i) + O(\delta_i^\alpha) \right) dx\end{aligned}$$

cambiando a la variable $\delta_i y = A_i(x - \xi_i)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} e^{u_i}(u_i + H_i) &= \int_{\partial\Omega_i} \frac{2}{|y - \nu(0)|^2} \Big(\log \frac{1}{|y - \nu(0)|^2} \\ &\quad + H(\delta_i A_i^{-1} x + \xi_i, \xi_i) - 2\log\delta_i + O(\delta_i^\alpha) \Big) dx\end{aligned}$$

pero para $0 < \alpha < 1$,

$$\int_{\partial\Omega_i} \frac{2}{|y - \nu(0)|^2} = 2\pi + O(\delta_i), \quad \int_{\partial\Omega_i} \frac{2}{|y - \nu(0)|^2} \log \frac{1}{|y - \nu(0)|^2} dy = -4\pi \log 2 + O(\delta_i^\alpha),$$

y

$$\int_{\partial\Omega_i} \frac{2}{|y - \nu(0)|^2} (H(\delta_i A_i^{-1} x + \xi_i, \xi_i) - H(\xi_i, \xi_i)) = O(\delta^\alpha),$$

luego

$$\int_{\partial\Omega} e^{u_i}(u_i + H_i) = -4\pi \log 2 - 4\pi \log\delta_i + 2\pi H(\xi_i, \xi_i) + O(\delta^\alpha). \tag{2.5.1}$$

En cuanto a la segunda integral, podemos decir que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(u_i+H_i) &= \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}\left(\log\frac{1}{|x-\xi_i-\delta_i\nu(\xi_i)|^2}+H(x,\xi_i)\right)dx\\ &= \int_{\partial\Omega_i}\delta_i\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(\delta_iA_i^{-1}y+\xi_i)\times\\ &\quad\left(\log\frac{1}{|y-\nu(0)|^2}+H(\delta_iA_i^{-1}y+\xi_i,\xi_i)-2\log\delta_i\right)dx,\end{aligned}$$

y notando que $\delta_i\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(\delta_iA_i^{-1}y+\xi_i)=O(1)$ obtenemos que

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}(u_i+H_i)=-2\log\delta_i\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1,i}}{\partial\nu}+O(1). \tag{2.5.2}$$

Juntando (2.5.1) y (2.5.2), tenemos que

$$\int_{\Omega}(|\nabla U_i|^2+U_i^2)=\frac{\gamma^2}{\mu_i^{\frac{2}{p-1}}}\left[-4\pi\log 2-4\pi\log\delta_i+2\pi H(\xi_i,\xi_i)+2\log\delta_i\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}+O(\frac{1}{p})\right],$$

y como $\delta_i=\mu_ie^{-\frac{p}{2}}$ y $\mu_i^{-\frac{2}{p-1}}=1-\frac{2}{p}\log\mu_i+O(\frac{1}{p^2})$, se tiene que

$$\int_{\Omega}(|\nabla U_i|^2+U_i^2)=2p\pi\gamma^2-4\pi\gamma^2\log 2+2\pi H(\xi_i,\xi_i)-8\pi\log\mu_i+\gamma^2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}+O(\frac{1}{p^3}).$$

Similarmente, para $i\neq j$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\nabla U_i\nabla U_j+U_iU_j) &= \int_{\partial\Omega}\frac{\partial U_i}{\partial\nu}U_j\\ &= \frac{\gamma^2}{\mu_i^{\frac{1}{p-1}}\mu_j^{\frac{1}{p-1}}}\left[\int_{\partial\Omega}e^{u_i}(u_j+H_j)+O(\frac{1}{p})\right]\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} e^{u_i}(u_j+H_j) &= \int_{\partial\Omega} \frac{2\delta_i}{|x-\xi_i-\delta_i\nu(\xi_i)|^2}\left(\log\frac{1}{|x-\xi_j-\delta_j\nu(\xi_j)|^2}+H(x,\xi_j)\right)dx \\ &= \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{|y-\nu(0)|^2}\left(\log\frac{1}{|\xi_i-\xi_j|^2}+H(\xi_i,\xi_j)+O(\delta_j+\delta_i^\alpha|y|^\alpha)\right)dx \\ &= \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{|y-\nu(0)|^2}\left(G(\xi_i,\xi_j)+O(\delta_j+\delta_i^\alpha|y|^\alpha)\right)dx \\ &= \pi G(\xi_i,\xi_j)+O(\delta_j+\delta_i^\alpha).\end{aligned}$$

de donde, como $(\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{p-1}} = 1-\frac{1}{p}(\log\mu_i+\log\mu_j)+O(\frac{1}{p}) = 1+O(\frac{1}{p})$

$$\int_\Omega (\nabla U_i\nabla U_j+U_iU_j) = \gamma^2\pi G(\xi_i,\xi_j)+O(\frac{1}{p^3}).$$

Reuniendo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla U_\xi|^2+U_\xi^2 = \sum_{i=1}^m &\left[\left(2p\pi\gamma^2-4\pi\gamma^2\log 2+2\pi H(\xi_i,\xi_i)-8\pi\log\mu_i+\gamma^2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}\right)\right. \\ &\left. +2\sum_{j\neq i}\gamma^2\pi G(\xi_i,\xi_j)+O(\frac{1}{p^3})\right] \\ = 2pm\pi\gamma^2 &- 4m\pi\gamma^2\log 2+2\pi\gamma^2\sum_{i=1}^m\left(-4\log\mu_i+H(\xi_i,\xi_i)+\sum_{j\neq i}G(\xi_i,\xi_j)\right) \\ &+\gamma^2\sum_{i=1}^m\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}+O(\frac{1}{p^3}),\end{aligned}$$

pero por (2.1.41), $4\log\mu_i = -2\log 2+4\alpha_1+2(H(\xi_i,\xi_i)+\sum_{j\neq i}G(\xi_i,\xi_j))+O(\frac{1}{p})$, luego, recordando que $\alpha_1=-1-\log 2$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla U_\xi|^2+U_\xi^2 &= 2mp\pi\gamma^2+8m\pi\gamma^2-2\pi\gamma^2(\sum_{i=1}^m H(\xi_i,\xi_i)+\sum_{j\neq i}G(\xi_i,\xi_j)) \\ &\quad +\gamma^2\sum_{i=1}^m\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1i}}{\partial\nu}+O(\frac{1}{p^3}).\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Por otra parte, gracias a (2.3.3) y (2.5.3), tenemos que

$$\begin{aligned}2\int_\Omega(\nabla U_\xi\nabla\phi_\xi + U_\xi\phi_\xi) + \int_\Omega(|\nabla\phi_\xi|^2+\phi_\xi^2) &\leq 2\,\|U_\xi\|_{H^1(\Omega)}\,\|\phi_\xi\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi_\xi\|^2_{H^1(\Omega)}\\ &= O(\frac{1}{p^{7/2}}),\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

■

2.6. Demostración del Teorema

Sea $\hat{\Omega}_m = (\partial\Omega)^m \setminus D$, donde D denota la diagonal, es decir,

$$\hat{\Omega}_m = \{\xi \in (\partial\Omega)^m : \xi_i \neq \xi_j \text{ si } j \neq i\}.$$

De acuerdo a la proposición 2.15, obtenemos una solución de (1.0.1), si podemos encontrar $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ punto crítico de $\mathcal{F}(\xi)$. Esto es equivalente a encontrar un punto crítico de

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = \frac{1}{\pi\gamma^2}\left(\mathcal{F}(\xi) - mp\pi\gamma^2 - 4m\pi\gamma^2 - \frac{\gamma^2}{2}\sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_{1,j}}{\partial\nu}\right).$$

Por otra parte, gracias al lema 2.16, para $\xi \in \tilde{\Omega}_m := \left\{\xi \in \hat{\Omega}_m, |\xi_i - \xi_j| > \rho, \text{ para todo } i \neq j\right\}$, podemos decir que

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = \varphi_m(\xi) + O(\frac{1}{p}), \tag{2.6.1}$$

donde $O(\frac{1}{p})$ es uniforme cuando $p \to \infty$. Siguiendo lo realizado en [DdPM05], mostraremos que la función

$$\varphi_m(\xi) = -\sum_{i=1}^m (H(\xi_i,\xi_i) + \sum_{j\neq i} G(\xi_i,\xi_j))$$

posee al menos 2 puntos críticos en $\tilde{\Omega}_m$.

En primer lugar, φ_m es de clase C^1 y es superiormente acotada en $\hat{\Omega}_m$ (luego en $\tilde{\Omega}_m$), además

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_m) \to -\infty, \text{ cuando } |\xi_i - \xi_j| \to 0 \text{ para algún } i \neq j,$$

luego es evidente que, como ρ es arbitrariamente pequeño, φ_m tiene un máximo M en $\tilde{\Omega}_m$.

Por otra parte, podemos utilizar la teoría de Ljusternik-Schnirelmann para obtener una cota inferior para el número de puntos críticos de φ_m usando la categoría $\text{cat}(\tilde{\Omega}_m)$, que denota el cardinal mínimo de un recubrimiento de $\tilde{\Omega}_m$, compuesto por subconjuntos cerrados y contractibles de $\tilde{\Omega}_m$ (ver [Str00] para algo más sobre la categoría).

Notemos en primer lugar que $\text{cat}(\tilde{\Omega}_m) > 1$. De no ser así, tendremos que $\text{cat}(\tilde{\Omega}_m) = 1$, luego $\tilde{\Omega}_m$ debe ser contractible en sí mismo, es decir, existe $\xi^0 \in \tilde{\Omega}_m$ y una función continua $\Gamma : [0,1] \times \tilde{\Omega}_m \to \tilde{\Omega}_m$, tal que para todo $\xi \in \tilde{\Omega}_m$

$$\Gamma(0,\xi) = \xi, \quad \Gamma(1,\xi) = \xi^0.$$

Sea ahora, $f : S^1 \to \tilde{\Omega}_m$, definida por $f(\xi_1) = (\xi_1, \xi_1 e^{2\pi i \frac{1}{m}}, \ldots, \xi_1 e^{2\pi i \frac{m-1}{m}})$, que resulta ser una función continua. Finalmente, sea $\eta : [0,1] \times S^1 \to S^1$, dada por

$$\eta(t,\xi_1) = \pi_1 \circ \Gamma(t, f(\xi_1)),$$

donde π_1 denota la proyección sobre la primera componente. Luego η es una homotopía entre S^1 y un punto, lo que es una contradicción.

Así tenemos que $\text{cat}(\tilde{\Omega}_m) \geq 2$ para todo $m \geq 1$. Luego si definimos

$$\Xi = \left\{ C \subseteq \tilde{\Omega}_m : C \text{ cerrado y } \text{cat}(C) \geq 2 \right\}$$

y

$$c = \sup_{C \in \Xi} \inf_{\xi \in C} \varphi_m(\xi), \tag{2.6.2}$$

la teoría de Ljusternik-Schnirelmann nos dice que c es un nivel crítico para φ_m. Si $c \neq M$, entonces tenemos que hay al menos 2 puntos críticos de φ_m en $\tilde{\Omega}_m$. Ahora si, $c = M$, la definición (2.6.2) nos dice que hay al menos un subconjunto C de $\tilde{\Omega}_m$ con $\text{cat}(C) \geq 2$, donde φ_m alcanza su máximo, luego en este caso, φ_m tiene infinitos puntos críticos en $\tilde{\Omega}_m$.

Como este tipo de puntos críticos se preservan bajo perturbaciones pequeñas en norma uniforme, obtenemos que gracias a (2.6.1), para p suficientemente grande $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ posee al menos dos puntos críticos ξ_1^p, ξ_2^p. Luego, la función $u_{i,p}(x) = U_{\xi_i^p}(x) + \phi_{\xi_i^p}(x),\ i = 1,2$, gracias a (2.1.40) y (2.3.3), cumple las propiedades asintóticas anunciadas.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Conclusiones y Trabajos Futuros

En primer lugar, notamos que el análisis realizado es completamente análogo a lo realizado en [EMP06]. Si bien es cierto, ambos problemas son de naturaleza distinta, en la forma, los problemas son "iguales". Como se ve a lo largo de este trabajo, las ideas usadas son las mismas, sin embargo hay pequeñas diferencias, que se producen por tratarse de un problema de frontera. Por ejemplo, las demostraciones se dificultan, e incluso, se obtienen resultados menos explícitos. Un reflejo de aquello es el lema 2.9. En [EMP06], prueban, gracias a la armonicidad de las funciones en cuestión, que

$$PZ_{ij} = Z_{ij} - 8\pi\delta_j \frac{\partial H}{\partial(\xi_j)_i}(\cdot, \xi_j) + O(\delta_j^3),$$

situación que formalmente debiera repetirse en nuestro caso, sin embargo en nuestro análogo, sólo somos capaces de probar, vía teoría L^p, que

$$PZ_{1j} = Z_{1j} + O(\delta_j^\alpha).$$

Este resultado, tal como se puede apreciar en el lema 5.1 de [EMP06], tiene vital importancia en cualquier intento por hacer que la expansión de la energía $\mathcal{F}(\xi)$ sea en norma C^1.

Otra diferencia que se produce por tratarse de un problema de contorno, es la existencia de las soluciones w_k que se necesitan para mejorar el *ansatz*. En el problema interior, tenemos que la simetría radial del problema límite, permite buscar solo las soluciones radiales de éste, estudiando la ecuación ordinaria que aparece. Más aún, el lema 2.1 de [EMP06] nos entrega soluciones suficientemente explícitas para realizar cálculos. En nuestro caso, al no tener simetrías útiles en el problema límite, sólo pudimos hacer el estudio vía la Alternativa de Fredholm y teoría Hölder para entregar existencia y comportamientos asintóticos de las funciones w_k, lo que obligó a buscar métodos alternativos para hacer algunos cálculos explícitos respecto a estas funciones, que eran necesarios (por ejemplo, lo hecho en (2.2.20))

Otro comentario que no se puede dejar de hacer respecto a estas funciones w_k y su uso en la construcción de las soluciones anunciadas en el Teorema 1.1, es el hecho que en el caso de un dominio *convexo*, no es necesaria la inclusión del enderezamiento F_j en la definición de las funciones w_{kj}, más precisamente, basta con definir (pues la convexidad así lo permite)

$$w_{kj}(x) = \phi_k(A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j})) + \alpha_k v(A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j})),$$

para que el *ansatz* final sea tal como antes. Este cambio se ve reflejado directamente en los lemas 2.3 y 2.5, donde, si bien los resultados siguen siendo ciertos, las demostraciones se simplifican bastante. Más aún, se puede modificar un poco el *ansatz* (y de paso el lema 2.3), redefiniendo las funciones H_{kj}, para hacer que efectivamente que la función $w_{kj} + H_{kj}$ sea la proyección de w_{kj} sobre $H^1(\Omega)$, es decir, H_{kj} solución de

$$\begin{cases} -\Delta H_{kj} + H_{kj} = -w_{kj} & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial H_{kj}}{\partial \nu} = e^{u_j}(w_{kj} + f_{kj}) - \dfrac{\partial w_{kj}}{\partial \nu} & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f_{kj} = f_k(A_j(\frac{x-\xi_j}{\delta_j}))$, y

$$f_1(y) = -\frac{1}{2}v^2, \quad f_2(y) = -vw_1 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}w_1^2 - \frac{1}{2}w_1 v^2 + \frac{1}{8}v^4,$$

lo que no afecta el resultado final y de paso muestra la gran semejanza entre este trabajo y lo hecho en [EMP06].

Respecto a los trabajos relativos que se podrían hacer a futuro, está lo ya mencionado respecto a expansión C^1 de la energía. Si bien es cierto, en el teorema no usamos tal hecho, dicha estimación es fundamental en la demostración de un análogo a lo señalado en la observación 8.1 de [DdPM05], es decir, que asociado a cada punto crítico *topológicamente no-trivial* de φ_m (por ejemplo, máximos locales o puntos silla posiblemente degenerados, que *no* son considerados en la demostración del Teorema 1.1), existe una solución con concentración en tales puntos críticos. Para lograr esto, se necesita mejorar el lema 2.9, para tener una expansión C^1 de las funciones PZ_{ij} (lo que se intentó realizar durante el desarrollo de este trabajo, pero no se logró probar más que la expansión entregada), para luego hacer que la estimación de $\mathcal{F}(\xi)$ sea también en norma C^1. Esto sin embargo es sólo el comienzo, pues tal como se comenta en [EMP06], para obtener una expansión C^1 de $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$, la gran dificultad surge por le diferencia entre el decaimiento exponencial de los parámetros de expansión $\delta_j = \mu_j e^{-\frac{p}{4}}$ y polinomial $\frac{1}{p^4}$ del error $R(x)$. La idea que surge, es mejorar el *ansatz* U_ξ, incorporando más términos en la expansión. Formalmente, esto sería considerar

$$U_\xi = \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma}{\mu_j^{\frac{1}{p-1}}} \left(u_j + H_j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}(w_{kj} + H_{kj}) \right),$$

donde las funciones w_k y H_{kj} se escogerían adecuadamente, con el fin de eliminar del error todos los términos de la forma $\frac{1}{p^j}$ y obtener así un decaimiento exponencial.

Un trabajo pendiente, pero de naturaleza distinta al presentado a lo largo de esta memoria de título, es el análisis del comportamiento de la solución de mínima energía u_p de (1.0.1) cuando $p \to \infty$. Siendo mas claros que al principio, debiera ser posible demostrar, tal como en [AG04] y [RW94], los siguiente resultados

1. Existe C, independiente de p, tal que para p suficientemente grande
$$0 < \frac{1}{C} < \|u_p\|_\infty < C < \infty.$$

2. Para cualquier sucesión $p_n \to \infty$, tenemos que
$$p_n \|u_{p_n}\|_{L^{p_n+1}(\partial\Omega)}^{p_n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi e,$$
$$p_n \|u_{p_n}\|_{H^1(\Omega)}^{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi e,$$

3. Si definimos
$$v_p(y) := \frac{p}{u_p(\xi_p)}(u_p(\varepsilon_p y + \xi_p) - u_p(\xi_p)),$$
donde $\xi_p \in \partial\Omega$ es un punto donde u_p alcanza su máximo y $\delta_p = \frac{1}{pS_p u_p(x_p)^{p-1}}$. Entonces para $p_n \to \infty$, existe una subsucesión de v_{p_n} (denotada igual) tal que $v_{p_n} \to v$ en $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$, con $v(y) = \log \frac{2}{y_1^2 + (y_2+1)^2}$ (que resulta ser la solución de (1.2.2) con parámetros $t = 0$ y $\mu = 1$).

4. Para cualquier sucesión u_{p_n} de u_p, existe una subsucesión (denotada igual), tal que
$$\lim_{n\to\infty} \|u_{p_n}\|_\infty = \sqrt{e}.$$

Bibliografía

[AG04] Adimurthi y Massimo Grossi. Asymptotic estimates for a two-dimensional problem with polynomial nonlinearity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4):1013–1019 (electronic), 2004. ISSN 0002-9939.

[DdPM05] Juan Dávila, Manuel del Pino y Monica Musso. Concentrating solutions in a two-dimensional elliptic problem with exponential Neumann data. *J. Funct. Anal.*, 227(2):430–490, 2005. ISSN 0022-1236.

[dPDM04] Manuel del Pino, Jean Dolbeault y Monica Musso. The Brezis-Nirenberg problem near criticality in dimension 3. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12):1405–1456, 2004. ISSN 0021-7824.

[dPF97] Manuel del Pino y Patricio L. Felmer. Semi-classical states for nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, 149(1):245–265, 1997. ISSN 0022-1236.

[dPKM05] Manuel del Pino, Michał Kowalczyk y Monica Musso. Singular limits in Liouville-type equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 24(1):47–81, 2005. ISSN 0944-2669.

[dPKW05] Manuel del Pino, Michał Kowalczyk y Juncheng Wei. Nonlinear Schrödinger equations: concentration on weighted geodesics in the semi-classical limit. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(4):223–228, 2005. ISSN 1631-073X.

[EMG04] Khalil El Mehdi y Massimo Grossi. Asymptotic estimates and qualitative properties of an elliptic problem in dimension two. *Adv. Nonlinear Stud.*, 4(1):15–36, 2004. ISSN 1536-1365.

[EMP06] Pierpaolo Esposito, Monica Musso y Angela Pistoia. Concentrating solutions for a planar elliptic problem involving nonlinearities with large exponent. *J. Differential Equations*, 227(1):29–68, 2006. ISSN 0022-0396.

[FW86] Andreas Floer y Alan Weinstein. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *J. Funct. Anal.*, 69(3):397–408, 1986. ISSN 0022-1236.

[GG98] Changfeng Gui y Nassif Ghoussoub. Multi-peak solutions for a semilinear Neumann problem involving the critical Sobolev exponent. *Math. Z.*, 229(3):443–474, 1998. ISSN 0025-5874.

[GT01] David Gilbarg y Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. ISBN 3-540-41160-7, xiv+517 págs. Reprint of the 1998 edition.

[GW99] Changfeng Gui y Juncheng Wei. Multiple interior peak solutions for some singularly perturbed Neumann problems. *J. Differential Equations*, 158(1):1–27, 1999. ISSN 0022-0396.

[GWW00] Changfeng Gui, Juncheng Wei y Matthias Winter. Multiple boundary peak solutions for some singularly perturbed Neumann problems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 17(1):47–82, 2000. ISSN 0294-1449.

[LM62] J.-L. Lions y E. Magenes. Problemi ai limiti non omogenei. V. *Ann. Scuola Norm Sup. Pisa (3)*, 16:1–44, 1962.

[LZ95] Yanyan Li y Meijun Zhu. Uniqueness theorems through the method of moving spheres. *Duke Math. J.*, 80(2):383–417, 1995. ISSN 0012-7094.

[Nir01] Louis Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*, tomo 6 de *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2001. ISBN 0-8218-2819-3, xii+145 págs. Chapter 6 by E. Zehnder, Notes by R. A. Artino, Revised reprint of the 1974 original.

[NPT92] Wei-Ming Ni, Xing Bin Pan y I. Takagi. Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents. *Duke Math. J.*, 67(1):1–20, 1992. ISSN 0012-7094.

[Oh88] Yong-Geun Oh. Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class $(V)_a$. *Comm. Partial Differential Equations*, 13(12):1499–1519, 1988. ISSN 0360-5302.

[Oh90] Yong-Geun Oh. On positive multi-lump bound states of nonlinear Schrödinger equations under multiple well potential. *Comm. Math. Phys.*, 131(2):223–253, 1990. ISSN 0010-3616.

[Ou00] Biao Ou. A uniqueness theorem for harmonic functions on the upper-half plane. *Conform. Geom. Dyn.*, 4:120–125 (electronic), 2000. ISSN 1088-4173.

[RW94] Xiaofeng Ren y Juncheng Wei. On a two-dimensional elliptic problem with large exponent in nonlinearity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 343(2):749–763, 1994. ISSN 0002-9947.

[RW96] Xiaofeng Ren y Juncheng Wei. Single-point condensation and least-energy solutions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(1):111–120, 1996. ISSN 0002-9939.

[Str00] Michael Struwe. *Variational methods*, tomo 34 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3ª edición, 2000. ISBN 3-540-66479-3, xviii+274 págs. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[WW98] Juncheng Wei y Matthias Winter. Stationary solutions for the Cahn-Hilliard equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(4):459–492, 1998. ISSN 0294-1449.

[Zha03] Lei Zhang. Classification of conformal metrics on $\mathbb{R}^2_+$ with constant Gauss curvature and geodesic curvature on the boundary under various integral finiteness assumptions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 16(4):405–430, 2003. ISSN 0944-2669.