Análisis Real

Hernán Castro

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca
http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro
hcastro@utalca.cl

Template de $\LaTeX\,2_\varepsilon$ creado por Hernán Castro.

Edición del 4 de junio de 2024

Índice general

Prefacio

Este apunte ha sido confeccionado para el curso trimestral *Análisis Real* dictado en los programas de Magister y Doctorado en Matemáticas de la Universidad de Talca. El propósito de este escrito es recopilar materias expuestas en diversos libros y organizarlas en la manera presentada por el autor en el transcurso del curso.

En este curso se discuten temas relacionados a análisis en espacios métricos, dentro de los que se incluyen los conceptos de completitud y compacidad en dichos espacios. Algunos resultados relevantes incluidos son el Teorema del punto fijo de Banach, el Teorema de categorías de Baire, el Teorema de Arzelà-Ascoli y el Teorema de Stone-Weierstrass.

Adicionalmente, en este curso se realiza una breve introducción al análisis funcional en espacios de Banach, donde se estudian algunas consecuencias del Teorema de Baire, como lo son el Teorema del grafo cerrado, el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema de Banach-Steinhaus. Se concluye esta introducción al análisis funcional con algunas propiedades elementales de los espacios de Hilbert y la demostración del teorema de Riesz-Fréchet.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias, tanto como la lista de ejercicios, puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos pueden estar incompletos, y quizás se puedan encontrar algunos errores de tipeo.

Capítulo 1

Espacios métricos

1.1. Conceptos preliminares

Definición 1.1 (Espacio métrico)**.** *Una métrica (o distancia) en un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:*

- *$d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;*
- *(Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;*
- *(Desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.*

Un conjunto X equipado con una métrica d se dirá espacio métrico y lo denotaremos como (X, d).

Ejemplo 1.1. Veamos algunos ejemplos de espacios métricos:

1. Dado un conjunto X podemos definir la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

   Esta se conoce como la métrica discreta sobre X. La gracia de este ejemplo es que indica que cualquier conjunto no vacío puede ser dotado de una métrica.

2. Los números reales $\mathbb{R}$ equipados con la métrica $d(x, y) = |x - y|$. Notar que $|a + b| \leq |a| + |b|$, por lo tanto si $a = x - y$ y $b = y - z$ tenemos la desigualdad triangular para d. Si no se menciona lo contrario, siempre que hablemos de $\mathbb{R}$ pensaremos que está equipado con esta métrica.

3. En $\mathbb{R}^N$ se pueden establecer distintas métricas: $x = (x_1, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, \dots, y_N)$.

   - $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2} = \|x - y\|_2$, la métrica Euclideana. Veamos que satisface la desigualdad triangular. Para ello utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

     que se obtiene de la identidad

$$\left\| \|x\|_2 y - \|y\|_2 x \right\|_2^2 = 2 \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - 2 \|x\|_2 \|y\|_2 x \cdot y.$$

Sea $a = x - y$ y $b = y - z$, entonces $a + b = x - z$, y

$$\begin{aligned} \|a+b\|_2^2 &= \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2a \cdot b \\ &\leq \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 + 2\,\|a\|_2\,\|b\|_2 \\ &= (\|a\|_2 + \|b\|_2)^2\,, \end{aligned}$$

lo que demuestra la desigualdad triangular. Este es un ejemplo de métrica en un espacio vectorial con producto interno.

- $d_\infty(x, y) = \text{máx}_{i=1,\ldots,N} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty$, la métrica del máximo.
- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| = \|x - y\|_1$, la métrica del taxi.
- En general, para $p \geq 1$ podemos considerar la métrica

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p} = \|x - y\|_p\,.$$

La demostración queda como ejercicio.

4. La métrica uniforme entre funciones continuas en $[a, b]$ se define como

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b,]} |f(x) - g(x)|\,.$$

5. En general los espacios vectoriales normados $(X, \|\cdot\|)$ son espacios métricos con la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Cuando hablemos de espacios de Banach y de Hilbert en el Capítulo 2 veremos esto con algo mas de detalle.

6. En $\mathbb{R}$ también se puede definir una métrica mediante

$$d_a(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|},$$

que se conoce como la métrica acotada, ya que $0 \leq d_a(x, y) < 1$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. La demostración de la desigualdad triangular queda como ejercicio. (Ejercicio 1.6).

7. Si d es una métrica en X y $A \subseteq X$, entonces la restricción $d\big|_{A\times A}$ es una métrica en A.

1.1.1. Topología en espacios métricos

Definición 1.2 (Bola abierta)**.** *Dado un espacio métrico (X, d), $x \in X$ y $r > 0$, denotamos por*

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

a la bola abierta con centro en x de radio r en X. Cuando la métrica esté lo suficientemente clara denotaremos este conjunto por $B(x, r)$ o $B_r(x)$.

Observación 1.1.

- $x \in B_d(x, r)$, luego $B_d(x, r) \neq \varnothing$, $\bigcup_{r>0} B_d(x, r) = X$, y $\bigcap_{r>0} B_d(x, r) = \{x\}$.
- Si $r \leq s$ entonces $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, s)$.

Con la definición de bola abierta podemos dotar de una topología al espacio X.

Definición 1.3 (Topología inducida por la métrica)**.** *Dado un espacio métrico* (X, d)*, diremos que un conjunto* $U \subset X$ *es* abierto *si para todo* $x \in U$ *existe* $r > 0$ *tal que* $B_d(x, r) \subset U$*.*

Observación 1.2. Notar que por vacuidad esta definición implica que $\varnothing$ es abierto. Además es claro que si $x \in X$, entonces $B_1(x) \subseteq X$, es decir, X es también abierto.

Proposición 1.1. *Sea* $x \in X$ *y* $r > 0$*, entonces* $B_r(x)$ *es abierto.*

Demostración. Sea $y \in B_r(x)$ y sea $s = r - d(x, y) > 0$, luego si $z \in B_s(y)$ entonces

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s = r,$$

luego $z \in B_r(x)$. ■

Ejemplo 1.2. Las Figuras 1.1 y 1.2 muestran bolas en $\mathbb{R}^2$ bajo distintas métricas y en $C([0, 1])$ bajo la métrica uniforme.

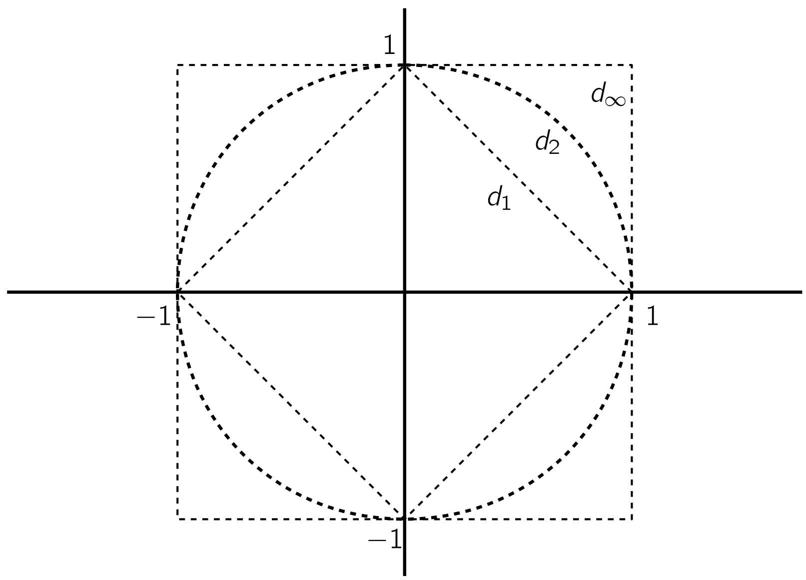

Figura 1.1: Bolas unitarias en $\mathbb{R}^2$ bajo las métricas d_1, d_2 y d_∞.

Teorema 1.2. *Sea* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una familia de abiertos en* (X, d)*. Entonces*

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ *es abierto.*

2. *Si* $A = \{1, 2, \ldots, N\}$*, entonces* $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_N$ *es abierto.*

Demostración. 1. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, entonces existe $\hat{\alpha} \in A$ tal que $x \in U_{\hat{\alpha}}$. Como $U_{\hat{\alpha}}$ es abierto, existe $r >$ tal que $x \in B_r(x) \subseteq U_{\hat{\alpha}}$. Luego

$$x \in B_r(x) \subseteq U_{\hat{\alpha}} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

2. Sea $x \in U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_N$, como cada U_i es abierto, existen $r_i > 0$ tales que

$$x \in B_{r_i}(x) \subseteq U_i \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

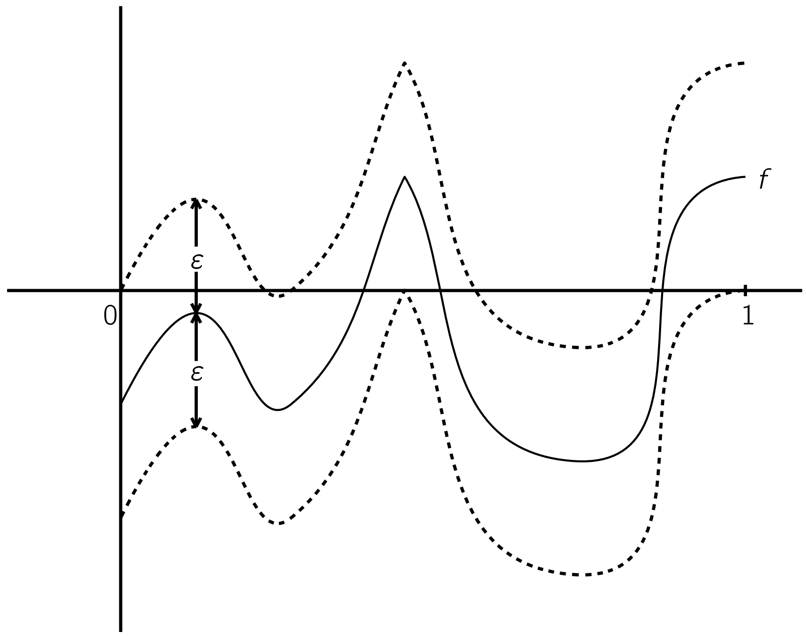

Figura 1.2: La bola en torno a f con radio ε en $(C([0,1]), d_\infty)$.

Sea $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_N\}$, luego

$$x \in B_r(x) \subseteq B_{r_i}(x) \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, N\},$$

por lo tanto

$$x \in B_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{N} B_{r_i}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{N} U_i.$$

■

Ejemplo 1.3. En general si se tiene una familia infinita de abiertos, su intersección no es abierto. Considerar por ejemplo la familia

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Claramente U_n es abierto (son bolas abiertas), y se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$ que no es abierto.

Definición 1.4 (Vecindad)**.** *Dado un espacio métrico (X, d), diremos que un conjunto $U \subset X$ es una* vecindad *de $x \in X$ si existe $r > 0$ tal que $x \in B_d(x, r) \subset U$.*

Ejemplo 1.4.
- $(0, 1]$ es una vecindad de $\frac{1}{2}$ en $\mathbb{R}$, pero no es una vecindad de 1.
- X es una vecindad de $x \in X$ para todo x.

Definición 1.5 (Conjunto acotado)**.** *Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $A \subseteq X$, diremos que A es* acotado *si es que existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subseteq B_d(x_0, r)$.*

Definición 1.6 (Interior de un conjunto)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que $x \in A$ es un punto interior si es que existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

El conjunto de los puntos interiores se denota $int(A)$ o $\mathring{A}$.

Observación 1.3. La definición topológica de interior es

$$int(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ abierto}}} U.$$

Ejemplo 1.5. El interior de $(0, 1]$ es $(0, 1)$.

Definición 1.7 (Punto de acumulación)**.** *Diremos que $x \in X$ es un punto de acumulación para $A \subseteq X$ si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$B_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Si x no es un punto de acumulación, diremos que x es aislado.

Ejemplo 1.6. 1. $\{0, 1\}$ son puntos de acumulación de $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{Z}$ está compuesto de puntos aislados en $\mathbb{R}$.

Definición 1.8 (Conjuntos cerrados)**.** *Diremos que $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado en X si F contiene a todos sus puntos de acumulación*

Proposición 1.3. *$F \subseteq X$ es cerrado si y solo si el complemento $F^c = X \setminus F$ es abierto.*

Demostración. Notar que si F es cerrado si y solo si dado $x \in X \setminus F$, entonces x no es punto de acumulación. Esto ocurre si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \cap (F \setminus \{x\}) = B_\varepsilon(x) \cap F = \varnothing$$

en otras palabras

$$B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus F,$$

o sea $X \setminus F$ es abierto. ■

Ejemplo 1.7. 1. Los intervalos $[a, b]$ son cerrados en $\mathbb{R}$.

2. El síngleton $\{x\}$ es cerrado en cualquier espacio métrico (X, d).

Definición 1.9 (Cerradura de un conjunto)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos la cerradura de A y la denotamos como $\overline{A}$ a la unión de A y sus puntos de acumulación.*

Observación 1.4. La definición topológica de cerradura es

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F.$$

En lo que sigue, y si no se menciona lo contrario, cada vez que hablemos de un espacio métrico (X, d) supondremos que está dotado de la topología inducida por la métrica. Dentro de las propiedades topológicas importantes de los espacios métricos se encuentran las propiedades de separación, y la que es quizás la mas simple de demostrar es la propiedad de separación de Hausdorff.

Proposición 1.4. *Todo espacio métrico (X, d) es un espacio de Hausdorff. Esto quiere decir que dados dos puntos $x_1 \neq x_2$ en X entonces existen abiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.*

Demostración. Considerar $U_i := B_d(x_i, r)$, $i = 1, 2$, donde $r := \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$. ■

Una consecuencia de esta propiedad es que los límites (si es que existen) son únicos, lo que nos permite descartar situaciones patológicas cuando trabajamos en espacios métricos.

Definición 1.10 (Convergencia en espacios métricos)**.** *Decimos que una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* (X, d) *converge a* $x \in X$ *si* $d(x_n, x) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Corolario 1.5. *Sea* (x_n) *una sucesión tal que* $x_n \to x$ *y* $x_n \to x'$. *Entonces* $x = x'$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_n, x) < \varepsilon$ y $d(x_n, x') < \varepsilon$. Luego

$$d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') \leq 2\varepsilon,$$

para todo ε, luego $d(x, x') = 0$. ■

Además de ser espacios de Hausdorff, los espacios métricos satisfacen una propiedad que es mas fuerte: son espacios normales. Esta propiedad dice que además de poder separar puntos, la topología permite separar cualquier par de conjuntos cerrados disjuntos.

Teorema 1.6. *Todo espacio métrico* (X, d) *es un espacio* normal. *Esto es, dados dos conjuntos cerrados disjuntos* F_1, F_2 *en* X *entonces existen abiertos* U_1, U_2 *tales que* $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ *y* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Para demostrar esta propiedad se utiliza el Lema de Urysohn (que se verá en el curso de Topología).

Lema 1.7 (Lema de Urysohn)**.** *Un espacio topológico* X *es normal si y solo* $\{x\}$ *es cerrado para todo* $x \in X$, *y si para todo conjunto cerrado* $F \subseteq X$ *y todo abierto* $U \subseteq X$ *tal que* $F \subseteq U$ *existe una función continua* $u : X \to [0, 1]$ *que satisface*

$$u(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in F,$$
$$u(x) = 0, \quad \text{para todo } x \notin U.$$

Demostración del Teorema 1.6. Dado un conjunto $B \subseteq X$ y $x \in X$, definimos

$$d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Observar que si $x \in B$ entonces $d(x, B) = 0$. Hecho esto, y dado un cerrado F y un abierto U tales que $F \subseteq U$, entonces podemos considerar la función

$$u(x) := \frac{d(x, U^c)}{d(x, F) + d(x, U^c)}.$$

Notar que si $x \in F$ entonces $u(x) = 1$, y si $x \notin U$, entonces $u(x) = 0$, por lo que solo queda verificar que la función u es continua.

La función u satisface las hipótesis del Lema de Urysohn y concluimos que (X, d) es un espacio normal. ■

Otra propiedad topológica importante que satisfacen los espacios métricos tiene que ver con la *numerabilidad.*

Proposición 1.8. *Todo espacio métrico* (X, d) *satisface el primer axioma de numerabilidad, es decir, para cada punto* $x \in X$ *existe una base de vecindades numerable.*

Observación 1.5. Sea $\mathcal{N}_x$ el conjunto de las vecindades de $x \in (X, d)$. Decimos que $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ es una base de vecindades si para todo $N \in \mathcal{N}_x$ existe $N' \in \mathcal{B}_x$ tal que $N' \subseteq N$.

Demostración. Basta considerar $B_d\left(x, \frac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{N}$ como una base numerable de vecindades para $x \in X$. ■

La importancia de la Proposición 1.8 es que cuando se trabaja en espacios métricos se pueden utilizar sucesiones para demostrar diversos resultados, así como para caracterizar distintas propiedades topológicas en estos espacios.

Proposición 1.9 (Cerradura vía sucesiones)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces*

$$x \in \overline{A} \text{ si y solo si existe una sucesión } (x_n) \text{ en } A \text{ tal que } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Si $x \in A$ no hay nada que hacer pues basta tomar la sucesión constante. Sea $x \in A^c$ un punto de acumulación de A, luego tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing.$$

Luego existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Veamos que $x_n \to x$, en efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, luego si $n \geq N$ tenemos

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

es decir $x_n \to x$.

($\Leftarrow$): Sea $x \in X \setminus A$ y $x_n \in A$ tal que $x_n \to x$. Veamos que x es un punto de acumulación de A. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para $n \geq N$. Luego es claro que

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\},$$

es decir, x es un punto de acumulación para A. ■

Otro concepto de numerabilidad asociado a los espacios métricos es el de separabilidad.

Definición 1.11 (Densidad)**.** *Diremos que $D \subseteq X$ es denso, si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$B_\varepsilon(x) \cap D \neq \varnothing.$$

En otras palabras, todo punto en X es un punto de acumulación para D, es decir $\overline{D} = X$.

Definición 1.12 (Espacios Separables)**.** *Diremos que un espacio métrico (X, d) es separable si es que existe $D \subseteq X$ numerable tal que*

$$\overline{D} = X.$$

Ejemplo 1.8.

1. $(\mathbb{R}^N, d_p)$ es separable pues $\mathbb{Q}^N$ es un subconjunto denso numerable.
2. $(C[a, b], d_\infty)$ es separable. Veremos mas adelante que el conjunto de polinomios a coeficientes racionales es denso.
3. (ℓ^∞, d_∞) el espacio de sucesiones acotadas (x_n) con la métrica

   $$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

   no es separable. Basta considerar el conjunto $A = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ ó } 1\}$ el conjunto de sucesiones binarias. Este conjunto está en correspondencia con el intervalo $[0, 1]$, en particular es no-numerable.

   Notar que dados $(x_n), (y_n) \in D$ distintos, entonces $d_\infty((x_n), (y_n)) = 1$. Si existiese un conjunto denso D entonces

   $$D \cap B_{\frac{1}{2}}((x_n)) \neq \varnothing,$$

   luego D debe tener a lo menos la misma cardinalidad de $[0, 1]$ que no es numerable.

1.1.2. Continuidad en espacios métricos

Además podemos dar la siguiente caracterización de funciones continuas entre espacios métricos

Definición 1.13 (Definición "ε-δ" de continuidad)**.** *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si x satisface $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Proposición 1.10 (Continuidad: versión sucesiones)**.** *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si y solo si para toda sucesión $x_n \to x_0$ en X entonces $f(x_n) \to f(x_0)$ en Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Sea (x_n) una sucesión tal que $x_n \to x$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(a, b) < \delta$ entonces $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$, luego de la convergencia $x_n \to x$ sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(x_n, x) < \delta \quad \text{para todo } n \geq N,$$

de donde deducimos que

$$d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

en otras palabras, $f(x_n) \to f(x)$.

($\Leftarrow$): Probaremos la contra-recíproca. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que

$$d_X(x_\delta, x_0) < \delta \quad \text{y} \quad d_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{n}$ hemos construido una sucesión $x_n \to x_0$, pero $f(x_n) \not\to f(x_0)$. ■

Proposición 1.11 (Continuidad: versión topológica)**.** *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si y solo si para todo abierto $U \subseteq Y$ tal que $f(x_0) \in U$ entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Demostración. Ejercicio. ■

Definición 1.14 (Continuidad global)**.** *Diremos que $f : X \to Y$ es continua si lo es para todo $x \in X$.*

Observación 1.6. La imagen de un abierto vía una función continua no es necesariamente un abierto. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ manda el intervalo abierto $(0, 1)$ al cerrado $\{0\}$.

Algunas propiedades de funciones continuas se presentan en la siguiente

Proposición 1.12.

1. *Las funciones constantes entre espacios métricos $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ son continuas.*

2. *La función identidad $f : (X, d) \to (X, d)$ es continua.*

3. *Si $X \times Y$ se equipa con la métrica d_1 en el producto, y $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, entonces*

$$h(z) = (f(z), g(z))$$

es continua de $Z \to X \times Y$.

4. *La composición de funciones continuas es continua.*

Demostración. Ejercicio. ■

A parte de continuidad, tenemos el concepto de continuidad uniforme que dice que el "δ" solo depende del "ε", pero no del punto $x \in X$.

Definición 1.15 (Continuidad uniforme)**.** *Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Decimos que $f : X_1 \to X_2$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in X$ y todo $x \in X$ que satisface $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Ejemplo 1.9. 1. Las funciones afines $f(x) = a + bx$ son uniformemente continuas.

2. En general funciones $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ que son Lipschitz, es decir $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$, son uniformemente continuas.

3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Definición 1.16 (Homomorfismo)**.** *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es biyectiva, con f y f^{-1} continuas, diremos que f es un homomorfismo.*

Sin embargo, estos objetos no son los mas adecuados para los espacios métricos. Los homomorfismos que son relevantes en los espacios métricos son las isometrías

Definición 1.17 (Isometría)**.** *Dados dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2), y una función $\varphi : X_1 \to X_2$. Decimos que φ es una isometría si*

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y),$$

para todo $x, y \in X_1$.

Si además la función φ es sobreyectiva, decimos que los espacios son isométricos.

Lema 1.13. *Las isometrías son uniformemente continuas.*

Demostración. Basta tomar $\delta = \varepsilon$. ∎

Definición 1.18 (Equivalencia fuerte de métricas)**.** *Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X se dicen (fuertemente) equivalentes si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_2(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Definición 1.19 (Equivalencia débil de métricas)**.** *Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X se dicen débilmente equivalentes si para todo $x, y \in X$ existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_2(x, y).$$

Definición 1.20 (Equivalencia topológica de métricas)**.** *Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X son equivalentes si definen la misma topología.*

Proposición 1.14. *Dado un conjunto X equipado con dos métricas d_1 y d_2. Si las métricas son fuertemente equivalentes entonces la función identidad $i : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua.*

Demostración. Notar que para cada $x \in X$ y $r > 0$, $B_{d_1}\left(x, \frac{r}{C_2}\right) \leq B_{d_2}(x, r) \subseteq B_{d_1}\left(x, \frac{r}{C_1}\right)$. ∎

Observación 1.7. Esto dice que métricas fuertemente equivalentes $\Rightarrow$ métricas topológicamente equivalentes. Sin embargo la recíproca no es necesariamente cierta.

Ejemplo 1.10. Las métricas d_p son todas fuertemente equivalentes en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Notar primero que si $1 \leq p \leq \infty$ entonces

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{p}}} d_p \leq d_\infty \leq d_p.$$

En efecto

$$\begin{aligned} d_p(x,y)^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \\ &\leq N \max_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i|^p \,, \end{aligned}$$

lo que da la primera desigualdad. Para la segunda notar que

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)^p &= \max_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \,. \end{aligned}$$

En particular esto demuestre que todas las métricas d_p son equivalentes a la métrica d_∞, luego si $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces d_p es equivalente a d_q. ■

1.2. Completitud en espacios métricos

En esta sección (X, d) será siempre un espacio métrico. Para hablar del concepto de completitud debemos introducir la noción de sucesiones de Cauchy.

Definición 1.21 (Sucesión de Cauchy)**.** *Diremos que una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy en (X, d) si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$.

Ejemplo 1.11. Claramente cualquier sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo la recíproca no es necesariamente cierta.

Por ejemplo podemos considerar el espacio métrico $(\mathbb{Q}, d)$, donde $d(x, y) = |x - y|$, y la sucesión de números racionales definida por

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Es claro que esta sucesión es de Cauchy (es convergente a e en $\mathbb{R}$ con la misma métrica), sin embargo la sucesión (x_n) no tiene límite en $\mathbb{Q}$.

Hecha esta definición y en virtud del ejemplo anterior es que hacemos la definición siguiente.

Definición 1.22 (Espacio métrico completo)**.** *Diremos que el espacio métrico (X, d) es completo si todas las sucesiones de Cauchy en X son convergentes.*

Ejemplo 1.12.

1. $\mathbb{R}^N$ bajo cualquiera de las métricas d_p es completo. (Axioma del supremo + equivalencia de métricas).

2. $\mathbb{Q}^N$ no es completo bajo la métrica d_2.

3. El intervalo $(0,1)$ no es completo bajo la métrica heredada de $\mathbb{R}$. Notar que la sucesión $x_n = \dfrac{1}{n}$ es de Cauchy, pero no es convergente en $(0,1)$.

Ejemplo 1.13 (Espacio de funciones acotadas). Dado un conjunto X y un espacio métrico completo (Y, d_Y), entonces el conjunto de funciones acotadas

$$B(X,Y) = \left\{ f : X \to Y : \exists x_0 \in X \text{ tal que } \sup_{x \in X} d_Y(f(x), f(x_0)) < \infty \right\}$$

es completo bajo $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(y))$.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$. Es claro que para cada $x \in X$ la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy, luego de la completitud de (Y, d_Y) deducimos que para cada $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))$ es convergente. Definimos

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Veamos que $f \in B(X,Y)$. Como la sucesión (f_n) es de Cauchy, tenemos que existe $n_0 \in N$ tal que

$$d(f_n, f_m) \leq 1, \quad \text{para todo } n, m \geq n_0,$$

en particular $d(f_{n_0}, f_m) \leq 1$ para todo $m \geq n_0$. Por lo tanto podemos pasar al límite $m \to \infty$ en la desigualdad $d_Y(f_{n_0}(x), f_m(x)) \leq 1$ y obtener que $d_Y(f_{n_0}(x), f(x)) \leq 1$ para todo $x \in X$, luego

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d_Y(f_{n_0}(x_0), f_{n_0}(x_0)) \leq 2 + M,$$

donde $M = \sup_{x\in X} d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0))$. Esto demuestra que $f \in B(X,Y)$.

Para concluir, debemos demostrar que $f_n \to f$ uniformemente. Notar que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1$ entonces $d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon$, luego

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$ y todo $n \geq n_1$, es decir

$$d_\infty(f_n, f) < \varepsilon.$$

∎

Ejemplo 1.14 (Espacio de funciones acotadas y continuas). Sea (X, d_X) un espacio métrico e (Y, d_Y) un espacio métrico completo. El espacio

$$BC(X,Y) = \{f \in B(X,Y) : f \text{ es continua}\}$$

es cerrado en $(B(X,Y), d_\infty)$, en particular $(BC(X,Y), d_\infty)$ es completo.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en $BC(X,Y)$ tal que $f_n \to f$, $f \in B(X,Y)$. Debemos demostrar que f es continua. Sean $x, y \in X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(y)) + d_Y(f_n(y), f(y)) \\ &\leq 2d_\infty(f, f_n) + d_Y(f_n(x), f_n(y)). \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ de modo que $d_\infty(f, f_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq N$.

Por otra parte, de la continuidad de f_N en x tenemos que existe $\delta = \delta_{x,N} > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta_{x,N}$ entonces $d_Y(f_N(x), f_N(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, por lo tanto hemos obtenido que existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ entonces

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

que es la continuidad de f en x. ■

Observación 1.8. Este resultado se puede expresar con la frase: "el límite uniforme de funciones continuas es una función continua"

Observación 1.9. Un comentario pertinente a este ejemplo es que si $(X, \mathcal{T})$ es compacto (luego hablaremos de esto), entonces

$$BC(X, Y) = C(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es continua}\},$$

en particular $(C(X, Y), d_\infty)$ es completo.

Las funciones solo continuas no son un buen objeto para las sucesiones de Cauchy, sin embargo tenemos el siguiente

Lema 1.15. *Sean (X, d_x) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy.*

La hipótesis de continuidad uniforme no se puede remover.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x') < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Ahora como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d_X(x_n, x_m) < \delta$. De lo anterior obtenemos $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. ■

Una manera de caracterizar espacios métricos completos es mediante la propiedad de los cerrados encajonados, para ello necesitamos la definición de diámetro de un conjunto

Definición 1.23 (Diámetro)**.** *Dado un subconjunto $B \subset X$, definimos su diámetro como*

$$\delta(B) = \sup_{x,y \in B} d(x, y).$$

Proposición 1.16.

1. *$\delta(A) = 0$ si y solo si $A = \{x\}$.*
2. *Si $A \subseteq B$ entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$.*

Teorema 1.17 (Cantor)**.** *Un espacio métrico (X, d) es completo si y solo si cada vez que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia no-creciente ($F_{n+1} \subseteq F_n$) de subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $\delta(F_n) \to 0$, entonces existe $x \in X$ tal que*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Para cada $n \in \mathbb{N}$ seleccionar $x_n \in F_n$. Veamos que la sucesión (x_n) es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_N) \leq \varepsilon$. Por otra parte, de la propiedad de encajonamiento tenemos que $\{x_k\}_{k \geq N} \subseteq F_N$, luego, si $k, k' \geq N$ tenemos

$$d(x_k, x_{k'}) \leq \sup_{x,y \in F_N} d(x, y) = \delta(F_N) \leq \varepsilon,$$

luego (x_n) es de Cauchy en X, por lo tanto existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \to \bar{x}$.

Notemos que como $\{x_k\}_{k \geq n} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bar{x} \in \overline{F_n} = F_n$ para todo n, luego $\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Finalmente, si $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, entonces $d(x, y) \leq \delta(F_n) \to 0$, luego $x = y$.

($\Leftarrow$): Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Definamos $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$. Es fácil ver que $F_{n+1} \subseteq F_n$. Por otra parte dados $\varepsilon > 0$ y $x, y \in F_n$ entonces existen $k, k' \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(y, x_{k'}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

luego

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, x_{k'}) + d(y, x_{k'}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + d(x_k, x_{k'}).$$

Finalmente, como (x_n) es una sucesión de Cauchy podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_{k'}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $k, k' \geq N$, entonces para todo $n \geq N$ hemos demostrado que si $x, y \in F_n$ entonces

$$d(x, y) \leq \varepsilon,$$

es decir $\delta(F_n) \leq \varepsilon$. Así tenemos una familia no-creciente de cerrados cuyo diámetro converge a 0, luego existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\},$$

de donde obtenemos que $x_n \to x$. Esto pues dado $\varepsilon > 0$, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_N) < \varepsilon$, luego como x_n y x pertenecen a F_N si $n \geq N$ concluimos que

$$d(x, x_n) \leq \delta(F_N) < \varepsilon.$$

■

Teorema 1.18 (Completación de espacios métricos)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces existe un espacio métrico $(\bar{X}, \bar{d})$ completo y una isometría $\varphi : X \to \bar{X}$ tal que $\varphi(X)$ es denso en $\bar{X}$.*

Demostración. Ejercicio. ■

Observación 1.10. Se puede demostrar que la completación de un espacio métrico es única, módulo isometrías. Mas precisamente, si $(\bar{X}_1, \bar{d}_1, \varphi_1)$ y $(\bar{X}_2, \bar{d}_2, \varphi_2)$ son dos completaciones de (X, d), entonces existe una isometría biyectiva $\Psi : \bar{X}_1 \to \bar{X}_2$ tal que $\varphi_2 = \Psi \circ \varphi_1$.

1.3. Aplicaciones de la completitud

1.3.1. El Teorema de punto fijo de Banach

Para enunciar el teorema de punto fijo de Banach, debemos dar la siguiente

Definición 1.24 (Contracción)**.** *Diremos que $f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ es una contracción si es que existe $0 < L < 1$ tal que*

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x'), \quad \textit{para todo } x, x' \in X.$$

Observación 1.11. Notar que las contracciones son funciones Lipschitz, por lo tanto son uniformemente continuas.

Teorema 1.19 (Punto fijo de Banach)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo para f, es decir, $\exists!\ \bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Además, dado cualquier $x_0 \in X$ la sucesión definida por $x_1 = f(x_0)$ y

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

converge hacia $\bar{x}$ con $d(x_N, \bar{x}) \leq \dfrac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$.

Demostración.

Unicidad: Si x, y son dos puntos fijos para f, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$, pero $0 \leq L < 1$, luego $x = y$.

Existencia: Dado $x_0 \in X$, veamos que la sucesión (x_n) definida en el enunciado es de Cauchy. Observar que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L d(x_n, x_{n-1}),$$

luego, por inducción obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

Con esto deducimos que para $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \left(L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \ldots + L^{n+1} + L^n\right) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{L^n(1-L^k)}{1-L} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la sucesión es de Cauchy, luego de la completitud deducimos que existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \to \bar{x}$. Finalmente observemos que de la continuidad de f obtenemos que $f(x_n) \to f(\bar{x})$, pero $f(x_n) = x_{n+1}$ que también converge a $\bar{x}$, luego

$$f(\bar{x}) = \bar{x}$$

por la unicidad de límite.

Finalmente, notar que $d(x_{n+k}, x_n) \leq \dfrac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$, luego si $k \to \infty$ deducimos que

$$d(\bar{x}, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0).$$

■

Ejemplo 1.15 (Teorema de existencia y unicidad de EDOs). Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y $(x_0, y_0) \in \Omega$ es abierto. Además supondremos que f es Lipschitz con respecto a la variable y uniforme en x, i.e. existe $L >$ tal que para todo $(x, y), (x, y') \in \Omega$ entonces

$$\left| f(x, y) - f(x, y') \right| \leq L \left| y - y' \right| .$$

Teorema 1.20 (Cauchy-Lipschitz-Picard). *Existe $d > 0$ y una única función $y : (x_0 - d, x_0 + d) \to \mathbb{R}$ solución de (1.1).*

Para demostrar este teorema, primero notemos que gracias al teorema fundamental del cálculo, la ecuación (1.1) es equivalente a la ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Como $f(x, y)$ es continua, tenemos que existe un subconjunto $(x_0, y_0) \in \omega \subset \Omega$ tal que

$$|f(x, y)| \leq K.$$

Escojamos $d > 0$ tal que

1. $Ld < 1$,
2. Si $|x - x_0| \leq d$ y $|y - y_0| < Kd$ entonces $(x, y) \in \omega$.

Denotemos por $I = [x_0 - d, x_0 + d]$ y X al conjunto de la funciones continuas $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq Kd,$$

y equipamos este espacio con la métrica uniforme $d_\infty(\varphi, \psi) = \sup_{x \in I} |\varphi(x) - \psi(x)|$.

Demostraremos que la aplicación T definida como

$$T(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t$$

está bien definida de $X \to X$. En efecto, si $\varphi \in X$ entonces para $x \in I$ tenemos que

$$|\varphi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t \right| \leq Kd.$$

Por otra parte, si $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ entonces

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| \,\mathrm{d}t \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq Ld \max_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| , \end{aligned}$$

luego como $Ld < 1$, la función $T : X \to X$ es una contracción, lo que nos dice que (1.2) tiene una única solución.

1.3.2. El Teorema de Baire

Algo de terminología

Definición 1.25. *Diremos que un conjunto $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte si $int(\overline{A}) = \varnothing$.*

Ejemplo 1.16. 1. $\varnothing$ es denso en ninguna parte.

2. Cualquier conjunto finito en $\mathbb{R}^N$ es denso en ninguna parte.

3. $\mathbb{Z}^N \subseteq \mathbb{R}^N$ es denso en ninguna parte.

4. $\mathbb{R}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.21 (Teorema de la categoría de Baire)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo, y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una familia de subconjuntos cerrados en X tales que $int(F_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$int\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \varnothing.$$

Observación 1.12. Este teorema se suele utilizar en dos formas

- Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de cerrados tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X,$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_n) \neq \varnothing$. *Un espacio métrico completo no puede ser la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte*.

- Sean $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de abiertos densos, entonces

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

es denso en X.

Demostración. Definimos $G_n = F_n^c$. Notar que por hipótesis, el conjunto G_n es abierto y denso en X. Nuestro objetivo es probar que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en X. Para probar esto, sea $V \subseteq X$ un abierto no-vacío cualquiera en X, veamos que $V \cap G \neq \varnothing$.

Como V es abierto, sabemos que existe $x_0 \in V$ y $r_0 > 0$ tales que $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq V$. De la densidad de G_1 sabemos que $B(x_0, r_0) \cap U_1 \neq \varnothing$, ademas podemos escoger $x_1 \in G_1 \cap B(x_0, r_0)$ y $0 < r_1 < \dfrac{r_0}{2}$ tales que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) \cap G_1.$$

Siguiendo de esta manera, podemos construir sucesiones (x_n) y (r_n) tales que

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$$
$$0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} < \frac{r_0}{2^n}.$$

Claramente (x_n) es una sucesión de Cauchy ($d(x_{n+k}, x_n) \leq 2r_n < \frac{r_0}{2^{n-1}}$), luego existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \to \bar{x}$. Además, por construcción tenemos que si $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$x_{n+k} \subseteq B(x_n, r_n) \cap G_n,$$

luego si $k \to \infty$ obtenemos que $\bar{x} \in \overline{B(x_n, r_n)} \cap G_n \subseteq V \cap G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular $\bar{x} \in V \cap G$.

■

Este teorema tiene varias consecuencias importantes en el análisis funcional, veremos algunas de ellas cuando hablemos de Espacios de Banach (Teorema del grafo cerrado, Teorema de la aplicación abierta y Principio de la cota uniforme).

Ejemplo 1.17. Una aplicación sencilla es la demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable. Consideremos $\mathbb{R}$ equipado con la métrica del valor absoluto, luego es un espacio métrico completo. Si suponemos que $\mathbb{R}$ es numerable entonces sería la unión numerable de sus elementos, i.e.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\},$$

pero sabemos que $\{x\}$ es cerrado para la topología de la métrica, luego el teorema de Baire nos dice que debe existir un $x \in \mathbb{R}$ tal que $int(\{x\}) \neq \varnothing$, lo que sabemos es falso.

Observación 1.13. El mismo argumento anterior sirve para decir que cualquier espacio métrico completo **que no tiene puntos aislados** debe ser no-numerable.

Ejemplo 1.18 (*Funciones nunca diferenciables*). Una aplicación sorprendente del Teorema de Baire es la existencia de funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto.

La demostración de este resultado tiene algunos ingredientes técnicos que aún no hemos visto (aproximación de funciones continuas), por lo que solo ilustraremos los pasos fundamentales y dejaremos algunas cosas sin demostración.

Consideremos el espacio métrico completo de las funciones continuas $C([0,1], \mathbb{R})$ equipado con la métrica uniforme, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos los conjuntos

$$F_n = \left\{ f \in C([0,1], \mathbb{R}) : \sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n, \text{ para algun } a \in [0,1] \right\}.$$

Estos conjuntos contabilizan a las funciones que tienen chance de tener derivada en algún punto.

Lema 1.22. *F_n es cerrado en $C([0,1], \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $(f_k) \subset F_n$ tal que $f_k \to f$. Veamos que $f \in F_n$. Como $f_k \in F_n$, debe existir $a_k \in [0,1]$ tal que

$$\sup_{h \neq 0} \left| \frac{f_k(a_k + h) - f(a_k)}{h} \right| \leq n.$$

Como $(a_k) \subset [0,1]$ es acotada, debe existir una subsucesión (denotada igual) y $a \in [0,1]$ tal que $a_k \to a$.

Sea $h \neq 0$ y definamos $h_k = a - a_k + h$, luego es claro que $h_k \to h$, y como $h \neq 0$ podemos asumir que $h_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (de lo contrario pasamos a una subsucesión).

Notar que

$$|f(a+h) - f_k(a_k + h_k)| = |(f - f_k)(a+h)| \leq d_\infty(f, f_k)$$

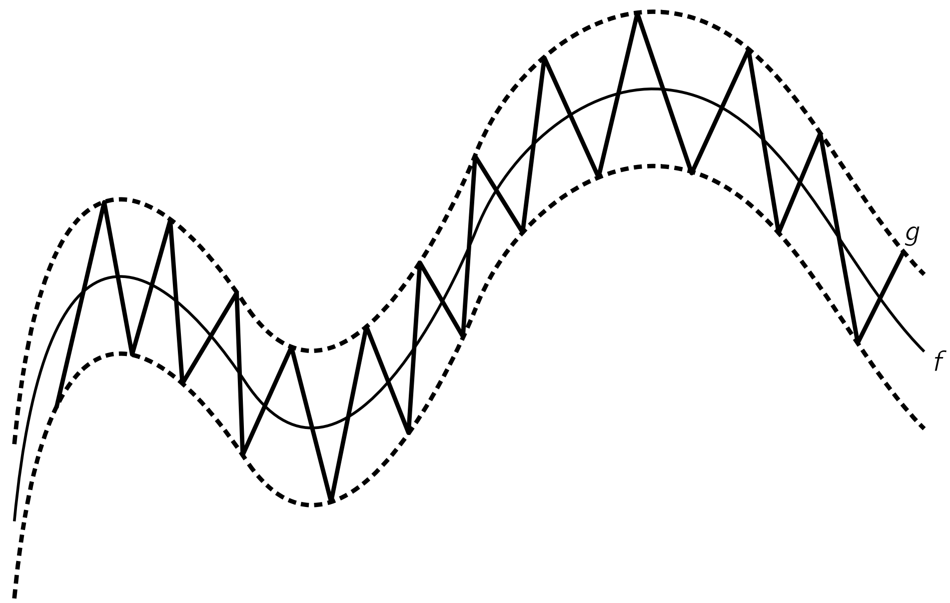

Figura 1.3: Idea de la construcción de la función g.

y

$$|f(a) - f_k(a_k)| \leq |f(a) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_k(a_k)| \leq |f(a) - f(a_k)| + d_\infty(f, f_k),$$

luego, de la continuidad de f y el hecho de que $f_k \to f$ obtenemos que

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f_k(a_k + h_k) - f_k(a_k)}{h_k}\right| \leq n,$$

es decir $f \in F_n$. ■

Lema 1.23. *F_n tiene interior vacío para todo $n \in \mathbb{N}$.*

La demostración de este resultado utiliza un lema de aproximación de funciones continuas mediante funciones lineales a pedazos. No demostraremos dicho resultado, solo ilustraremos la idea con un dibujo.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $f \in F_n$. Queremos demostrar que $B_{d_\infty}(f, \varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$, es decir, queremos encontrar una función cercana a f pero que su derivada sea mayor que n en *casi* todo punto. Para ello consideremos la función g que se puede construir como sugiere la Figura 1.3. La función g satisface que $|g'(x)| > n$ en todos los puntos donde la derivada existe, y además

$$d_\infty(f, g) < \varepsilon.$$

Esto dice que $g \in B_{d_\infty}(f, \varepsilon)$, pero como $|g'(x)| > n$ para todo x donde la derivada existe, se tiene que $g \notin F_n$. ■

La conclusión de estos 2 lemas con ayuda del Teorema de Baire es la siguiente

Proposición 1.24. *Existe una función continua en el intervalo $[0, 1]$ que no tiene derivada en ningún punto. Mas aún, el conjunto de dichas funciones no-diferenciables es denso en $C([0, 1], \mathbb{R})$.*

Demostración. El Teorema de Baire garantiza que un espacio métrico completo no puede ser una unión numerable de cerrados con interior vacío, luego

$$C([0,1],\mathbb{R}) \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

(de hecho, es muestra que $C([0,1],\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$ es denso). Por lo tanto debe existir una función tal que $f \in C([0,1],\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$.

Esta función no puede tener derivada en ningún punto. Si la tuviese, existiría $a \in [0,1]$ y $h_0 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| \leq 1, \quad \text{para todo } 0 < |h| \leq h_0,$$

además, si $|h| \geq h_0$ entonces

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leq \frac{2\max_{x\in[0,1]}|f(x)|}{h_0},$$

luego si $M = \frac{2\max_{x\in[0,1]}|f(x)|}{h_0} + 1 + |f'(a)|$ entonces

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leq M, \quad \text{para todo } h \neq 0,$$

luego $f \in F_M$, lo que es una contradicción. ∎

Observación 1.14. Algunos ejemplos concretos de funciones continuas pero nunca diferenciables son los siguientes.

1. Función de Weierstrass: Para $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$

$$f_W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

2. Función de Hardy

$$f_H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2 \pi x).$$

3. Función de Rudin: Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

y que se extiende para todo x periódicamente, es decir, $\varphi(x+2) = \varphi(x)$. Entonces

$$f_R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

1.4. Compacidad en espacios métricos

Definición 1.26 (Compacidad)**.** *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, decimos que $K \subseteq X$ es compacto si dado un recubrimiento abierto de K existe un subrecubrimiento finito. Esto quiere decir que para toda familia de abiertos $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ tales que*

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

entonces existe un subconjunto finito *$J \subseteq I$, tal que*

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Ejemplo 1.19.

1. $\varnothing$ y cualquier conjunto finito de puntos es compacto.
2. $(0, 1)$ no es compacto en $\mathbb{R}$. Notar que el recubrimiento $\left\{(\frac{1}{n}, 1)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene subrecubrimiento finito.
3. $\mathbb{R}$ (bajo la métrica habitual) no es compacto. El recubrimiento $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ no tiene subrecubrimiento finito.
4. Veremos que cualquier conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^N$ (con la métrica d_2 u otra métrica equivalente) es compacto. Este es el teorema de Heine-Borel.

Una caracterización útil de compacidad es la siguiente.

Proposición 1.25. *K es compacto si y solo si todo subconjunto infinito $E \subseteq K$ tiene un punto de acumulación.*

Este resultado es cierto en cualquier espacio topológico, sin embargo daremos una demostración de la implicación $\Rightarrow$ en el caso de que K es un espacio métrico.

Demostración. Probaremos que cualquier subconjunto de K sin puntos de acumulación debe ser finito. Sea $E \subseteq K$ un conjunto y supongamos que no tiene puntos de acumulación. Como E no tiene puntos de acumulación, E debe ser cerrado (recordar que $\bar{E} = E \cup \{\text{puntos de acumulación}\}$).

Por otra parte, dado $x \in E$, este no puede ser punto de acumulación, luego debe existir $r_x > 0$ tal que

$$B(x, r_x) \cap E = \{x\}.$$

Es claro que

$$K = E \cup K \setminus E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \cup K \setminus E \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x, r_x) \cup K \setminus E,$$

y como el conjunto $K \setminus E$ es un abierto (pues E es cerrado), luego tenemos un recubrimiento abierto del compacto K, es decir, deben existir $x_1, \ldots, x_N \in E$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i}) \cup K \setminus E.$$

De aquí obtenemos que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i}),$$

y como cada $B(x_i, r_{x_i})$ tiene exactamente un elemento de E, esto quiere decir que que E es finito. ■

Otro resultado topológico es que la compacidad se preserva bajo topologías equivalentes, esto es

Proposición 1.26. *Sea $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2)$ un homomorfismo. Luego*

$$A \subset (X, \mathcal{T}_1) \text{ es compacto } \Leftrightarrow f(A) \subset (X, \mathcal{T}_2) \text{ es compacto}$$

Corolario 1.27. *Un espacio métrico X equipado con dos métricas equivalentes (fuertemente o topológicamente) tienen los mismos conjuntos compactos.*

Definición 1.27 (Secuencialmente compacto)**.** *Dado un espacio métrico (X, d), diremos que $K \subseteq X$ es secuencialmente compacto si dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que es convergente en K.*

Ejemplo 1.20. 1. Veremos que cualquier conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ es secuencialmente compactos (Heine-Borel).

2. La bola unitaria en $C([0, 1], \mathbb{R})$ no es secuencialmente compacta bajo la métrica uniforme. Basta considerar la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & 0 < x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que si $m > 2n$, entonces para $x = \frac{1}{2n} \in [0, 1]$ se tiene que $\frac{1}{m} < x < \frac{1}{n}$, luego

$$d_\infty(f_n, f_m) \geq |f_m(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = \frac{1}{2},$$

luego la sucesión no puede tener una subsucesión convergente.

Definición 1.28 (Conjunto totalmente acotado)**.** *Un espacio métrico (X, d) se dice totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ y conjuntos $\{R_i\}_{i=1}^N$ tales que*

- $X = \bigcup_{i=1}^N R_i$,
- $\delta(R_i) \leq 2\varepsilon$.

Tal familia se llama un ε-recubrimiento.

Usualmente se construyen ε-recubrimientos conformados por bolas $R_i = B(x_i, \varepsilon)$.

Ejemplo 1.21. 1. Un subconjunto de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotado.

2. Un conjunto isométrico a uno totalmente acotado es totalmente acotado.

3. Los conjuntos acotados en $\mathbb{R}$ (bajo la métrica habitual) son totalmente acotados:

Veamos que $(-M, M)$ es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la familia siguiente de intervalos: para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$R_n = \left(-M + \frac{\varepsilon}{2}(i - 2), -M + \frac{\varepsilon}{2}(i + 2)\right).$$

Notar que los intervalos son no-disjuntos, que el diámetro es $\delta(R_i) = 2\varepsilon$ y que si N_0 es tal que $-M + \frac{\varepsilon}{2}(N_0 + 2) > M \Leftrightarrow N_0 > \frac{4M}{\varepsilon} - 2$ entonces

$$(-M, M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_0} R_i,$$

es decir, el intervalo tiene un ε-recubrimiento finito, luego es totalmente acotado.

4. Similarmente, no es difícil demostrar que los conjuntos acotados en $\mathbb{R}^N$ (bajo la métrica d_∞ o cualquier métrica equivalente) son totalmente acotados. Para ver esto, basta notar que cualquier conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se puede incluir en un cubo N-dimensional (la bola abierta $B(0, M)$ con la métrica d_∞), esto es
$$A \subseteq (-M, M)^N = (-M, M) \times (-M, M) \times \ldots \times (-M, M),$$
Luego tomamos un ε-recubrimiento de $(-M, M)$ conformado por $\{R_i, i = 1, \ldots, N_0\}$, entonces la familia conformada por los intervalos del ejemplo anterior
$$\left\{R_{i_1} \times R_{i_2} \times \ldots \times R_{i_N}, i_j \in \{1, \ldots, N_0\}\right\}$$
es un $\varepsilon\sqrt{N}$-recubrimiento.

5. $\mathbb{R}$ con la métrica acotada es acotado, sin embargo no es totalmente acotado. Se deja esto como ejercicio.

6. En general un conjunto acotado no tiene por que ser totalmente acotado. Por ejemplo en ℓ^∞ con la métrica d_∞, el conjunto conformado por $a_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $a_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, etcétera es acotado, pero no totalmente acotado, pues $d_\infty(a_i, a_j) = 1$, luego no puede haber un ε-recubrimiento finito si $\varepsilon < 1$.

Lema 1.28. *Si (X, d) es compacto, entonces X es totalmente acotado.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar el recubrimiento $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, \varepsilon)$ que por compacidad tiene un subrecubrimiento finito. ■

Lema 1.29. *Sea $A \subseteq (X, d)$ un conjunto secuencialmente compacto X. Entonces A es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \to x$. Como A es secuencialmente compacto, entonces existe una subsucesión x_{n_k} y $\tilde{x} \in A$ tal que $x_{n_k} \to \tilde{x}$. Pero por unicidad del limite, tenemos que $x_{n_k} \to x$, luego $x = \tilde{x} \in A$. Es decir, A es cerrado.

Veamos que A es acotado. Probemos la contra-recíproca, es decir, A no acotado implica A no compacto.

Supongamos que $\delta(A) = +\infty$, es decir podríamos construir una sucesión de la siguiente forma: Sea $x_1 \in A$ arbitrario, como $\delta(A) = +\infty$ debe existir $x_2 \in A$ tal que
$$d(x_1, x_2) \geq 1.$$
De la misma forma, debe existir $x_3 \in A$ tal que
$$d(x_3, x_2) \geq 1 + d(x_2, x_1).$$
Siguiendo de esta forma, podemos construir una sucesión (x_n) tal que
$$d(x_{n+1}, x_n) \geq 1 + d(x_n, x_1).$$
Luego, para $m > n$
$$d(x_m, x_1) \geq 1 + d(x_n, x_1),$$
de donde obtenemos que
$$d(x_n, x_m) \geq d(x_m, x_1) - d(x_n, x_1) \geq 1$$
es decir, esta sucesión no puede tener ninguna subsucesión convergente. ■

Teorema 1.30 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes son equivalentes*

1. *(X, d) es compacto.*
2. *(X, d) es secuencialmente compacto.*
3. *(X, d) es completo y totalmente acotado.*

Para demostrar este teorema, necesitamos el llamado Lema de Lebesgue

Lema 1.31 (Lebesgue)**.** *Si (X, d) es completo y totalmente acotado, entonces todo recubrimiento abierto $\{U_\lambda\}_{\alpha\in A}$ admite un número de Lebesgue $\lambda > 0$, esto es, para todo $x \in X$ existe $\alpha \in A$ tal que $B_d(x, \lambda) \subseteq U_\alpha$.*

Demostración del Teorema 1.30. (1)⇒(2): Sea (x_n) una sucesión en X. Como es un conjunto infinito, debe tener un punto de acumulación, que denotamos $\bar{x}$. Como $\bar{x}$ es un punto de acumulación de x_n, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_k} \in B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right),$$

en otras palabras $d(\bar{x}, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, es decir $x_{n_k} \to \bar{x}$.

(2)⇒(3): Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X y sea (x_{n_k}) una subsucesión convergente a $x \in X$. Para $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n, m \geq n_0,$$

y sea $n_1 \geq n_0$ tal que

$$d(x_{n_1}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión de Cauchy es convergente, es decir (X, d) es completo.

Veamos que es totalmente acotado. Para ello probaremos la contra-recíproca: Supongamos que no es totalmente acotado y tomemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que no hay un ε_0-recubrimiento.

Tomemos $x_1 \in X$ cualquiera, y consideremos $B(x_1, \varepsilon_0)$. Al no existir un ε_0-recubrimiento, no puede ser que $B(x_1, \varepsilon_0) = X$, luego existe

$$x_2 \in B(x_1, \varepsilon_0)^c,$$

es decir $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon_0$. Tampoco puede suceder que $B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) = X$, luego debe existir

$$x_3 \in (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))^c = B(x_1, \varepsilon_0)^c \cap B(x_2, \varepsilon_0)^c,$$

es decir $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon_0$ y $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon_0$. Siguiendo en esta forma, podemos construir una sucesión (x_n) tal que

$$x_{n+1} \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0)\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0)^c,$$

es decir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon_0, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Concluimos entonces que si $m \neq n$ entonces $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$, y así la sucesión (x_n) no puede tener una subsucesión convergente.

(3)⇒(1): Aquí utilizaremos el Lema de Lebesgue. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recubrimiento abierto de X, y sea $\lambda > 0$ su número de Lebesgue asociado. Como X es totalmente acotado, existe un λ-recubrimiento, es decir, existen $\{x_1, \dots, x_N\}$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \lambda),$$

pero λ es el número de Lebesgue del recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, luego para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ existe $\alpha_i \in A$ tal que

$$B(x_i, \lambda) \subseteq U_{\alpha_i}.$$

Por lo tanto

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \lambda) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i},$$

es decir, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tiene un subrecubrimiento finito. ■

Observación 1.15. Notar que en la demostración de (2) ⇒ (3) hemos demostrado lo siguiente: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a $\bar{x} \in X$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\bar{x}$.

Demostración del Lema 1.31. Argumentaremos por contradicción. Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento abierto que no tiene número de Lebesgue, es decir

$$(\forall\lambda > 0)(\exists x \in X)(\forall\alpha \in A)\ B(x, \lambda) \not\subseteq U_\alpha.$$

Consideremos $\lambda = \frac{1}{n}$, luego lo anterior nos dice que existe una sucesión (infinita) (x_n) tal que $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ no está incluida en ningún U_α.

Por otra parte, como X es totalmente acotado, existe un $\frac{1}{2}$-recubrimiento, esto es, existen $\{y_{i,1}\}_{i=1}^{N_1}$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N_1} B\left(y_{i,1}, \frac{1}{2}\right).$$

Es claro que debe existir $i \in \{1, \dots, N_1\}$ tal que $B\left(y_{i,1}, \frac{1}{2}\right)$ contiene una infinidad de x_n's. Sin perder generalidad digamos que es $i = 1$. Seleccionemos $y_{1,1}$.

De la misma forma anterior, podemos tomar un $\frac{1}{4}$-recubrimiento: $\{y_{i,2}\}_{i=1}^{N_2}$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N_2} B\left(y_{i,2}, \frac{1}{4}\right),$$

y seleccionar $i = 1$ tal que $B\left(y_{1,2}, \frac{1}{4}\right)$ contiene una infinidad de los x_n's que están en $B(y_{1,1}, \frac{1}{2})$. Agreguemos $y_{1,2}$ a la sucesión. Siguiendo de esta misma forma, podemos construir una segunda sucesión $(y_{1,k})$ tal que $B(y_{1,k}, 2^{-k})$ contiene una infinidad de los x_n's que están en $B(y_{1,k-1}, 2^{1-k})$.

Definamos

$$F_m = \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B(y_{1,k}, 2^{-k})},$$

Notemos que cada F_m contiene una infinidad de x_n's (en particular es no vacío), que F_m es cerrado, y que $F_{m+1} \subseteq F_m$. Por construcción observemos que

$$\delta(F_m) \leq \delta(B(y_{1,m}, 2^{-m})) = 2^{1-m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego, como X es completo, el Teorema 1.17 nos dice que existe $\bar{y} \in X$ tal que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \{\bar{y}\}\,.$$

Ahora, sea $\alpha \in A$ tal que $\bar{y} \in U_\alpha$ (recordar que $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$) y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$ (cada U_α es abierto). Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ y como hay una infinidad de x_n's en F_m, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in F_m \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente sea $z \in B(x_n, \frac{1}{n})$, luego

$$d(z, \bar{y}) \leq d(z, x_n) + d(x_n, \bar{y}) < \frac{1}{n} + \delta(F_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por lo tanto $z \in B(\bar{y}, \varepsilon)$, es decir

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq U_\alpha,$$

lo que contradice la elección de x_n. ■

Corolario 1.32 (Heine-Borel). *Para $A \subseteq \mathbb{R}^N$ con cualquiera de las métricas equivalentes d_p (o en general, como veremos mas adelante, bajo cualquier métrica que viene de una norma $\|\cdot\|$) se tiene*

$$A \text{ es compacto} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Demostración. El Lema 1.29 y el Teorema 1.30 nos dicen que $\Rightarrow$ es válido.

Para la otra dirección, notar que vimos que acotado implica totalmente acotado en $\mathbb{R}^N$, y como $\mathbb{R}^N$ es completo y A es cerrado, entonces A es también completo, luego el Teorema 1.30 nos dice que A es compacto. ■

Como mencionamos antes, la compacidad es una invariante topológica. Esto se ve reflejado en la siguiente

Proposición 1.33. *Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto e (Y, d_Y) un espacio métrico. Entonces $f(X)$ es compacto para toda función $f : X \to Y$ continua.*

Demostración. Sea (y_n) una sucesión en $f(X)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $y_n = f(x_n)$. De la compacidad de X deducimos que existe $x \in X$ y una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} \to x$. Finalmente, de la continuidad de f obtenemos que

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x),$$

es decir, la sucesión (y_n) tiene una subsucesión convergente en $f(X)$. ■

Observación 1.16. Notar que este teorema, junto con el hecho de que los compactos en los espacios métricos deben ser acotados (ver Lema 1.29), obtenemos que

$$C(X, Y) = BC(X, Y)$$

para cualquier espacio métrico compacto X y cualquier espacio métrico Y, mas aún, si Y es completo, entonces $(C(X, Y), d_\infty)$ es completo.

Corolario 1.34. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existen $x_m, x_M \in X$ tales que*

$$f(x_m) = \inf_{x\in X} f(x) \quad y \quad f(x_M) = \sup_{x\in X} f(x).$$

Demostración. De la proposición anterior, tenemos que $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$, luego $f(X)$ es cerrado y acotado, por lo tanto contiene a sus cotas superior e inferior. ■

Proposición 1.35. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto e (Y, d_Y) un espacio métrico. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. De la definición de continuidad tenemos que dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe $\delta = \delta_{\varepsilon,x} > 0$ tal que si $d_X(x, x') < \delta_{\varepsilon,x}$ entonces $d_Y(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Esto nos permite construir el siguiente recubrimiento de X indexado por $x \in X$

$$X = \bigcup_{x\in X} B_{d_X}\left(x, \frac{\delta_{\varepsilon,x}}{2}\right).$$

De la compacidad de X deducimos la existencia de un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_{d_X}\left(x_i, \frac{\delta_{\varepsilon,x_i}}{2}\right). \tag{1.3}$$

Definamos $\delta_\varepsilon = \text{mín}_{i=1,\dots,N} \frac{\delta_{\varepsilon,x_i}}{2}$.

Ahora, dados $x, x' \in X$ tales que $d_X(x, x') < \delta_\varepsilon$ tenemos lo siguiente: de (1.3) obtenemos que existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que

$$x \in B_{d_X}\left(x_i, \frac{\delta_{\varepsilon,x_i}}{2}\right),$$

pero

$$d_X(x', x_i) \leq d_X(x', x) + d_X(x, x_i) < \delta_\varepsilon + \frac{\delta_{\varepsilon,x_i}}{2} < \delta_{\varepsilon,x_i}.$$

Esto nos dice que $x, x' \in B_{d_X}(x_i, \delta_{\varepsilon,x_i})$, y de la forma que escogimos δ_{ε,x_i} obtenemos que si $d_X(x_i, z) < \delta_{\varepsilon,x_i}$ entonces $d_Y(f(x_i), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que es la continuidad uniforme de f. ■

Proposición 1.36. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de subconjuntos compactos de X con la propiedad de la intersección finita, es decir, tales que para cada $J \subseteq A$ finito se tiene que*

$$\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha \neq \varnothing.$$

Entonces

$$\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \varnothing.$$

Demostración. Sea $U_\alpha = K_\alpha^c$, luego U_α es abierto en X. Supongamos que existe $\beta \in A$ tal que

$$K_\beta \cap \bigcap_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\neq\beta}} K_\alpha = \varnothing.$$

Esto nos dice que

$$K_\beta \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\neq\beta}} U_\alpha,$$

luego de la compacidad de K_β obtenemos que existe $J \subseteq A$ finito tal que

$$K_\beta \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha\in J\\ \alpha\neq\beta}} U_\alpha,$$

pero esto dice que

$$K_\beta \cap \bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha = \varnothing,$$

lo que contradice la hipótesis de intersecciones finitas no vacías. ■

Observación 1.17. En algunos casos este resultado se enuncia de la siguiente forma: Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de cerrados que tienen la propiedad de la intersección finita. Luego

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \varnothing.$$

Ejemplo 1.22. Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la colección de subconjuntos de $[0, 1]$ definidas como

$$C_1 = [0,1],$$
$$C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right), \quad \text{para } n \geq 1$$

donde para $A \subseteq \mathbb{R}$ usamos la notación $\frac{A}{3} = \left\{\frac{a}{3} : a \in A\right\}$. No es difícil demostrar que $C_{n+1} \subseteq C_n$, luego para cada familia finita de índices J tenemos que

$$\bigcap_{n\in J} C_n = C_M,$$

donde $m = \max J$. Además, los conjuntos C_n son todos cerrados dentro del compacto $[0, 1]$, en particular son conjuntos compactos. Esto nos dice que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ se conoce como el conjunto de Cantor. Este conjunto es cerrado en $[0, 1]$ (intersección de conjuntos cerrados), y además es compacto (cerrado dentro de un compacto).

Observación 1.18. Un resultado topológico sorprendente es que para *cualquier* espacio métrico compacto X, existe una función continua $f : \mathcal{C} \to X$ que además es sobreyectiva. En otras palabras, todos los espacios métricos compactos son imágenes continuas del conjunto de Cantor.

Proposición 1.37. *Todo espacio métrico (X, d) compacto es separable.*

Demostración. Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia de conjuntos

$$\mathcal{A}_n = \left\{ B(x, \frac{1}{n}) \right\}_{x \in X}$$

es un recubrimiento abierto de X. De la compacidad deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\left\{ x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n \right\} \subseteq X$ tal que $\left\{ B(x_i^n, \frac{1}{n}) \right\}_{i=1}^{k_n}$ es un recubrimiento de X.

Consideremos

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_i^n\}_{i=1}^{k_n},$$

que es una unión numerable de conjuntos finitos, luego es numerable.

Veamos que es denso: Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, sea $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon \varepsilon > 1$. Como $\left\{ B(x_i^{n_\varepsilon}, \frac{1}{n_\varepsilon}) \right\}_{i=1}^{k_{n_\varepsilon}}$ es un recubrimiento de X, tenemos que existe $i \in \{1, \ldots, k_{n_\varepsilon}\}$ tal que $x \in B(x_i^{n_\varepsilon}, \frac{1}{n_\varepsilon})$, es decir

$$d(x, x_i^{n_\varepsilon}) < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Teorema 1.38. *Todas las normas sobre $\mathbb{R}^N$ son equivalentes, es decir, dadas dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 \|x\| \leq |||x||| \leq C_2 \|x\|, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Demostración. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una norma cualquiera. Veamos que es equivalente a la norma Euclidiana $\|\cdot\|_2$.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, es decir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^N$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Luego, gracias a que $\|\cdot\|$ es una norma, tenemos que

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \|e_i\|,$$

luego usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|x\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|e_i\|^2} = \|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|e_i\|^2},$$

con lo que si definimos

$$C_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|e_i\|^2},$$

(notar que C_2 no depende de x) hemos demostrado que

$$\|x\| \leq C_2 \|x\|_2.$$

Para la otra desigualdad ($C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|$), consideremos la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{S}^{N-1} = \left\{y \in \mathbb{R}^N : \|y\|_2 = 1\right\}$$

y definamos la función $f : (\mathbb{S}^{N-1}, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ dada por

$$f(y) = \|y\| \, .$$

Como $\mathbb{S}^{N-1}$ es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, entonces es compacto (bajo la topología inducida por $\|\cdot\|_2$). Veamos que la función f es Lipschitz continua: Sean $x, y \in \mathbb{S}^{N-1}$, luego de la desigualdad triangular para $\|\cdot\|$ y el paso anterior tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C_2 \|x - y\|_2 \, .$$

Ahora, por el Corolario 1.34 esta función debe alcanzar su mínimo en algún $\bar{y} \in \mathbb{S}^{N-1}$. Sea

$$C_1 := f(\bar{y}) = \min_{y \in \mathbb{S}^{N-1}} f(y),$$

y notemos que para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} \|x\| \\ &= \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|, \end{aligned}$$

pero el vector $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}^{N-1}$, luego

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \\ &= \|x\|_2 \, f(y) \\ &\geq \|x\|_2 \, f(\bar{y}) \\ &= C_1 \|x\|_2 \, , \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. ■

Observación 1.19. En general se puede demostrar que todas las normas son equivalentes en un espacio vectorial normado cualquiera de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Esto es cierto pues si X tiene dimensión N sobre $\mathbb{R}$, entonces $X \cong \mathbb{R}^N$.

Ejemplo 1.23 (Un conjunto totalmente acotado en ℓ^2). El conjunto $\mathcal{M}$ de los $(x_n) \in \ell^2$ tales que $|x_i| \leq 2^{-i}$ es totalmente acotado en ℓ^2. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{M}$ consideremos la función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ definida como

$$\varphi((x_n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots).$$

Observemos que

$$d_2((x_n), \varphi((x_n)))^2 = \sum_{k \geq N+1} |x_k|^2 \leq \sum_{k \geq N+1} \frac{1}{4^k} < \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notar que $\varphi(M)$ es isométrico a un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$, luego es totalmente acotado, por lo que si tomamos un $\frac{\varepsilon}{2}$-recubrimiento de $\varphi(M)$, entonces tendremos un ε-recubrimiento de M.

1.4.1. Convergencia de funciones continuas sobre conjuntos compactos

Al hablar de convergencia de funciones, uno debe tener presente que no todas las convergencias (topologías) que uno pueda utilizar son equivalentes. Por ejemplo en el caso de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ tenemos que

$$\text{convergencia uniforme} \Rightarrow \text{convergencia puntual,}$$

sin embargo la recíproca no es necesariamente cierta. Para ello basta considerar la sucesión de funciones continuas $f(x) = x^n$ y notar que si $x \in [0,1]$ entonces

$$\begin{aligned} f_n(x) &\to 0 \quad \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f_n(x) &\to 1 \quad \text{si } x = 0, \end{aligned}$$

es decir $f_n(x) \to f(x)$, donde f es la función discontinua que vale 0 si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$. Esta convergencia NO puede ser uniforme, pues como vimos, el límite uniforme de funciones continuas debe ser una función continua.

Lo anterior muestra que para tener un resultado que diga

$$\text{convergencia puntual} \Rightarrow \text{convergencia uniforme,}$$

es necesario que el límite puntual sea también continuo. Sin embargo esto tampoco es suficiente, pues se puede considerar la sucesión $(f_n) \subseteq C([0,1], \mathbb{R})$ definida como

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, para cualquier $x \in [0,1]$ se tiene que $f_n(x) \to 0$, pero el límite no es uniforme ya que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1.$$

Uno de los resultados que resuelve esta situación es el siguiente de resultado de Dini:

Teorema 1.39 (Teorema de Dini)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $(f_n) \subseteq C(X,\mathbb{R})$ una sucesión monótona ($f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ó $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo n y x) que converge puntualmente a $f \in C(X,\mathbb{R})$. Entonces la convergencia es uniforme.*

Demostración. Basta suponer que la sucesión es no-decreciente, i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (de lo contrario se considera la sucesión $(-f_n)$). Definamos $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Notar que $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, definamos

$$E_n = \{x \in X : g_n(x) \geq \varepsilon\} = g_n^{-1}([\varepsilon, \infty)).$$

Como f_n y f son continuas, g_n es continua y el conjunto E_n es cerrado para cada n. Además, como $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ tenemos que $E_{n+1} \subseteq E_n$. Lo que dice que tenemos una sucesión de conjuntos cerrados encajonados dentro de un compacto. Definimos

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

y supongamos que $E \neq \varnothing$, por lo que podríamos tomar $x \in E$. De la convergencia $f_n(x) \to f(x)$ tenemos que $g_n(x) \to 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto quiere decir que $x \notin E_n$ para todo $n \geq N$, lo que es una contradicción con el hecho de que $x \in E$. Por lo tanto $E = \varnothing$, y esto implica que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $E_n = \varnothing$ para todo $n \geq N_1$, luego

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in X \text{ y todo } n \geq N_1,$$

lo que es la convergencia uniforme de g_n a 0. ■

1.5. El Teorema de Arzelà-Ascoli

Un teorema muy importante en análisis es el teorema que caracteriza la compacidad en el espacio $C(X, Y)$ donde X es un métrico compacto e Y un espacio métrico completo.

Observación 1.20. Cuando (X, d_X) es compacto e (Y, d_Y) es un espacio métrico, entonces

$$BC(X, Y) = C(X, Y)$$

pues si X es compacto y $f : X \to Y$ continua, entonces $f(X)$ es compacto en Y, por lo que debe ser acotado.

Como vimos, la compacidad en espacios métricos es equivalente a tener conjuntos completos y totalmente acotados. Como el concepto de totalmente acotado es poco "natural" cuando se habla de funciones continuas es que introducimos el siguiente concepto

Definición 1.29 (Equicontinuidad)**.** *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Un subconjunto $A \subseteq C(X, Y)$ se dice equicontinuo si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x_0 \in X$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces*

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Observación 1.21. Notar que el δ puede depender de $x_0 \in X$ (y de ε). El término equicontinuidad viene dado por el hecho de que el mismo δ sirve para *todas* las funciones en A, en otras palabras, todas las funciones de A tienen el mismo "módulo de continuidad".

La relación entre totalmente acotado y equicontinuidad viene dada por el siguiente lema:

Lema 1.40. *Un subconjunto de $A \subseteq (C(X, Y), d_\infty)$ que es totalmente acotado es equicontinuo.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Debemos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ entonces

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{para toda } f \in A.$$

Como A es totalmente acotado, existe un $\frac{\varepsilon}{3}$-recubrimiento, es decir, existen $f_1, \ldots, f_N \in C(X, Y)$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{d_\infty}\left(f_i, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Por otra parte, como cada f_i es continua, existe $\delta_i > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta_i$ entonces

$$d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definamos

$$\delta = \text{mín}\{\delta_1, \dots, \delta_N\},$$

y veamos que para este $\delta > 0$ podemos concluir. Sea $f \in A$, luego $f \in B_{d_\infty}\left(f_{i_0}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ para cierto i_0, luego si suponemos que $d_X(x, y) < \delta$, entonces

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_{i_0}(x)) + d_Y(f_{i_0}(x), f_{i_0}(y)) + d_Y(f_{i_0}(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

lo que es la equicontinuidad. ■

Corolario 1.41. *Si $K \subseteq (C(X, Y), d_\infty)$ es compacto, entonces K es equicontinuo.*

Lema 1.42. *Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico y $(f_n) \subseteq C(X, Y)$ una sucesión que converge puntualmente a f. Si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo, entonces $f_n \to f$ uniformemente.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ sea $\delta_x > 0$ tal que si $d_X(x, x') < \delta_x$ entonces

$$d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De la compacidad de X podemos encontrar $x_1, \dots, x_N \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_{d_X}(x_i, \delta_{x_i}),$$

y de la convergencia puntual de f_n a f en cada uno de estos x_i tenemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$

$$d_Y(f_n(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Con esto tenemos que dado $x \in X$, existe x_i tal que $d_X(x, x_i) < \delta_{x_i}$, luego, si $n \geq N_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f(x)) &\leq d_Y(f_n(x), f_n(x_i)) + d_Y(f_n(x_i), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad utilizamos que si $x, x_i \in X$ están fijos, entonces de la convergencia puntual y la continuidad de d_Y

$$d_Y(f(x), f(x_i)) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f_n(x), f_n(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

Definición 1.30. *Un subconjunto de $A \subseteq C(X, Y)$ se dice (uniformemente) acotado si existen $R > 0$ y $f \in C(X, Y)$ tal que $A \subseteq B_{d_\infty}(f, R)$.*

El conjunto A se dice puntualmente acotado si para cada $x \in X$ existe $R > 0$ e $y \in Y$ tal que

$$A(x) = \{f(x) : f \in A\} \subseteq B_{d_Y}(y, R).$$

Ejemplo 1.24. 1. La familia de funciones continuas $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n-1 \text{ ó } x > n+1 \\ n(x-n+1) & \text{si } n-1 \leq x < n \\ -n(x-n-1) & \text{si } n \leq x \leq n+1 \end{cases}$$

es puntualmente acotado pero no uniformemente acotado.

2. Para $n \geq 2$, la familia de funciones continuas $A \subseteq C([0,1], \mathbb{R})$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2n} \text{ ó } x > \dfrac{3}{2n} \\ n(2nx-1) & \text{si } \dfrac{1}{2n} \leq x < \dfrac{1}{n} \\ -n(2nx-3) & \text{si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{3}{2n} \end{cases}$$

   es puntualmente acotado en el compacto, pero no uniformemente acotado.

Lema 1.43. *Si (X, d_X) es compacto, entonces un conjunto equicontinuo y puntualmente acotado $A \subseteq (C(X,Y), d_\infty)$ es (uniformemente) acotado.*

Demostración. Como A es equicontinuo, dado $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < 1, \quad \text{para todo } f \in A.$$

Como X es compacto, existen $\{x_i\}_{i=1}^N$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^N B_{d_X}(x_i, \delta_{x_i}).$$

Ahora, como A es puntualmente acotado, tenemos que los conjuntos $A(x_i)$ son acotados en Y, es decir, existe $y_0 \in Y$ y R_i's tales que

$$A(x_i) \subseteq B_{d_y}(y_0, R_i).$$

Sea $R := \text{máx}_{i=1,\ldots,N} R_i$, y veamos que $A \subseteq B_{d_\infty}(y_0, 1+R)$. En efecto, sea $f \in A$ y sea $x \in X$, luego existe $x_i \in X$ tal que $d_X(x, x_i) < \delta_{x_i}$. De la equicontinuidad obtenemos que $d_Y(f(x), f(x_i)) < 1$, de donde podemos escribir

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), y_0) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), y_0) \\ &\leq 1 + R_i \\ &\leq 1 + R, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d_\infty(f, y_0) \leq 1 + R.$$

■

Definición 1.31. *Un conjunto $K \subseteq X$ se dice relativamente compacto si $\overline{K}$ es compacto en X.*

Teorema 1.44 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto e (Y, d_Y) un espacio métrico completo. Entonces $K \subseteq C(X,Y)$ es relativamente compacto si y solo si*

1. *K es equicontinuo,*
2. *Para todo $x \in X$, el conjunto $K(x) = \{f(x) : f \in K\}$ es relativamente compacto en Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Si $\overline{K}$ es compacto entonces es totalmente acotado, luego K es totalmente acotado, y por el Lema 1.40 entonces K es equicontinuo.

Ahora sea $x \in X$ y consideremos la función $\delta_x : C(X,Y) \to Y$ definida como

$$\delta_x(f) = f(x),$$

se deja como ejercicio demostrar que δ_x es continua. Luego es claro que

$$K(x) \subseteq \delta_x(\overline{K}),$$

y como δ_x es continua, el conjunto $\delta_x(\overline{K})$ es compacto, esto implica que $\overline{K(x)}$ debe ser compacto.

($\Leftarrow$): Como $C(X,Y)$ es completo y $\overline{K}$ es cerrado, basta demostrar que K es totalmente acotado, pues entonces $\overline{K}$ también lo será (ejercicio) y al ser cerrado, resultará ser completo.

Sea $\varepsilon > 0$ y construyamos un 4ε-recubrimiento de K. Como K es equicontinuo, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{para todo } f \in K.$$

Como X es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{x \in X} B_{d_X}(x, \delta) = \bigcup_{n=1}^{N} B_{d_X}(x_i, \delta). \tag{1.4}$$

Notar ahora que para cada $i = 1, \ldots, N$ se tiene que

$$K(x_i) = \{f(x_i) : f \in K\} = \bigcup_{f \in K} \{f(x_i)\} \subseteq \bigcup_{f \in K} B_{d_Y}\left(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

pero por hipótesis $K(x_i)$ es relativamente compacto en Y, luego existe $H_i = \left\{f_1^i, \ldots, f_{M_i}^i\right\} \subset K$ tal que

$$K(x_i) \subseteq \overline{K(x_i)} \subseteq \bigcup_{p=1}^{M_i} B_{d_Y}\left(f_p^i(x_i), \varepsilon\right) = \bigcup_{f \in H_i} B_{d_Y}\left(f(x_i), \varepsilon\right).$$

Para cada secuencia de enteros $(p_1, \ldots, p_N)$ con $1 \leq p_i \leq M_i$ definamos el conjunto

$$H(p_1, \ldots, p_N) = \left\{f \in K : d_Y(f(x_i), f_{p_i}^i(x_i)) < \varepsilon, \forall\, i = 1, \ldots, N\right\}.$$

Notar que $\operatorname{diam}(H(p_1, \ldots, p_N)) \leq 4\varepsilon$, en efecto, sean $f, g \in H(p_1, \ldots, p_N)$ y sea $x \in X$. Gracias a (1.4) existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $d_X(x, x_i) < \delta$. Para tal i tenemos que existe p_i y tal que $d_Y(f(x_i), f_{p_i}^i(x_i)) < \varepsilon$ y $d_Y(f(x_i), f_{p_i}^i(x_i)) < \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), g(x)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f_{p_i}^i(x_i)) + d_Y(f_{p_i}^i(x_i), g(x_i)) + d_Y(g(x_i), g(x)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, para cada secuencia de enteros $(p_1, \ldots, p_N)$ tales que $H(p_1, \ldots, p_N) \neq \varnothing$ escogemos $g_{p_1, \ldots, p_N} \in H(p_1, \ldots, p_N)$. Lo anterior nos dice que

$$H(p_1, \ldots, p_N) \subseteq B_{d_\infty}(g_{p_1, \ldots, p_N}, 4\varepsilon).$$

Observar que para cada $f \in K$ podemos encontrar $p_1(f), \ldots, p_N(f)$ tales que $f \in B_{d_\infty}(g_{p_1(f), \ldots, p_N(f)}, 4\varepsilon)$, en efecto, de la manera que construimos los conjuntos H_i tenemos que existen $p_1(f), \ldots, p_N(f)$ tales que

$$f(x_i) \in B_{d_Y}(f_{p_i(f)}^i(x_i), \varepsilon) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N,$$

es decir $f \in H(p_1(f), \dots, p_N(f)) \subseteq B_{d_\infty}(g_{p_1(f),\dots,p_N(f)}, 4\varepsilon)$, en otras palabras

$$K \subseteq \bigcup_{\substack{(p_1,\dots,p_N)\in\mathbb{N}^N \\ 1\leq p_i\leq M_i}} B_{d_\infty}(g_{p_1,\dots,p_N}, 4\varepsilon)$$

■

Observación 1.22. El teorema sigue siendo cierto si se cambia (X, d_X) por cualquier espacio topológico compacto que es Hausdorff.

Incluso se puede quitar la hipótesis de que (Y, d_Y) sea completo, eso si, se debe cambiar la topología en $C(X, Y)$ por la topología de "convergencia en compactos", es decir,

$$f_n \to f \text{ en compactos de } X \Leftrightarrow \sup_{x\in K} d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0 \text{ para todo compacto } K \subset X.$$

Ver por ejemplo el libro de Munkres [6].

Observación 1.23. La topología de convergencia en compactos se usa bastante en análisis complejo, ya que se tiene el siguiente resultado: Si $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones holomorfas tales que

$$f_n \to f \text{ en compactos de } \mathbb{C},$$

entonces f es holomorfa.

Algunas versiones de este teorema que son usualmente utilizadas son las siguientes

Corolario 1.45. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y $K \subseteq C(X, \mathbb{R}^N)$ tal que*

1. *K es equicontinuo,*
2. *K es puntualmente acotado en $\mathbb{R}^N$.*

Entonces K es relativamente compacto en $(C(X, \mathbb{R}^N), d_\infty)$.

Demostración. Que K sea puntualmente acotado, nos dice que el conjunto $K(x)$ es acotado en $\mathbb{R}^N$, luego su cerradura es un cerrado y acotado en $\mathbb{R}^N$. Esto es otra forma de decir que $K(x)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}^N$. ■

Corolario 1.46. *Sea $(f_n) \subseteq C(X, \mathbb{R}^N)$ una sucesión equicontinua y puntualmente acotada. Entonces existe $f \in C(X, \mathbb{R}^N)$ y una subsucesión f_{n_k} tal que $f_{n_k} \to f$ en la métrica uniforme.*

Demostración. Basta tomar $K = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Corolario 1.47. *Consideremos una sucesión $f_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tal que f_n es diferenciable con derivada continua, y que además satisface*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(0)| \leq R,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n'(x)\right| \leq M.$$

Entonces existe $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ y una subsucesión tal que $f_{n_k} \to f$ uniformemente.

Demostración. Sea $x \in [0,1]$, entonces

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(0)| + |f_n(0)| \leq \left|f_n'(c)\right| |x| + M \leq R\,|x| + M \leq R + M,$$

es decir $\{f_n\}$ es puntualmente acotado (de hecho es uniformemente acotado).

Para demostrar que f_n es equicontinua, notemos que como f_n es diferenciable, se tiene que dados $x, y \in [0,1]$ entonces existe $c \in [x,y]$

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left|f_n'(c)\right| |x-y| \leq M\,|x-y|\,,$$

por lo tanto si $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ y si $|x-y| < \delta$, entonces

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

que es la equicontinuidad de la sucesión (f_n). ∎

Antes de ver el siguiente ejemplo, veamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales

Lema 1.48 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean $f, g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $-\infty \leq a < b \leq \infty$, entonces*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Para $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (t\,|f(x)| + |g(x)|)^2\,\mathrm{d}x \\ &= t^2 \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + 2t \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

esto implica que si

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ B &= \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \\ C &= \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

entonces el polinomio cuadrático $p(t) = At^2 + 2Bt + C$ satisface $p(t) \geq 0$, luego el discriminante debe ser no-positivo, es decir $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, en otras palabras

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

∎

Ejemplo 1.25. Sea $(f_n) \subseteq C^1([0,1],\mathbb{R})$ una sucesión tal que

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \left|f_n'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Entonces (f_n) es equicontinua en $C([0,1],\mathbb{R})$. En efecto, si $x<y$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f_n(x)-f_n(y)| = \left|\int_x^y f_n'(t)\mathrm{d}t\right| \le \left(\int_x^y \left|f_n'(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y |1|\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{M}\,|x-y|^{\frac{1}{2}},$$

de donde si $\delta = \frac{\varepsilon^2}{M}$ y si $|x-y|<\delta$, entonces

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon.$$

Ejemplo 1.26. Un tipo de aplicación del Teorema de Arzelà-Ascoli que se usa mucho en análisis es la siguiente. Sea $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ una función continua. Consideremos el funcional

$$\begin{aligned} I : C^1([0,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \textstyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left|u'(x)\right|^2 + V(u(x))\right)\mathrm{d}x \end{aligned}.$$

Un problema clásico del cálculo de variaciones es el siguiente: Dado Γ subconjunto de $C^1([0,1],\mathbb{R})$, ¿es posible encontrar $g\in\Gamma$ tal que

$$I(g) = \inf_{u\in\Gamma} I(u)?$$

Para $M\in\mathbb{R}$, sea $\Gamma_M = \left\{f\in C^1([0,1],\mathbb{R}) : \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\le M\right\}$. Veamos que I tiene un mínimo en Γ_M. De la definición de ínfimo, tenemos que existe una sucesión $u_n\in\Gamma$ tales que

$$I(u_n) < \inf_{u\in\Gamma} I(u) + \frac{1}{n}.$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left|u_n'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \le \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left|u_n'(x)\right|^2 + V(u_n(x))\right)\mathrm{d}x \le I(u_n) < \inf_{u\in\Gamma} I(u) + \frac{1}{n},$$

tomando $u(x)=0$ tenemos que $\inf_{u\in\Gamma} I(u)\le V(0)$, y como $\frac{1}{n}\le 1$ para todo n tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left|u_n'(x)\right|^2 \mathrm{d}x V(0)+1, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

en particular

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \left|u_n'(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

Por el ejemplo anterior concluimos que (u_n) es equicontinua. Además como $\{u_n(x)\}$ es acotado para todo $x\in[0,1]$, debe existir una subsucesión (u_{n_k}) y una función $\bar{u}\in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que

$$u_{n_k}\to\bar{u} \quad \text{uniformemente.}$$

Con un poco mas de trabajo (que no veremos en este curso) se puede demostrar que

$$I(u_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(\bar{u}),$$

luego, como $I(u_n)\longrightarrow_{n\to\infty} \inf_{u\in\Gamma} I(u)$ concluimos que

$$I(\bar{u}) = \inf_{u\in\Gamma} I(u).$$

1.6. El Teorema de Stone-Weierstrass

Este teorema nos da condiciones para que un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$, para X compacto, sea denso, es decir, nos da un criterio para aproximar funciones continuas mediante cierta *clase particular* de funciones continuas.

Antes de enunciar el teorema, notemos que dado un espacio métrico (X, d), entonces el conjunto $C(X, \mathbb{R})$ tiene estructura de espacio vectorial, es decir se satisface

$$f, g \in C(X, \mathbb{R}) \text{ y } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow af + bg \in C(X, \mathbb{R}).$$

Además tenemos la operación de multiplicación entre funciones, que también resulta ser continua, es decir

$$f, g \in C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow f \cdot g \in C(X, \mathbb{R}).$$

Más aún, tenemos la siguiente

Proposición 1.49. *Dado (X, d) un espacio métrico. Entonces $C(X, \mathbb{R})$ es un álgebra (sobre $\mathbb{R}$), es decir, es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) que además tiene una operación de multiplicación que es compatible con la estructura de espacio vectorial. Esto es*

$$(af) \cdot (bg) = (ab)(f \cdot g)$$
$$f \cdot (ag + bh) = af \cdot g + bf \cdot h,$$

para todos $f, g, h \in C(X, \mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ejercicio. ∎

Observación 1.24. Similarmente se tiene que $C(X, \mathbb{C})$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 1.50. *Las operaciones $+, \cdot : C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$, así como la multiplicación por escalar son continuas.*

Demostración. Solo veremos que $\cdot$ es continua, la suma se deja como ejercicio.

Basta demostrar que si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente, entonces $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente. Para ello notemos que dado $\varepsilon > 0$, y si n es suficientemente grande, se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$. Además, como las sucesiones (f_n) y (g_n) son convergentes, tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad |f(x)| \leq M$$
$$|g_n(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M,$$

para todo $x \in X$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x))| \\ &\leq |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$d_\infty(f_n \cdot g_n, f \cdot f) \leq 2M\varepsilon,$$

lo que demuestra la convergencia. ■

Definición 1.32. *Decimos que $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ es separante, si dado $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces existe $f \in A$ tal que*

$$f(x) \neq f(y).$$

Decimos que $\mathcal{A}$ es totalmente separante si para todo $x \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$.

Observación 1.25. Una manera fácil de verificar que un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ es totalmente separante, es que las funciones constantes pertenezcan a $\mathcal{A}$.

Teorema 1.51 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ una subálgebra separante. Entonces solo una de las siguientes afirmaciones es cierta*

1. *$\mathcal{A}$ es denso.*
2. *Existe $x_0 \in X$ tal que $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$.*

Observación 1.26. El teorema sigue siendo cierto si se reemplaza (X, d) por cualquier espacio topológico compacto $(X, \mathcal{T})$.

Observación 1.27. Las alternativas del teorema ocurren en los siguientes casos

1. $\mathcal{A}$ es separante y totalmente separante, entonces $\mathcal{A}$ es denso.
2. $\mathcal{A}$ es separante, pero no totalmente separante, entonces existe $x_0 \in X$ tal que

   $$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$$

   es denso.

Dividiremos la demostración de este teorema en varios lemas. En lo que sigue, el espacio (X, d) es un espacio métrico compacto (aunque no es necesaria como hipótesis en algunos de los lemas).

Lema 1.52. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra en $C(X, \mathbb{R})$, entonces $\overline{\mathcal{A}}$ también es un álgebra.*

Demostración. Basta ver que $\overline{\mathcal{A}}$ es cerrado bajo las operaciones $+, \cdot$ y multiplicación por escalares, pero solo veremos que es cerrado bajo $\cdot$, las otras se dejan como ejercicio.

Sean $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, debemos probar que $f \cdot g \in \overline{\mathcal{A}}$. Como $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces existen sucesiones $f_n, g_n \in \mathcal{A}$, tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en la métrica d_∞.

Pero la multiplicación es una operación continua, luego obtenemos que $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$, y como $\mathcal{A}$ es un álgebra, se debe tener que $f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}$, luego lo anterior demuestra que $f \cdot g \in \overline{\mathcal{A}}$. ■

Lema 1.53. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra en $C(X, \mathbb{R})$, y si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces*

$$m(x) := \min\{f(x), g(x)\} \in \overline{\mathcal{A}}$$
$$M(x) := \max\{f(x), g(x)\} \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Para demostrar este lema, utilizaremos un resultado de cálculo que se deja como ejercicio

Lema 1.54. *Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $s(t) = \sqrt{t+\varepsilon^2}$. Entonces la suma de Taylor en torno a $t_0 = \frac{1}{2}$*

$$S_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{s^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(t - \frac{1}{2}\right)^k$$

converge uniformemente en $[0,1]$ a $s(t)$ cuando $N \to \infty$.

Demostración del Lema 1.53. Notar que

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right) \\ M(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right), \end{aligned}$$

luego basta demostrar que si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Supongamos que $f \not\equiv 0$, como X es compacto podemos definir

$$M = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| > 0,$$

entonces $g(x) = \frac{1}{M} f(x) \in \overline{\mathcal{A}}$ y $\|g\|_\infty \leq 1$. Usando el Lema 1.54 tenemos que existe un polinomio $P(t)$ tal que

$$\left|P(z^2) - \sqrt{z^2+\varepsilon^2}\right| \leq \varepsilon \quad \forall\, z \in [-1,1],$$

Notar que para $z = 0$ tenemos que $|P(0)| \leq 2\varepsilon$ y definamos $Q(\cdot) = P(\cdot) - P(0)$, luego, para cada $z \in [-1,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left|Q(z^2) - |z|\right| &= \left|P(z^2) - P(0) - |z|\right| \\ &\leq |P(0)| + \left|P(z^2) - \sqrt{z^2+\varepsilon^2}\right| + \left|\sqrt{z^2+\varepsilon^2} - |z|\right| \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

en particular para $z = g(x) \in [-1,1]$ tenemos que

$$\left|Q(g(x)^2) - |g(x)|\right| \leq 4\varepsilon \quad \forall\, x \in K,$$

y como $Q \circ g^2 \in \overline{\mathcal{A}}$ tenemos que $|g| \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$.

■

Lema 1.55. *Sea $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ una subálgebra. Entonces si $f \in C(X,\mathbb{R})$ es tal que para todo par de puntos $p, q \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $g_{p,q} \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\begin{aligned} |f(p) - g_{p,q}(p)| &< \varepsilon \\ |f(q) - g_{p,q}(q)| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

entonces $f \in \overline{\mathcal{A}}$.

Demostración. Sea $f \in C(X,\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, demostraremos que existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que $d_\infty(f,g) \leq \varepsilon$. Por hipótesis tenemos dados $p, q \in K$, existe $g_{p,q} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{aligned} |f(p) - g_{p,q}(p)| &< \varepsilon \\ |f(q) - g_{p,q}(q)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Definamos

$$U_{p,q} = \{x \in X : g_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$
$$V_{p,q} = \{x \in X : g_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon\},$$

que son abiertos en X pues f y $g_{p,q}$ son continuas. Fijemos $q \in X$, luego tenemos que

$$X = \bigcup_{p \in X} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in X} U_{p,q},$$

luego de la compacidad de K tenemos que existen $p_1, \ldots, p_N \in X$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_{p_i,q}.$$

Para cada $q \in X$, definamos

$$g_q(x) = \min_{i=1,\ldots,N} g_{p_i,q}(x)$$

y notemos que por el lema anterior $g_q \in \overline{\mathcal{A}}$; además, para cada $x \in X$, existe p_i tal que $x \in U_{p_i,q}$, luego

$$g_q(x) \leq g_{p_i,q}(x) < f(x) + \varepsilon,$$

es decir

$$g_q(x) \leq f(x) + \varepsilon \quad \forall\, x \in X. \tag{1.5}$$

Sea ahora $V_q = V_{p_1,q} \cap \ldots \cap V_{p_N,q}$, por hipótesis tenemos que $q \in V_q$ pues $f(q) - g_{p,q}(q) < \varepsilon$; y en general usando la definición de $V_{p,q}$, obtenemos que si $x \in V_q$ entonces

$$g_q(x) = \min_{i=1,\ldots,N} g_{p_i,q}(x) \geq f(x) - \varepsilon \tag{1.6}$$

Por otra parte V_q es una intersección finita de abiertos, por lo que también es abierto. Luego deben existir $q_1, \ldots, q_M \in K$ tales que

$$X = \bigcup_{q \in X} \{q\} \subseteq \bigcup_{q \in K} V_q = \bigcup_{j=1}^{M} V_{q_j}.$$

Definamos

$$g(x) = \max_{j=1,\ldots,M} g_{q_j}(x),$$

notemos que $g \in \overline{\mathcal{A}}$ y que si $x \in X$, entonces, de (1.5) obtenemos que

$$g_{q_j}(x) \leq f(x) + \varepsilon,$$

luego

$$g(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

y (1.6) nos dice que

$$g(x) = \max_{j=1,\ldots,M} g_{q_j}(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

En otras palabras, hemos demostrado que

$$-\varepsilon \leq f(x) - g(x) \leq \varepsilon, \quad \forall\, x \in X$$

es decir, $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. ■

Demostración del Teorema 1.51.
$\mathcal{A}$ es separante y totalmente separante: En virtud del lema anterior, basta demostrar que si $f \in C(X\mathbb{R})$, y si $p, q \in X$ son puntos arbitrarios, entonces existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$f(p) = g(p)$$
$$f(q) = g(q).$$

Como $\mathcal{A}$ es totalmente separante, debe existir $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(p) \neq 0$ y $h \in \mathcal{A}$ tal que $h(p) \neq h(q)$. Notar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $r = g + \alpha h \in \mathcal{A}$, luego podemos escoger α tal que

$$r(p) \neq 0, \;\; r(q) \neq 0 \text{ y } r(p) \neq r(q).$$

Finalmente, sea $g(x) = \beta r(x) + \gamma r(x)^2 \in \mathcal{A}$, donde $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son tales que

$$g(p) = f(p) \text{ y } g(q) = f(q),$$

esto se puede lograr pues el sistema

$$\beta r(p) + \gamma r(p)^2 = f(p)$$
$$\beta r(q) + \gamma r(q)^2 = f(q),$$

tiene una única solución si y solo si

$$\det \begin{pmatrix} r(p) & r(p)^2 \\ r(q) & r(q)^2 \end{pmatrix} = r(p)r(q)\left(r(p) - r(q)\right) \neq 0,$$

lo que es cierto por construcción.

$\mathcal{A}$ es separante, pero no totalmente separante: En este caso debe existir $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathcal{A}$. Sea

$$\mathcal{A}_0 = \{f + \alpha : f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Notar que $\mathcal{A}_0$ es un álgebra que es totalmente separante (ejercicio). Por la parte anterior, tenemos que $\mathcal{A}_0$ es denso en $C(k, \mathbb{R})$.

Veamos que si $f \in C(X, \mathbb{R})$ es tal que $f(x_0) = 0$, entonces $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\mathcal{A}_0$ es denso, tenemos que debe existir $g \in \mathcal{A}_0$ tal que

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X.$$

Pero $g \in \mathcal{A}_0$ si y solo si existen $h \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $g(x) = h(x) + \alpha$, luego para x_0 tenemos que

$$|\alpha| = |\alpha + h(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

de donde obtenemos que $|\alpha| < \varepsilon$. Por lo tanto, si $x \in X$

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - h(x) - \alpha| + |\alpha| = |f(x) - g(x)| + |\alpha| < \varepsilon + \varepsilon.$$

Esto prueba que

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}.$$

■

Corolario 1.56. *El conjunto $\mathcal{P}$ de polinomios sobre $[0, 1]$ es denso en $C([0, 1], \mathbb{R})$.*

Demostración. Basta notar que $\mathcal{P}$ es un álgebra que contiene a las funciones constantes, luego es totalmente separante. ∎

Corolario 1.57. *Toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es 2π-periódica puede aproximarse uniformemente por una sucesión de polinomios trigonométricos, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ y constantes $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, N$ tales que*

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Ejercicio. Ver Ejercicio 1.78. ∎

1.7. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Considere $X = \mathbb{R}^2$ y la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \exists\, k \in \mathbb{R} \quad (x_1, y_1) = (kx_2, ky_2), \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} & \text{si no existe tal } k. \end{cases}$$

Demuestre que d define una métrica sobre $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1.2. Demuestre que

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

define una métrica sobre $C[0, 1]$.

Ejercicio 1.3. Demuestre que si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos, entonces

1. $$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

   define una métrica sobre el producto $X_1 \times X_2$.

2. Muestre que

   $$d_p((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt[p]{d_1(x_1, y_1)^p + d_2(x_2, y_2)^p}$$

   define una métrica sobre $X_1 \times X_2$ para cada $p \geq 1$. Para ello:

   a) Dados $x, y > 0$ y $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces, usando que $f(t) = -\ln t$ es convexa muestre que

   $$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

   b) Pruebe la desigualdad de Hölder: Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

   $$\sum_{i=1}^{2} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   c) Pruebe la desigualdad de Minkowski

   $$\left(\sum_{i=1}^{2} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{2} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Generalice lo anterior para mostrar que si se tienen N espacios métricos $(X_i, d_i)_{i=1}^N$ entonces

$$D(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una métrica sobre $\prod_{i=1}^N X_i$.

Ejercicio 1.4. Para p primo, definimos $D_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ como

$$D_p(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ p^{-k} & \text{si } p^k \text{ divide a } |x-y| \text{ y } p^{k+1} \text{ no divide a } |x-y|. \end{cases}$$

Muestre que D_p define una métrica sobre $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.5. Considere las métricas d_∞ y d_p sobre $\mathbb{R}^N$. Muestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$d_\infty(x,y) = \lim_{p \to \infty} d_p(x,y).$$

Ejercicio 1.6. Si d es una métrica sobre X.

1. Demuestre que
$$\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$$
también es una métrica sobre X. Notar que bajo esta nueva métrica, todos los puntos están a distancia menor a 1.

2. En general, muestre que si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función de clase C^2 que satisface $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, y $f''(x) \leq 0$, entonces
$$d_f(x,y) = f(d(x,y))$$
define una métrica sobre X. *Ayuda: Muestre primero que $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ para todo $a, b \geq 0$.*

Ejercicio 1.7. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos. Definimos la métrica de Fréchet en $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ como
$$\tilde{d}((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$
Demuestre que $\tilde{d}$ define una métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Ejercicio 1.8. Muestre que si $A \subseteq (X,d)$, entonces

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) = 0.$$

Ejercicio 1.9.

1. Demuestre que la bola cerrada definida como $\overline{B}_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ es un cerrado en la topología.

2. Verifique además que si $x \in X$, entonces el singleton $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

3. Verifique que no es necesariamente cierto que $\overline{B}_d(x,r) = \overline{B_d(x,r)}$. *Ayuda: Considere $X = \{0,1\}$ con la métrica discreta.*

4. Muestre que si la métrica viene de una norma, i.e., $d(x,y) = \|x-y\|$ entonces $\overline{B}_d(x,r) = \overline{B_d(x,r)}$.

Ejercicio 1.10. Muestre que si X es equipado con la métrica discreta y $A \subseteq X$ es un subconjunto cualquiera, entonces A es abierto.

Ejercicio 1.11. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Muestre que

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n),$$

donde $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son intervalos disjuntos.

Ejercicio 1.12. Considere $\mathbb{R}^2$ equipado con la métrica euclideana $d_2(x,y)$.

1. Muestre que el conjunto $E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado.
2. En general, muestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado.
3. Sea $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Muestre que $d(E, Gr(f)) = 0$.

Ejercicio 1.13. Muestre que toda sucesión convergente en un espacio métrico debe ser acotada.

Ejercicio 1.14. Utilizando la métrica acotada (ver la métrica $\tilde{d}$ definida en el Ejercicio 1.6) en $\mathbb{R}$ construya una sucesión que no tiene ninguna subsucesión convergente. Notar que bajo esta métrica $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado.

Ejercicio 1.15. Sea (X,d) un espacio métrico. Muestre que para cada $y \in X$ fijo, la función $x \mapsto d(x,y)$ es continua.

Ejercicio 1.16. Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función continua, y $E \subseteq X$ un conjunto. Muestre que $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. Además, construya un ejemplo de una función continua y un conjunto tal que la inclusión es estricta.

Ejercicio 1.17. Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función continua. Muestre que para todo $y \in Y$ el conjunto $\{x : f(x) = y\}$ es cerrado.

Ejercicio 1.18. Demuestre la continuidad de la función $u(x)$ definida en la demostración del Teorema 1.6. *Ayuda: Recuerde que demostramos en clase que dado $B \subseteq X$ entonces $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$, luego la función $h(x) := d(x,B)$ es continua.*

Ejercicio 1.19. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos.

1. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Demuestre que $f \equiv g$ si y solo si existe un subconjunto $D \subset X$ que es denso tal que $f\big|_D \equiv g\big|_D$. *Ayuda: Considere el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$.*
2. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto denso, y $f : A \to Y$ una función uniformemente continua. Muestre que existe una única función continua $F : X \to Y$ tal que $F\big|_A = f$.
3. Muestre que existe una función continua $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que no se puede extender de manera continua a una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ están equipados con la métrica $d(x,y) = |x-y|$

Ejercicio 1.20. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M < \infty.$$

Muestre que f es uniformemente continua.

Ejercicio 1.21. Construya un ejemplo de dos funciones uniformemente continuas $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ tales que $f \cdot g$ no es uniformemente continua.

Ejercicio 1.22. Equipe $\mathbb{Z}$ con la métrica del valor absoluto, y sea Y un espacio métrico cualquiera. Muestre que si $f : \mathbb{Z} \to Y$ es continua, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 1.23. Demuestre que una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es uniformemente continua si y solo si dadas dos sucesiones $(x_n), (x'_n)$ en X tales que $d_X(x_n, x'_n) \to 0$ entonces $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$.

Ejercicio 1.24. Sea (X, d) un espacio métrico. Considere la métrica acotada $d_A = \dfrac{d}{1+d}$. Muestre que la función identidad $id : (X, d) \to (X, d_A)$ es continua y que la inversa también es continua.

Ejercicio 1.25. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d). Muestre que existe $R > 0$ y $x_0 \in X$ tal que

$$x_n \in B(x_0, R) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esto quiere decir que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Ejercicio 1.26. Considere una sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ en un espacio métrico (X, d). Suponga que existe una sub-sucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} x$. Muestre que $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} x$.

Ejercicio 1.27. Dada una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d). Definamos $\varepsilon_n = d(x_n, x_{n+1})$.

1. Muestre que si $m > n$ entonces
$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j \leq \sum_{j\geq n} \varepsilon_j.$$

2. Concluya que si
$$\sum_{j\geq n} \varepsilon_j < \infty$$
entonces (x_n) es Cauchy.

3. Verifique que si $x_n \to x$ entonces
$$d(x_n, x) \leq \sum_{j\geq n} \varepsilon_j.$$

Ejercicio 1.28. Sea X un espacio equipado con métricas que satisfacen $C_1 d_1 \leq d_2 \leq C_2 d_1$ para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$. Demuestre que (X, d_1) es completo si y solo si (X, d_2) es completo.

Ejercicio 1.29. Demuestre que el producto de dos espacios métricos completos (X, d_X), (Y, d_Y) es completo bajo las métricas $d_\infty = \text{máx}\{d_X, d_Y\}$ y $d_2 = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}$.

Ejercicio 1.30. Construya un ejemplo de una función continua $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y una sucesión de Cauchy (x_n) tal que $(f(x_n))$ no es de Cauchy.

Ejercicio 1.31. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $A \subseteq X$. Demuestre que $(A, d\big|_{A\times A})$ es completo si y solo si A es cerrado en X.

Ejercicio 1.32. Demuestre que (X, d) es un espacio métrico completo si y solo si toda sucesión (x_n) que satisface $\sum d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ es convergente.

Para demostrar esto se sugiere demostrar primero:

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \infty.$$
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$, entonces $x_n \to x$.

Ejercicio 1.33. Usando $\mathbb{R}$ como espacio ambiente.

1. Construya una sucesión de conjuntos encajonados no vacíos y distintos cuya intersección es vacía.
2. Construya una sucesión de conjuntos encajonados, cerrados y acotados cuya intersección es vacía.

Ejercicio 1.34. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$ un subconjunto denso tal que toda sucesión de Cauchy en A converge en X. Muestre que X es completo.

Ejercicio 1.35. Muestre que el espacio $(C([0,1],\mathbb{R}), d_1)$, donde
$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x,$$
no es completo. *Ayuda: Construya una sucesión de funciones continuas que se aproxime a la función $F(x)$ definida como $F(x) = 0$ si $0 \le x \le \frac{1}{2}$ y $F(x) = 1$ si $\frac{1}{2} < x \le 1$.*

Ejercicio 1.36. Considere $(C^1([0,1],\mathbb{R}), d_{C^1})$, el espacio de las funciones de clase C^1 equipado con la métrica
$$d_{C^1}(f,g) = d_\infty(f,g) + d_\infty(f', g').$$
Verifique que este es un espacio métrico completo.

Ejercicio 1.37. Sean (X_n, d_n) una cantidad numerable de espacios métricos. En $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ recordemos métrica de Fréchet
$$d((x_n),(x_n')) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, x_n')}{d_n(x_n, x_n') + 1}.$$

1. Demuestre que una sucesión $((x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ en X converge a $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ si y solo si
$$x_{n,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$
(Esto muestra que la topología definida por d en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ coincide con la topología producto).
2. Demuestre que (X, d) es completo si y solo si (X_n, d_n) es completo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.38 (Completación de espacios métricos). Suponga que (X, d) es un espacio métrico. Usando el siguiente procedimiento demuestre que existe un espacio métrico completo $(\bar{X}, \bar{d})$ y una isometría $\varphi : X \to \bar{X}$ tal que $\varphi(X)$ es denso en $\bar{X}$.

1. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de sucesiones de Cauchy en X. Para $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$ muestre que
$$d_{\mathcal{C}}((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$
existe. Muestre además que $d_{\mathcal{C}}$ satisface la simetría y la desigualdad triangular. Muestre sin embargo que si $d_{\mathcal{C}}((x_n),(y_n)) = 0$ entonces no es necesario que $(x_n) = (y_n)$.

2. Dados $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$, defina la relación
$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$
Muestre que $\sim$ define una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$.

3. Verifique que si $(x_n) \sim (x'_n)$ y $(y_n) \sim (y'_n)$ entonces $d_{\mathcal{C}}((x_n),(y_n)) = d_{\mathcal{C}}((x'_n),(y'_n))$.

4. Defina
$$\bar{X} = \mathcal{C}/\sim = \{c : c = [(x_n)] \text{ para } (x_n) \in \mathcal{C}\},$$
el conjunto de las clases de equivalencia en $\mathcal{C}$. Defina para $c_1 = [(x_n)]$ y $c_2 = [(y_n)]$ la función
$$\bar{d}(c_1, c_2) = d_{\mathcal{C}}((x_n),(y_n)),$$
y vea que $\bar{d}$ define una métrica sobre $\bar{X}$.

5. Defina $\varphi : X \to \bar{X}$ como $\varphi(x) = [(x)]$, la clase de equivalencia de la sucesión constante $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que φ es una isometría, y que $\varphi(X)$ es denso en $\bar{X}$.

6. Muestre que $(\bar{X}, \bar{d})$ es completo. *Ayuda: Use el Ejercicio 1.34 para notar que basta tomar sucesiones de Cauchy en $\varphi(X)$.*

Ejercicio 1.39. Sea $X = [1,\infty)$ equipado con la métrica del valor absoluto. Muestre que la función $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ es una contracción. ¿Tiene algún punto fijo esta función?

Ejercicio 1.40. Utilice el Teorema de punto fijo de Banach para mostrar que existe una única solución en $[0,1]$ a la ecuación $\cos x = x$.

Ejercicio 1.41. Considere el sistema de ecuaciones en N variables dado por

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + b_i, \quad \text{para } i = 1,\ldots,N, \tag{1.7}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

1. Muestre que si $\mathbb{R}^N$ está equipado con la métrica
$$d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - y_i|$$
y si
$$\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \le \alpha < 1, \tag{1.8}$$
entonces (1.7) tiene una única solución.

2. ¿Cómo debería cambiar la condición (1.8) si en $\mathbb{R}^N$ se usa la métrica
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \;?$$

3. ¿Y si se usa la métrica

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ?$$

Ayuda: Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejercicio 1.42. Demuestre la siguiente generalización del Teorema de punto fijo de Banach: Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función cualquiera. Suponga que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que f^N $(f^N = f \circ f \circ \ldots \circ f)$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.

Ejercicio 1.43. Sea $X = C^1([0, 1], \|\cdot\|_{C^1})$. Muestre que existe $f \in X$ punto fijo del operador

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\mathrm{d}t,$$

deduzca la existencia de una única función g que satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} f'(x) = f(x - x^2), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Ayuda: Utilice el Ejercicio 1.42.

Ejercicio 1.44. Use el Ejercicio 1.42 para mostrar que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-x} = x$.

Ejercicio 1.45. Sean $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Suponga además que K es Lipschitz en la tercera variable, uniforme en las otras dos, es decir, existe $L > 0$ tal que

$$|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L\,|x - y| \quad \forall\, t, s \in [a, b], \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que la ecuación integral de Volterra, definida como

$$f(t) = F(t) + \int_a^t K(t, s, f(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b]$$

admite una única solución continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para ello

1. Muestre que la aplicación $T : (C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty) \to (C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ definida como

$$Tf(t) = F(t) + \int_a^t K(t, s, f(s))\mathrm{d}s$$

   es continua.

2. Muestre que T tiene un único punto fijo. Justifique claramente sus afirmaciones.

Hint: Utilice el Ejercicio 1.42.

Ejercicio 1.46. Muestre que la ecuación integral

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\frac{f(s)}{2} + t\right)\mathrm{d}s \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene una única solución $f \in C[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ejercicio 1.47.

1. Muestre un teorema de existencia y unicidad para la ecuación de Fredholm no homogénea de segundo tipo
$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \varphi(x),$$
donde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas. *Ayuda: Encuentre una condición sobre $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. En general, muestre la existencia y unicidad para
$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t,f(t))\mathrm{d}t + \varphi(x),$$
donde $K : [a,b] \times [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas, y K satisface una condición de Lipschitz en la tercera variable, uniforme en las otras dos, i.e.
$$\left|K(x,y,z) - K(x,y,z')\right| \leq L\left|z - z'\right| \quad \text{para todo } x,y,z,z' \in [a,b]$$

Ejercicio 1.48. Muestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y satisface que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene
$$\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0,$$
entonces
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Ejercicio 1.49. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface
$$(\star) \qquad \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in I}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = +\infty,$$
para todo intervalo $I \subset [0,1]$ (esto dice que f no satisface la condición de Lipschitz en ningún subintervalo de $[0,1]$).

Defina el conjunto de puntos en $[0,1]$ donde f no es diferenciable, es decir
$$Nd(f) = \{x \in [0,1] : f \text{ no es diferenciable en } x\}.$$

Queremos demostrar que $Nd(f)$ es denso en $[0,1]$. Para ello se sugiere el siguiente esquema:

1. Defina
$$G_n = \left\{x \in (0,1) : \sup_{x<y\leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} > n\right\}$$
y demuestre que es abierto en $[0,1]$.

2. Demuestre que G_n es denso en $[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. *Ayuda: Use $(\star)$ para mostrar que $G_n \cap J \neq \varnothing$ para cualquier subintervalo abierto de $[0,1]$.*

3. Demuestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subseteq Nd(f)$ y concluya.

Ejercicio 1.50. Considere el espacio métrico $(C[a,b], d_\infty)$ y considere el subconjunto M_k definido como
$$M_k = \{f \in C[a,b] : |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y| \text{ para todo } x,y \in [a,b]\}.$$

1. Muestre que M_k es cerrado.

2. Sea $D_k = \left\{ f \in C^1[a,b] : \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leq k \right\} \subseteq C[a,b]$. Muestre que $\overline{D_k} = M_k$.

3. Muestre que
$$M = \bigcup_{k \geq 0} M_k$$
no es cerrado.

4. Usando que el conjunto de polinomios en $[a,b]$ es denso en $C[a,b]$, demuestre que $\overline{M} = C[a,b]$.

Ejercicio 1.51. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable, y suponga que para cada $x \in [0,1]$ existe $n \in \mathbb{N}$ (que puede depender de x) tal que $f^{(n)}(x) = 0$. Muestre que f debe ser un polinomio. *Ayuda: Considere*
$$F_n = \left\{ x \in [0,1] : f^{(n)}(x) = 0 \right\}$$
y use el teorema de Baire apropiadamente.

Ejercicio 1.52. Sea K un compacto en (X,d) y $x_0 \in X$. Demuestre que existe $y_0 \in K$ tal que $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, y)$ para todo $y \in K$.

Ejercicio 1.53. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios isométricos. Demostrar que
$$X \text{ es totalmente acotado} \Leftrightarrow Y \text{ es totalmente acotado.}$$

Ejercicio 1.54. Muestre que si $A \subseteq (X,d)$ entonces
$$A \text{ totalmente acotado} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ totalmente acotado.}$$

Ejercicio 1.55. Sea (X,d) un espacio métrico.

1. Sea $K \subseteq X$ un compacto y $F \subseteq X$ un cerrado. Muestre que
$$d(K,F) > 0 \Leftrightarrow K \cap F = \varnothing.$$

2. Sean $K \subseteq X$ un compacto y $G \supseteq K$ un abierto. Muestre que existe un abierto $U \subseteq X$ tal que
$$K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G.$$
Ayuda: Use la parte anterior para construir un cubrimiento de K que esté contenido en G.

Ejercicio 1.56. Sea (X,d) un espacio métrico. Suponga que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ la bola cerrada
$$\overline{B}(x, \varepsilon)$$
es compacta. Demuestre que (X,d) es completo.

Ejercicio 1.57. Definamos
$$c_0 = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} : x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$
el conjunto de la sucesiones reales convergentes a 0. Observar que $c_0 \subseteq \ell^\infty$, luego podemos equiparlo con la métrica d_∞, es decir
$$d_\infty((x_n),(y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$
Demuestre que para cualquier $x = (x_n) \in c_0$ entonces que el conjunto
$$S_x = \{(y_n) \in c_0 : |y_n| \leq |x_n| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$
es compacto en c_0. Para ello:

1. Justifique que (ℓ^∞, d_∞) es completo y concluya que (S_x, d_∞) es completo.

2. Muestre que (S_x, d_∞) es totalmente acotado.

Ejercicio 1.58. Sea $\mathcal{P}_k$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a k en el intervalo $[0, 1]$.

1. Muestre que existe una constante $C_k > 0$, que solo depende de k, tal que si $p \in \mathcal{P}_k$ entonces

$$|p(0)| \leq C_k \int_0^1 |p(x)|\, \mathrm{d}x.$$

2. Concluya que las métricas

$$d_\infty(p, q) = \max_{x\in[0,1]} |p(x) - q(x)|$$

y

$$d_1(p, q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)|\, \mathrm{d}x$$

son equivalentes en $\mathcal{P}_k$.

Ejercicio 1.59. Considere el espacio

$$\ell^1 = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\},$$

equipado con la métrica

$$d_1((x_n), (\tilde{x}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - \tilde{x}_n|\,.$$

Un conjunto $K \subseteq \ell^1$ se dice *equisumable*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $(x_n) \in K$ entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \varepsilon.$$

Muestre que si K es acotado y equisumable entonces es totalmente acotado.

Ayuda: Use la equisumabilidad para construir un ε-recubrimiento de K a partir de un ε-recubrimiento de un conjunto acotado en $\mathbb{R}^{N_\varepsilon}$ definido de manera apropiada.

Ejercicio 1.60. Construya un ejemplo de una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ continuas que convergen monótonamente a una función continua f, pero donde la convergencia no es uniforme.

Ayuda: El conjunto X no puede ser compacto.

Ejercicio 1.61.

1. Sea K un conjunto compacto en (X, d) muestre que K debe ser cerrado y que satisface $\delta(K) < \infty$ (i.e. K es acotado).

2. Construya un ejemplo de un cerrado y acotado en un espacio métrico (X, d) que no es compacto. *Ayuda: Considere el espacio $\ell^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\}$ con la métrica*

$$d_2((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^2}.$$

Ejercicio 1.62. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y $f : X \to X$ una función que satisface

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Muestre que f tiene un único punto fijo $\bar{x} \in X$. Además muestre dado cualquier $x_0 \in X$ entonces

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0).$$

Ejercicio 1.63. Sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(t) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n(t - n^2)}{n+1}\right)$. Muestre que la sucesión (f_n) posee un subsucesión que converge uniformemente.

Ejercicio 1.64. Suponga que f es una función definida sobre el intervalo $[0, 1]$. Defina la función Tf como

$$Tf(y) = y \int_0^1 \frac{f(xy)}{5 + x^3}\, dx.$$

1. Demuestre que si $f \in C([0, 1])$ entonces $Tf \in C([0, 1])$.
2. Suponga que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C([0, 1])$ que es uniformemente acotada. Demuestre que existe una subsucesión de $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente.

Ejercicio 1.65. Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico, y $h, h_n \in C(X, Y)$ tales que $h_n(x) \to h(x)$ para todo $x \in X$. Suponga que existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$d_Y(h_{n+m}(x), h(x)) \leq k d_Y(h_n(x), h(x)), \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $h_n \to h$ uniformemente. *Ayuda: Dado $\varepsilon > 0$, considere los conjuntos*

$$A_n = \left\{x \in X : d(h_n(x), h(x)) < \frac{\varepsilon}{k}\right\}.$$

Ejercicio 1.66. Sea $(f_n) \subseteq C(X, Y)$ una sucesión de funciones continuas y $f \in C(X, Y)$ tales que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente.}$$

Muestre que el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.

Ejercicio 1.67. Sea sucesión de funciones continuas (f_n) sobre $[0, 1]$ que son uniformemente Lipschitz, i.e., existe $L > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in [0, 1], \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que si existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $(f_n(x_0))$ es acotada, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge uniformemente a una función continua f que tiene la misma constante Lipschitz L, i.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in [0, 1].$$

Ejercicio 1.68. Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto. Muestre que el conjunto de las funciones Lipschitz continuas es denso en $C(X, \mathbb{R})$ bajo la métrica uniforme.

Ejercicio 1.69. Sea $f \in C([0, 2], \mathbb{R})$ y definamos $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ para $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite puntual de la sucesión $(f_n(x))$ para $x \in [0, 1]$. ¿Es equicontinua la sucesión (f_n)?

Ejercicio 1.70. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Muestre que para cada $x \in X$, la función

$$\begin{aligned} \delta_x : C(X,Y) &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto \delta_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

es continua. *Recuerde que en $C(X,Y)$ se utiliza la métrica uniforme.*

Ejercicio 1.71. Sea $M \in C([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$ y definamos función $T : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ dada por

$$Tf(x) = \int_0^1 M(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Muestre que T está bien definida, es continua, y

$$K = \left\{ Tf : \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1 \right\}$$

es relativamente compacto en $(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$.

Ejercicio 1.72. Dado un espacio métrico (X, d), una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice Hölder continua de exponente $\alpha > 0$ si

$$N_\alpha(f) = \sup_{x,y\in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty.$$

Suponga que $X = [0,1]$ con la métrica del valor absoluto.

1. Muestre que si $\alpha > 1$ y $N_\alpha(f) < \infty$, entonces f es constante.
2. Muestre que para $0 < \alpha \leq 1$ el conjunto

$$K = \left\{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1, N_\alpha(f) \leq 1 \right\}$$

   es compacto en $C([0,1],\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.73. Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico y si $\mathbb{R}$ se equipa con la métrica habitual, entonces para cada $f, g \in C(X,\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

1. $af + bg \in C(X,\mathbb{R})$.
2. $f \cdot g \in C(X,\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.74. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra separante. Muestre que

$$\mathcal{A}_0 = \{f + \alpha : f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

es un álgebra totalmente separante.

Ejercicio 1.75. Termine la demostración del Lema 1.52.

Ejercicio 1.76. Demuestre el Lema 1.54. Para ello escriba la fórmula del resto del polinomio de Taylor y vea que dicho resto tiende uniformemente a cero.

Ejercicio 1.77. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos compactos. Muestre que el álgebra generada por las funciones $h(x) = f(x)g(x)$, donde $f \in C(X, \mathbb{R})$ y $g \in C(Y, \mathbb{R})$, es densa en $C(X \times Y, \mathbb{R})$, donde en $X \times Y$ se utiliza la métrica

$$d_{X\times Y}((x, y), (x', y')) = \text{máx}\left\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\right\}.$$

Ejercicio 1.78. Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \operatorname{sen}(kx) + b_k \cos(kx) : a_k, b_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

es denso en

$$C_p([0, 2\pi], \mathbb{R}) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : f \text{ continua y } f(0) = f(2\pi)\}.$$

Ayuda: Note que $[0, 2\pi]$ *donde se identifican* 0 *y* 2π *es homomorfo a* $\mathbb{S}^1$*, el circulo unitario.*

Ejercicio 1.79. Decimos que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es *rectilínea a pedazos* si es que f es continua y existe un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq [0, 1]$ tal que la restricción de f a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es una recta.

Muestre que $\mathcal{A} = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ es rectilinea a pedazos}\}$ es denso en $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Ejercicio 1.80. Sea (K, d_K) un espacio métrico compacto e (Y, d_Y) un espacio métrico. Considere $h \in C(K, Y)$ y una sucesión $(h_n) \in C(K, Y)$ tales que $h_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} h(x)$ para todo $x \in K$ (convergencia puntual). Suponga ademas que existe una constante $L > 0$ tal que

$$(\star) \qquad d_Y(h_{n+k}(x), h(x)) \leq L d_Y(h_n(x), h(x)) \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in K.$$

Queremos demostrar que la condición $(\star)$ implica que la convergencia es uniforme. Para ello, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos los conjuntos

$$G_n = \left\{x \in K : d_Y(h_n(x), h(x)) < \frac{\varepsilon}{L}\right\}$$

1. Muestre que $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
2. Muestre que G_n es abierto en K para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Concluya que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$d_\infty(h_n, h) < \varepsilon.$$

Ejercicio 1.81. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface

$$\int_0^1 f(x)x^n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Muestre que $f \equiv 0$.

Capítulo 2

Introducción a los espacios de Banach

2.1. Conceptos preliminares

Definición 2.1 (Espacio vectorial)**.** *Un conjunto X se dice espacio vectorial (sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) si $(X, +)$ es un grupo Abeliano con una multiplicación por escalar compatible, es decir*

1. *$x, y \in X$ y $a, b \in \mathbb{K}$ entonces $ax + by \in X$.*
2. *$x \in X$ y $a, b \in \mathbb{K}$ entonces $(a + b)x = ax + bx$ y $(ab)x = a(bx) = b(ax)$.*
3. *$x, y \in X$ y $a \in \mathbb{K}$ entonces $a(x + y) = ax + ay$.*
4. *$x \in X$ y $1 \in \mathbb{K}$ el neutro multiplicativo, entonces $1x = x$*

En lo que sigue, siempre supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.2 (Norma)**.** *Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una norma sobre X es una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que*

1. *$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positividad).*
2. *$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ (Homogeneidad).*
3. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular).*

Observación 2.1. En cualquier espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ podemos definir una métrica *natural* mediante

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| .$$

Si no se menciona lo contrario, asumiremos que los espacios normados están equipados con la topología inducida por esta métrica.

Definición 2.3 (Espacio Banach)**.** *Decimos que un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, si $(X, d_{\|\cdot\|})$ es completo.*

Ejemplo 2.1. 1. Como vimos en el capítulo anterior, $\mathbb{R}^N$ equipado con la métrica euclidiana o la métrica del máximo es un espacio métrico completo. Usando el lenguaje de espacios vectoriales, tenemos que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ y $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

2. En general, vimos que todas las normas son equivalentes sobre $\mathbb{R}^N$, luego $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach para cualquier norma. En general se puede demostrar que cualquier espacio vectorial normado de dimensión *finita* es un espacio de Banach.

3. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ es un espacio vectorial normado, pero no es un espacio de Banach.

4. Si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ y $BC(X, Y)$ son espacios de Banach para la norma uniforme:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y .$$
En particular, si X es un compacto, entonces $C(X, Y)$ es un espacio de Banach.

5. Si X no es compacto, y $f \in C(X, Y)$ entonces
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$$
no tiene por que estar bien definida. Pensar por ejemplo en el caso $X = Y = \mathbb{R}$ y $f(x) = x$.

6. El espacio ℓ^∞, de las sucesiones reales acotados es un espacio de Banach para la norma
$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$
Esto es cierto pues $\ell^\infty = B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ y la norma $\|\cdot\|_\infty$ en este caso es exactamente la métrica uniforme.

Ejemplo 2.2 (Espacios ℓ^p). Para $p \geq 1$, el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$)
$$\ell^p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\},$$
equipado con la norma
$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p}$$
es un espacio de Banach.

Veamos esto en detalle. En primer lugar, demostremos que $\|\cdot\|_p$ es efectivamente una norma: Las primeras 2 condiciones son evidentes, por lo que solo nos preocuparemos de la desigualdad triangular. Para ello veamos las desigualdades de Young y de Hölder

Lema 2.1 (Desigualdad de Young). *Dados $x, y > 0$ y $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces*
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración. Notar que $f(x) = e^x$ es convexa (pues $f''(x) \geq 0$), luego para cada $t \in [0, 1]$ se tiene que
$$e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$
Apliquemos esto a $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$, $a = \ln(x^p)$ y $b = \ln(y^q)$, es decir
$$xy = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(y^q)} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$
■

Lema 2.2 (Desigualdad de Hölder en ℓ^p). *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales. Entonces para $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se tiene que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q .$$

Demostración. Veamos primero el caso $1 < p, q < \infty$. Sin perder generalidad $A := \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p < \infty$ y que $B := \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q < \infty$ (de lo contrario la desigualdad es trivial). Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir gracias a la desigualdad de Young que

$$\frac{|x_n|}{A} \cdot \frac{|y_n|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_n|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_n|^q}{A^q},$$

de donde sumando en la variable n obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|}{A} \cdot \frac{|y_n|}{B} &\leq \frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|y_n|^q}{B^q} \\
&\leq \frac{1}{pA^p}A^p + \frac{1}{qB^q}B^q \\
&= 1
\end{aligned}$$

es decir, tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq AB = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q .$$

El caso $p = 1$ y $q = \infty$ se deja como ejercicio.

∎

Finalmente podemos demostrar la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$:

Lema 2.3 (Desigualdad de Minkowski). *Sea $p > 1$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, entonces*

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$$

Demostración. El caso $p = 1$ es evidente gracias a la desigualdad triangular. Si $p > 1$, notamos que que

$$\begin{aligned}
|x_n + y_n|^p &= |x_n + y_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq (|x_n| + |y_n|) \, |x_n + y_n|^{p-1} \\
&= |x_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} + |y_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} ,
\end{aligned}$$

de donde sumando en la variable n obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} .$$

Sea $q = \frac{p}{p-1}$ entonces $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, luego podemos usar la desigualdad de Hölder y obtener que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} &\leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \left\| (|x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}} \right\|_q \\
\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} &\leq \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \left\| (|x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}} \right\|_q ,
\end{aligned}$$

pero

$$\left\|\left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_q=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(|x_n+y_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}=\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^{p-1}.$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p=\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n+y_n|^p\leq\left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p+\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p\right)\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^{p-1},$$

lo que demuestra el resultado. ∎

Veamos ahora que ℓ^p es un espacio de Banach

Proposición 2.4 (ℓ^p es un espacio de Banach). *Sea $1\leq p\leq\infty$, entonces $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. El caso $p=\infty$ se sigue del hecho que $\ell^\infty=B(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Para el caso $1\leq p<\infty$ usaremos la notación de función para elementos en ℓ^p, es decir, diremos que $x=(x(n))_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|x(n)|^p<\infty.$$

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p, es decir, dado $\varepsilon>0$ existe $K\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x_k-x_{\tilde{k}}\right\|_p<\varepsilon\quad\forall\, k,\tilde{k}\geq K.$$

Como para cada $n\in\mathbb{N}$ fijo podemos escribir,

$$\left|x_k(n)-x_{\tilde{k}}(n)\right|\leq\left\|x_k-x_{\tilde{k}}\right\|_p$$

la sucesión $(x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ es de Cauchy, luego de la completitud de $\mathbb{R}$ tenemos la existencia de $a_n\in\mathbb{R}$ tal que

$$|x_k(n)-a_n|\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Consideremos la sucesión $x(n)=a_n$, y veamos que $x\in\ell^p$ y que $x_k\longrightarrow_{k\to\infty}x$. En efecto, construyamos una subsucesión de x_k de la siguiente forma: de la convergencia $x_k(1)\longrightarrow_{k\to\infty}x(1)$ tenemos que existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k(1)-x(1)|<2^{-1}\quad\forall\, k\geq k_1.$$

De la convergencia de $x_k(1)\longrightarrow_{k\to\infty}x(1)$ y $x_k(2)\longrightarrow_{k\to\infty}x(2)$ tenemos que existe $k_2\geq k_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}|x_k(1)-x(1)|&<2^{-2}\quad\forall\, k\geq k_2\\|x_k(2)-x(2)|&<2^{-2}\quad\forall\, k\geq k_2.\end{aligned}$$

Siguiendo de esta forma para $n=3,4,\ldots$, podemos encontrar una sucesión $k_N\geq k_{N-1}\geq\ldots\geq k_1\in\mathbb{N}$ tales que

$$|x_k(n)-x(n)|<2^{-N}\quad\forall\, k\geq k_N\;\forall\, n\leq N,$$

en particular, tomando $k=k_N$, tenemos que

$$\left|x_{k_N}(n)-x(n)\right|<2^{-N}\quad\forall\, n\leq N.$$

Con esto en mente, y usando la desigualdad de Minkowski, notemos que para $N \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \left|x(n) - x_{k_N}(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} \left|x_{k_N}(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-pN}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} \left|x_{k_N}(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq N^{\frac{1}{p}} 2^{-N} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_{k_N}(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= N^{\frac{1}{p}} 2^{-N} + \left\|(x_{k_N})_{N\in\mathbb{N}}\right\|_p ,
\end{aligned}$$

pero recordando que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d) debe ser acotada, en particular, la sucesión $(x_{k_N})_{N\in\mathbb{N}}$ lo es (es una subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$), luego debe existir $R > 0$, independiente de N, tal que

$$\left\|x_{k_N}\right\|_p \leq R \quad \forall\, N \in \mathbb{N},$$

con lo que deducimos

$$\|x\|_p = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq R,$$

es decir, $x \in \ell^p$.

Veamos ahora que $x_k \longrightarrow_{k\to\infty} x$ para la norma $\|\cdot\|_p$. Sea $\varepsilon > 0$, como $x \in \ell^p$, tenemos que debe existir $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |x(n)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \quad \forall\, m \geq N_1.$$

Por otra parte, como x_k es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_{N_2}\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall\, k \geq N_2,$$

En particular, si tomamos $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que

$$\sum_{n=N_3}^{\infty} |x(n)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$$

$$\|x_k - x_{N_2}\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall\, k \geq N_3$$

Además, $x_{N_2} \in \ell^p$, luego debe existir $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_4+1}^{\infty} |x_{N_2}(n)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p,$$

y sin perder generalidad podemos suponer que $N_4 \geq N_3 \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Ahora, fijando N_4, y gracias a la convergencia puntual, tenemos que podemos escoger $K \in \mathbb{N}$ tal que $K \geq N_4$ y

$$|x_k(n) - x(n)|^p \leq \frac{1}{N_4}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \quad \forall\, n \leq N_4\ \forall\, k \geq K.$$

Con esto para $k \geq K$, y usando la desigualdad de Minkowski, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^{N_4}|x_k(n)-x(n)|^p + \sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N_4}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N_4}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_k(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N_4}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_k(n)-x_{N_2}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_{N_2}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N_4}|x_k(n)-x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_k(n)-x_{N_2}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x_{N_2}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=N_4+1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

Definición 2.4 (Series)**.** *Dada una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *en un espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *definimos la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Decimos que la serie S *es convergente si la sucesión definida por*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n \in X$$

es convergente, esto es, existe $S \in X$ *tal que* $\|S_k - S\| \longrightarrow_{k\to\infty} 0$.

Decimos que la series S *es absolutamente convergente si la sucesión de números reales*

$$r_k = \sum_{n=1}^{k} \|x_k\|$$

es convergente en $\mathbb{R}$.

Observación 2.2. Notar que gracias a la desigualdad triangular tenemos que si $N \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_n\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| ,$$

y por lo tanto si la serie es convergente, entonces

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| .$$

Ejemplo 2.3. Considerar $\mathbb{Q}$ como espacio vectorial sobre si mismo. La serie de números racionales

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{2^{3k+1}(k!)^2}$$

es absolutamente convergente ($S = \sqrt{2}$), pero no es convergente en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Ejemplo 2.4. Considerar $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre si mismo. La serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente (ver Corolario 2.8 mas adelante), pero no es absolutamente convergente ($\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$).

Sin embargo, se tiene que si una serie de números reales es absolutamente convergente, entonces es convergente. Esto es cierto pues $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.5. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Entonces X es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente en X es convergente.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es un espacio de Banach y supongamos que (x_n) define una serie absolutamente convergente. Es decir la sucesión

$$r_k = \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|$$

es convergente en $\mathbb{R}$. Veamos que la sucesión

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$$

es convergente en X. Para ello, como X es completo, basta ver que S_k es de Cauchy: Sea $k > m$, luego

$$\begin{aligned}
\|S_k - S_m\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=m+1}^{k} x_n \right\| \\
&\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|x_n\| \\
&= |r_k - r_m| ,
\end{aligned}$$

luego como (r_k) es convergente en $\mathbb{R}$, entonces es de Cauchy, luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|r_k - r_m| < \varepsilon$ si $k, m \geq M$. Por lo tanto

$$\|S_k - S_m\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } k, m \geq M,$$

es decir (S_k) es de Cauchy en X.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que toda serie absolutamente convergente es convergente, y demostremos que X debe ser completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X, veremos que (x_n) tiene una subsucesión convergente (recordar que vimos que esto basta para probar que (x_n) es convergente).

Observar que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x_n - x_{n_k}\right\| < 2^{-k}, \quad \text{para todo } n \geq n_k.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que $n_{k+1} > n_k$. Definamos entonces la sucesión siguiente

$$y_0 = x_{n_1},$$
$$y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Observar que por definición

$$x_{n_k} = \sum_{j=0}^{k-1} y_j,$$

luego, demostrar que $(x_{n_k})_k$ es convergente es equivalente a demostrar que $(\sum_{j=0}^{k-1} y_j)_k$ es convergente. Pero por hipótesis, bastaría demostrar que $(\sum_{j=0}^{k-1} \left\|y_j\right\|)_k$ es convergente. Pero esto es cierto pues

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left\|y_j\right\| = \|y_0\| + \sum_{j=1}^{k-1} \left\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right\| < \|y_0\| + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-j} < \|x_{n_1}\| + 1,$$

esto implica que $\sum_{j=0}^{k-1} \left\|y_j\right\|$ es una sucesión monótonamente creciente acotada superiormente, luego debe ser convergente. ■

Corolario 2.6 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach. Sea (f_n) una sucesión en $BC(X, Y)$. Si existe una sucesión (M_n) de números no-negativos tales que $\|f_n(x)\|_Y \leq M_n$ para todo $x \in X$ y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge absolutamente y uniformemente en $(BC(X, Y), d_\infty)$.

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 2.7 (Test de Abel, Dirichlet)**.** *Sea $(X\, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, (λ_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ y (x_n) una sucesión en X tales que*

1. *$\lambda_n \geq 0$ para todo n.*

2. *λ_n es monótona decreciente tal que $\lambda_n \to 0$.*

3. *La sucesión de sumas parciales*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$$

es acotada en X.

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

es convergente en X.

Demostración. Como X es Banach, basta demostrar que la sucesión de sumas parciales

$$y_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n$$

es de Cauchy en X. Sea $k > m$, entonces

$$\begin{aligned}
y_k - y_m &= \sum_{n=m+1}^{k} \lambda_n x_n \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} \lambda_n (S_n - S_{n-1}) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} \lambda_n S_n - \sum_{n=m+1}^{k} \lambda_n S_{n-1} \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} \lambda_n S_n - \sum_{n=m}^{k-1} \lambda_{n+1} S_n \\
&= \lambda_k S_k - \lambda_{m+1} S_m + \sum_{n=m+1}^{k-1} S_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}),
\end{aligned}$$

luego

$$\|y_k - y_m\| \leq |\lambda_k| \, \|S_k\| + |\lambda_{m+1}| \, \|S_m\| + \sum_{n=m+1}^{k-1} \|S_k\| \, |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \, ,$$

pero la sucesión (S_k) es acotada, luego existe $M > 0$ tal que $\|S_k\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde obtenemos que

$$\|y_k - y_m\| \leq M \left(|\lambda_k| + |\lambda_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{k-1} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \right),$$

pero λ_n es monótona decreciente de valores no-negativos, luego $|\lambda_n - \lambda_{n+1}| = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, de donde obtenemos que la suma final es una suma telescópica, es decir

$$\|y_k - y_m\| \leq M \left(\lambda_k + \lambda_{m+1} + \lambda_{m+1} - \lambda_k \right) = 2M\lambda_{m+1},$$

y como $\lambda_m \to 0$ tenemos que dado $\varepsilon >$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$

$$\|y_k - y_m\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } k > m \geq M.$$

■

Corolario 2.8 (Series alternantes)**.** *Si (a_n) es una sucesión de números reales tales que $a_n \geq 0$ y $a_n \to 0$, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

es convergente.

Demostración. Basta considerar $\lambda_n = a_n$ y $x_n = (-1)^n$. ■

Ejemplo 2.5. Para $\theta \in \mathbb{R}$ considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\theta).$$

Entonces la serie es convergente en $\mathbb{R}$.

Si $\theta = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces las sumas son idénticamente 0, por lo que supondremos que $\theta \neq 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Notar que $\lambda_n = \frac{1}{n}$ y que si $x_n = \operatorname{sen}(n\theta)$ entonces[1]

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} x_n &= \sum_{n=1}^{k} \operatorname{sen}(n\theta) \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{k} (e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}) \\
&= \frac{1}{2i} \left(e^{\theta i} \frac{1 - e^{k\theta i}}{1 - e^{\theta i}} - e^{-\theta i} \frac{1 - e^{-k\theta i}}{1 - e^{-\theta i}} \right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(k\theta) - \operatorname{sen}((k+1)\theta)}{2(1 - \cos\theta)}
\end{aligned}$$

que es acotado independiente de k.

2.2. Funciones lineales

Definición 2.5 (Funciones lineales)**.** *Dados dos espacios vectoriales X e Y sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que la función $L : X \to Y$ es lineal si $L(ax_1 + bx_2) = aL(x_1) + bL(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$ y todo $a, b \in \mathbb{K}$.*

Teorema 2.9 (Funciones lineales continuas)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|_X$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $L : X \to Y$ una función lineal. Son equivalentes*

1. *L es continua en 0.*
2. *Existe $M > 0$ tal que*
$$\|Lx\|_Y \leq M \|x\|_X .$$
3. *L es continua (en todas partes).*
4. *Si $\bar{B}_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ entonces $L(\bar{B}_X)$ es un conjunto acotado en Y.*

[1] Recordar la identidad de Euler para números complejos: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, luego

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Observación 2.3. Por esta proposición se suele decir que las funciones lineales continuas son funciones *acotadas*.

Demostración. (1)⇒(2): Si L es continua en 0 quiere decir que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Lx\|_Y < 1,$$

luego si $x \neq 0$, tenemos que

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

luego

$$1 > \left\| L\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right) \right\| = \frac{\delta}{2\|x\|_X} \|Lx\|_Y\,,$$

en otras palabras, para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$\|Lx\|_Y \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_X\,,$$

luego (2) se sigue para $M = \frac{2}{\delta}$.

(2)⇒(3): Notar que si se tiene (2), y si $x, \tilde{x} \in X$ entonces usando que L es lineal, obtenemos que

$$\|Lx - L\tilde{x}\|_Y = \|L(x - \tilde{x})\|_Y \leq M\|x - \tilde{x}\|_X\,,$$

es decir, L es Lipschitz, en particular es continua en todas partes.

(3)⇒(1): Evidente.

(2)⇒(4): Si $x \in \bar{B}_X$ entonces $\|Lx\| \leq M\|x\| \leq M$, por lo tanto $L(\bar{B}_X) \subseteq M\bar{B}_Y$.

(4)⇒(2): Si existe $M > 0$ tal que $L(\bar{B}_X) \subseteq M\bar{B}_Y$, entonces se cumple que

$$\|Lx\| \leq M, \quad \forall x \in \bar{B}_X.$$

Luego si $y \in X \setminus \{0\}$ entonces $x = \frac{y}{\|y\|} \in \bar{B}_X$, y por lo tanto

$$\left\| L\left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \leq M,$$

de donde se deduce (2) por la linealidad de L y la homogeneidad de la norma. ■

Definición 2.6. *Denotamos al conjunto de funciones lineales continuas de X a Y como $\mathcal{LC}(X, Y)$, el que se puede equipar de la norma*

$$\|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Lx\|_Y\,.$$

Lema 2.10. *Si $X \neq \{0\}$ entonces*

$$\begin{aligned} \|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Lx\|_Y \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X < 1}} \|Lx\|_Y \\ &= \inf\{C > 0 : \|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X\} \end{aligned}$$

Demostración. Ejercicio. ■

Observación 2.4. Notar que para cada $x \in X$ se tiene que

$$\|Lx\|_Y \leq \|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} \|x\|_X .$$

Proposición 2.11. *El conjunto* $(\mathcal{LC}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{LC}(X,Y)})$ *es un espacio vectorial normado.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.12. *Si* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *es Banach, entonces* $\mathcal{LC}(X,Y)$ *también es Banach.*

Demostración. Sea $(L_n) \subseteq \mathcal{LC}(X,Y)$ una sucesión de Cauchy, veamos que es convergente. Para ello, notemos que para cada $x \in X$, la sucesión $(L_n(x))$ es de Cauchy en Y, en efecto

$$\|L_n x - L_m x\|_Y \leq \|L_n - L_m\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} \|x\|_X \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como Y es Banach, esto implica que para cada $x \in X$ podemos encontrar $L(x) \in Y$ tal que

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x).$$

Veamos que L es continuo. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|L_n x - L_m x\|_Y < \varepsilon \|x\|_X$$

para todo $n, m \geq N_\varepsilon$. Pero

$$\|Lx - L_n x\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|L_m x - L_n x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$$

lo que implica que $L - L_n$ es continua, luego L es continua, además

$$\|L - L_n\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} < \varepsilon.$$

■

2.2.1. Consecuencias del Teorema de Baire en espacios de Banach

Definición 2.7. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $F : X \to Y$ se dice abierta si para cada $U \subseteq X$ abierto, entonces $f(U)$ es abierto en Y*

Lema 2.13. *Sean X, Y espacios normados. Entonces una función lineal $L : X \to Y$ es abierta si y solo si $\exists r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subseteq L(B_X(0, 1))$.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Si L es abierta, entonces $L(B_X(0,1))$ es un abierto en Y, tal que $0 \in L(B_X(0,1))$, de donde debe existir $r > 0$ tal que

$$B_Y(0, r) \subseteq L(B_X(0, 1)).$$

($\Leftarrow$): Sea $U \subseteq X$ un abierto. Veamos que $L(U)$ es abierto en Y. Sea $y \in L(U)$, luego $y = L(x)$ para cierto $x \in U$, como U es abierto, debe existir $r_0 > 0$ tal que $B_X(x, r_0) \subseteq U$.

Notemos que $B_X(0,1) = -x + \frac{1}{r_0} B_X(x, r_0)$, luego por hipótesis tenemos que existe $r > 0$ tal que

$$B_Y(0, r) \subseteq L(B_X(0, 1)) = -L(x) + \frac{1}{r_0} L(B_X(x, r_0)) \subseteq -L(x) + \frac{1}{r_0} L(U)$$

de donde concluimos que
$$B_Y(L(x), r\cdot r_0) = r_0(B_Y(0,r) + L(x)) \subseteq L(U)$$

■

Teorema 2.14 (Aplicación abierta)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. Si $L \in \mathcal{LC}(X,Y)$ es sobreyectiva, entonces L es abierta.*

Demostración. Por el lema anterior, basta demostrar que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0,r) \subseteq L(B_X(0,1))$. Como L es sobreyectiva, tenemos que
$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0,n) \quad \text{e} \quad Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(B_X(0,n)).$$

Gracias al teorema de Baire, tenemos que debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{L(B_X(0,n_0))}$ tiene interior no vacío. Pero como Y es un espacio vectorial, y L es lineal tenemos que $L(B_X(0,n_0)) = n_0 L(B_X(0,1))$, de donde deducimos que $\overline{L(B_X(0,1))}$ debe tener interior no vacío.

Luego debe existir $y_0 \in Y$ y $r > 0$ tal que $B_Y(y_0, 16r) \subseteq \overline{L(B_X(0,1))}$. Como $y_0 \in \overline{L(B_X(0,1))}$, debe existir $y_1 \in L(B_X(0,1))$ tal que $\|y_0 - y_1\|_Y < 8r$, por lo tanto
$$B_Y(y_1, 8r) \subseteq B(y_0, 16r) \subseteq \overline{L(B_X(0,1))}.$$

Sea $x_1 \in B(0,1)$ tal que $Lx_1 = y_1$ y sea $y \in B_Y(0,8r)$, luego
$$\begin{aligned} y = y + y_1 - y_1 = y + y_1 - Lx_1 \in B(y_1, 8r) + L(B_X(0,1)) &\subseteq \overline{L(B_X(0,1)} + L(B_X(0,1)) \\ &\subseteq \overline{L(B_X(0,2))}, \end{aligned}$$

por lo tanto hemos demostrado que $B_Y(0,4r) \subseteq \overline{L(B_X(0,1))}$. Veamos que $B_Y(0,r) \subseteq L(B_X(0,1))$. Para ello observemos que como L es lineal, tenemos que
$$B_Y(0, 2^{2-k}r) \subseteq \overline{L(B_X(0,2^{-k}))} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Sea $y \in B_Y(0,r)$, luego podemos encontrar $x_1 \in B_X(0,2^{-2})$ tal que $\|y - Lx_1\|_Y < 2^{-1}r$. Sea $y_1 = y - Lx_1$, lo anterior demuestra que $y_1 \in B(0, 2^{-1}r)$, luego podemos encontrar $x_2 \in L(B_X(0,2^{-3}))$ tal que $\|y_1 - Lx_2\| = \|y - Lx_1 - Lx_2\| < 2^{-2}r$.

Siguiendo en esta forma, podemos encontrar una sucesión $x_k \in B_X(0, 2^{-k-1})$ tal que
$$\left\| y - \sum_{k=1}^{N} Lx_k \right\|_Y = \left\| y - L(\sum_{k=1}^{N} x_k) \right\|_Y < 2^{-N}r.$$

Pero como X es Banach y por construcción la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es absolutamente convergente, luego $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente. Además $\|x\|_X = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} = \frac{1}{2} < 1$ y $y = Lx$, en otras palabras $y \in L(B_X(0,1))$, lo que demuestra que
$$B_Y(0,r) \subseteq L(B_X(0,1)).$$

■

Corolario 2.15 (Teorema inversa continua)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $L \in \mathcal{LC}(X,Y)$ una función biyectiva. Entonces L es un isomorfismo, es decir L^{-1} es continua.*

Demostración. L^{-1} es continua $\Leftrightarrow$ L es abierta. ∎

Definición 2.8. *Dados X, Y conjuntos y una función $f : X \to Y$, definimos el grafo de de f como el subconjunto de $X \times Y$ dado por*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Observación 2.5. En estricto rigor, $\Gamma(f)$ es la definición de teoría de conjuntos de una función f.

Definición 2.9. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es cerrada si y solo si $\Gamma(f)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$ equipado con la topología producto.*

Observación 2.6. Notar que cuando X, Y son espacios vectoriales normados, la topología producto se puede inducir mediante la norma

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \text{máx}\left(\|x\|_X, \|y\|_Y\right),$$

o las normas equivalentes

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $p \geq 1$.

Lema 2.16. *Dados dos espacios métricos X, Y. Una función $f : X \to Y$ es cerrada si y solo si para cada sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que*

$$\begin{gathered} x_n \to x \\ f(x_n) \to y, \end{gathered}$$

entonces $y = f(x)$.

Demostración. Ejercicio. ∎

Teorema 2.17 (Grafo cerrado)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $L : X \to Y$ una función lineal cerrada. Entonces $L \in \mathcal{LC}(X, Y)$.*

Demostración. Consideremos las proyecciones $\pi_1 : \Gamma(L) \to X$ tal que $\pi_1((x, Lx)) = x$ y $\pi_2 : \Gamma(L) \to Y$ tal que $\pi_2((x, Lx)) = Lx$. Es claro que $\pi_1 \in \mathcal{LC}(\Gamma(L), X)$ y que $\pi_2 \in \mathcal{LC}(\Gamma(L), Y)$. Como X, Y son completos, entonces $X \times Y$ es completo, y como $\Gamma(L)$ es cerrado, entonces también es completo.

Ahora, la función π_1 es biyectiva, luego por el teorema de la inversa continua, tenemos que π_1^{-1} es continua. Luego, notar que

$$Lx = \pi_2((x, Lx)) = \pi_2(\pi_1^{-1}(x)) = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(x),$$

es decir L es continua. ∎

Teorema 2.18 (Principio de la cota uniforme)**.** *Sean X, Y espacios vectoriales normados tales que X es un espacio de Banach y sea $A \subseteq \mathcal{LC}(X, Y)$ tal que*

$$\sup_{L\in A} \|Lx\|_Y < \infty \quad \forall\, x \in X,$$

entonces

$$\sup_{L\in A} \|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} < \infty$$

Observación 2.7. Este teorema nos dice que podemos pasar de funciones que son acotadas puntualmente, a funciones que son acotadas uniformemente por el solo hecho de que sean funciones lineales y que el dominio sea un espacio de Banach.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos los conjuntos

$$E_n = \left\{ x \in X : \sup_{T \in A} \|Lx\|_Y \leq n \right\},$$

y notemos que

$$E_n = \bigcap_{L \in A} \{x \in X : \|Lx\|_Y \leq n\}.$$

Luego por la continuidad de cada L y de $\|\cdot\|_Y$ tenemos que cada E_n es un conjunto cerrado en X. Por otra parte, por hipótesis tenemos que si $x \in X$ entonces debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|Lx\| \leq n$, es decir

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Luego por el Teorema de Baire, debe existir n_0 tal que E_{n_0} tiene interior no vacío. Esto nos dice que existe $x_0 \in X$ y $r > 0$ tal que

$$B_X(x_0, r) \subseteq E_{n_0}.$$

De aquí deducimos que $B_x(0, r) \subseteq E_{2n_0}$, en efecto, si $\|x\| < r$, entonces $x + x_0 \in B(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$ y

$$\|Lx\|_Y \leq \|Lx + Lx_0\|_Y + \|Lx_0\|_Y \leq 2n_0, \quad \forall\, L \in A.$$

Finalmente obtenemos que si $L \in A$

$$\begin{aligned}
\|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Lx\|_Y \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \frac{2}{r} \left\| L(\frac{r}{2}x) \right\|_Y \\
&\leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \frac{4n_0}{r} \\
&= \frac{4n_0}{r},
\end{aligned}$$

es decir

$$\sup_{L \in A} \|L\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} \leq \frac{4n_0}{r}.$$

■

Teorema 2.19. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita e Y un espacio vectorial normado. Sea $L : X \to Y$ una función lineal, entonces L es continua.*

Demostración. Como X es de dimensión finita, tenemos que existen $e_1, \ldots, e_N \in X$ que son linealmente independientes (en particular $e_i \neq 0$ para todo i, por lo que podemos suponer que $\|e_i\| = 1$ para todo i) tales que para cualquier $x \in X$ existen únicos $k_1(x), \ldots, k_N(x) \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{N} k_i(x) e_i,$$

con esto podemos definir

$$|||x||| \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} |k_i(x)|$$

que resulta ser una norma[2] en X. Como vimos, todas las normas son equivalentes en dimensión finita, luego existe una constante $C > 0$ tal que

$$|||x||| \leq C \|x\|$$

de donde obtenemos que si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión tal que $x_m \to 0$ para la norma $\|\cdot\|$, entonces

$$\sum_{i=1}^{N} |k_i(x_m)| = |||x_m||| \leq C \|x_m\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo tanto

$$\|Lx_m\| = \left\| L(\sum_{i=1}^{N} k_i(x_m)e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{N} |k_i(x_m)| \, \|Le_i\| \leq \max_{i=1,\ldots,N} \|Le_i\| \sum_{i=1}^{N} |k_i(x_m)| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

¿Qué sucede en dimensión infinita?

Para ello precisemos que queremos decir al hablar de dimensión infinita.

Definición 2.10 (Base de Hamel)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Decimos que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq X$ es una base de Hamel (o base algebraica) para X si dado cualquier subconjunto finito $B \subseteq A$, entonces el conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha\in B}$ es linealmente independiente, y para cada x existe un subconjunto finito $B_x \subset A$, y escalares $\{k_\alpha\}_{\alpha\in B_x} \subseteq \mathbb{K}$ tal que*

$$x = \sum_{\alpha\in B_x} k_\alpha x_\alpha,$$

donde B_x y los escalares $\{k_\alpha\}_{\alpha\in B_x}$ son únicos.

Teorema 2.20. *Todo espacio vectorial admite una base de Hamel.*

No demostraremos[3] este teorema pues es un resultado de álgebra. Además se puede demostrar que dadas dos bases de Hamel sobre un espacio vectorial, entonces *sus cardinalidades deben ser iguales*. Con esto tiene sentido hacer la siguiente definición.

Definición 2.11 (Dimensión)**.** *Diremos que X es un espacio vectorial de dimensión finita si admite una base de Hamel finita, en cuyo caso la dimensión de X es la cardinalidad de una base de Hamel. En caso contrario, diremos que X tiene dimensión infinita.*

Otra de las consecuencias del Teorema de Baire es que las bases de Hamel de los espacios de Banach, o bien son finitas, o bien son no-numerables. En otras palabras, no pueden existir espacios de Banach con dimensión infinita numerable.

[2]Notar que por la independencia lineal de los e_i's tenemos que $x = 0$ si y solo si $k_i(x) = 0$ para todo i. Además, gracias a la unicidad de los k_i's tenemos que $k_i(\lambda x) = \lambda k_i(x)$ y $k_i(x + y) = k_i(x) + k_i(y)$, de donde se siguen las restantes propiedades de la norma.

[3]La demostración utiliza el Lema de Zorn.

Proposición 2.21. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces la dimensión es no-numerable.*

Demostración. Supongamos que X tiene dimensión infinita numerable y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Hamel. Definamos el espacio vectorial generado por $\{x_1, \dots, x_k\}$

$$X_k =< \{x_1, \dots, x_k\} > .$$

Notemos que X_k tiene interior vacío para todo k. En caso contrario, existe $x \in X_k$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq X_k$. Pero como X_k es un subespacio vectorial, entonces $B(0, r) = B(x, r) - x \subseteq X_k$, y en consecuencia si $y \in X$, entonces $\frac{1}{2r} y \in B(0, r) \subseteq X_k$, y por lo tanto $X_k = X$, imposible.

Se deja como ejercicio demostrar que X_k debe ser cerrado en X. Sin embargo esto es imposible, pues como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Hamel, entonces

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k,$$

lo que viola el teorema de Baire. ■

Este resultado nos dice que utilizar bases de Hamel en análisis no es adecuado. Lo que se utiliza en análisis son las bases de Schauder:

Definición 2.12 (Base de Schauder)**.** *Sea X un espacio de Banach. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X y para cada $x \in X$ existe una sucesión única de escalares $(k_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(x) x_n$$

es convergente y

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(x) x_n.$$

Ejemplo 2.6. 1. En $\mathbb{R}^N$ la base canónica es una base de Hamel y de Schauder.

2. Para $1 \le p < \infty$, los espacios ℓ^p cuentan con la base de Schauder *canónica* dada por

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \dots) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, esta no es una base de Hamel para ℓ^p. Por otra parte, este conjunto no es una base de Schauder para ℓ^∞.

Definición 2.13 (Espacio dual (continuo))**.** *Dado X un espacio vectorial normado, definimos el espacio dual de X y lo denotamos como X^* como el conjunto*

$$X^* = \mathcal{LC}(X, \mathbb{K}),$$

y para $L \in X^*$, usamos la norma de operadores lineales

$$\|L\|_* = \|L\|_{\mathcal{LC}(X,\mathbb{K})} .$$

Notar que como $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es completo, entonces X^* es siempre un espacio de Banach, incluso si X no lo es.

Ejemplo 2.7. Demostramos que cuando X tiene dimensión finita, entonces todas las funciones lineales sobre X son continuas, en particular, en dimensión finita se tiene que

$$X^* = \mathcal{LC}(X, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})^4.$$

Sin embargo, cuando la dimensión es infinita, puede ocurrir que existan funcionales lineales no continuos. Para ver esto, consideremos X un espacio vectorial de dimensión infinita, y $B = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base de Hamel, que podemos suponer satisface $\|x_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in A$.

Podemos suponer que $\mathbb{N} \subsetneq A$ (pues vimos que A debe ser no numerable). Definamos la función siguiente, para cada $n \in \mathbb{N} \subseteq A$ definamos

$$Lx_n = n,$$

y si $\alpha \in A \setminus \mathbb{N}$

$$Lx_\alpha = 0.$$

Extendemos la definición a todo $x \in X$ por linealidad, es decir si $x = \sum_{\alpha \in B_x} k_\alpha x_\alpha$ entonces[5]

$$Lx = \sum_{\alpha \in B_x} k_\alpha L x_\alpha.$$

Luego esta función es lineal, pero no es acotada, pues

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} Lx \geq \|Lx_n\| = n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2.3. Elementos básicos de espacios de Hilbert

Definición 2.14. *Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno o escalar sobre H es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ que satisface*

1. $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$ *para todo $x, y, z \in H$ y todo $a, b \in \mathbb{C}$.*
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *para todo $x, y \in H$.*
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para todo $x \in H$, y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Observación 2.8. Si el cuerpo es $\mathbb{R}$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ y la condición (ii) queda $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in H$.

En un espacio con producto interno se puede definir la siguiente función

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

que satisface la llamada

Proposición 2.22 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea H un espacio vectorial y $\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Para cada $x, y \in H$ tenemos que*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H .$$

[4] El conjunto $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ se conoce como dual algebráico del espacio vectorial X.

[5] Recordar que la suma es finita.

Demostración. Si $y = 0$ no hay nada que demostrar, por lo que asumiremos que $y \neq 0$. Para $t \in \mathbb{C}$ y $z = x - ty$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle z, z\rangle \\ &= \langle x - ty, x - ty\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - \overline{t}\langle x, y\rangle + |t|^2\langle y, y\rangle . \end{aligned}$$

Luego para $t = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|_H^2}$ obtenemos que

$$0 \leq \|x\|_H^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|_H^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|_H^4}\|y\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|_H^2},$$

de donde deducimos la desigualdad. ■

Un corolario de esta desigualdad es que $\|\cdot\|_H$ es una norma sobre H

Lema 2.23. *Sea H un espacio vectorial equipado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces*

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

define una norma sobre H

Demostración. Solo basta confirmar la desigualdad triangular. Sean $x, y \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \|x + y\|_H^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|_H^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|_H^2 \\ &\leq \|x\|_H^2 + 2\|x\|_H\|y\|_H + \|y\|_H^2 \\ &= (\|x\|_H + \|y\|_H)^2 , \end{aligned}$$

de donde se obtiene la desigualdad triangular. ■

Observación 2.9. Notar que hemos demostrado la siguiente identidad: Sean $x, y \in H$, entonces

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 .$$

En lo que sigue, y si no se dice lo contrario, un espacio vectorial H equipado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ siempre estará equipado con la norma $\|\cdot\|_H$ y la topología de la norma.

Definición 2.15 (Espacio de Hilbert)**.** *Diremos que un espacio H con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio de Hilbert si $(H, \|\cdot\|_H)$ es un espacio de Banach.*

Ejemplo 2.8.

1. $\mathbb{C}$, visto como espacio vectorial sobre si mismo, es un espacio de Hilbert si se considera el producto interno
$$\langle x, y\rangle = x\overline{y}.$$
2. $\mathbb{C}^N$, como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n\overline{y_n}.$$

3. $\mathbb{R}$, visto como espacio vectorial sobre si mismo, es un espacio de Hilbert bajo el producto habitual de números.

4. $\mathbb{R}^N$, como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno
$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n.$$
La norma inducida es la norma euclidiana.

5. El espacio ℓ^2 de sucesiones reales de cuadrado sumable se puede equipar con el producto interno
$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$
La norma inducida por este producto interno es la norma $\|\cdot\|_2$, norma que demostramos hace que el espacio ℓ^2 sea completo, es decir, ℓ^2 es un espacio de Hilbert.

6. También se puede considerar el espacio de sucesiones complejas de cuadrado sumable, equipado del producto interno
$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n},$$
que también resulta ser un espacio de Hilbert.

7. El espacio $C([0,1], \mathbb{R})$ se puede equipar del producto interno
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$
sin embargo este no es un espacio de Hilbert.

8. El espacio $L^2(0,1)$, definido como la completación del conjunto de las funciones $C([0,1], \mathbb{R})$ bajo la norma
$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$
tiene estructura de espacio de Hilbert si es que se lo equipa del producto interno
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Proposición 2.24 (Continuidad del producto interno)**.** *Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones en un espacio de Hilbert H tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Entonces*
$$\langle x_n, y_n \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle .$$

Demostración. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que
$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\| , \end{aligned}$$
pero como las sucesiones $(x_n), (y_n)$ son convergentes, entonces deben ser acotadas, luego existe $R > 0$ tal que $\|x_n\| \leq R$ y $\|y_n\| \leq R$, de donde para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar n suficientemente grande tal que
$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq R \left(\|x_n - x\| + \|y_n - y\| \right) < \varepsilon.$$
■

Proposición 2.25 (Ley del paralelogramo)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Observación 2.10. Esta proposición dice que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

Demostración. Basta notar que $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. ■

Definición 2.16 (Ortogonalidad)**.** *Dado un espacio de Hilbert, decimos que x es ortogonal a y si $\langle x, y\rangle = 0$. Denotamos la ortogonalidad por $x \perp y$.*

Si $E \subseteq H$, definimos el ortogonal E como

$$E^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall\, y \in E\}.$$

Lema 2.26. *El conjunto $E^{\perp}$ es cerrado en H.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.27 (Teorema de Pitágoras)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_N \in H$ tales que $x_i \perp x_j$ para todo $i \neq j$. Entonces*

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2.$$

Demostración. Basta notar que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} x_n, \sum_{n=1}^{N} x_n \right\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \langle x_i, x_j\rangle.$$

■

Teorema 2.28. *Sea $E \subseteq H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces*

$$H = E \oplus E^{\perp},$$

esto es, para cada $x \in H$ existe un único $y \in E$ y un único $z \in E^{\perp}$ tal que $x = y + z$.

Además,

$$\|x-y\| = \inf_{y' \in E} \|x - y'\| = \mathrm{dist}(x, E)$$
$$\|x-z\| = \inf_{y' \in E^{\perp}} \|x - z'\| = \mathrm{dist}(x, E^{\perp})$$

Demostración. Sea $x \in H$ y sea

$$\delta = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

De la definición de ínfimo, debe existir una sucesión $(y_n) \subseteq E$ tal que $\|x - y_n\| \to \delta$. Veamos que (y_n) es de Cauchy. De la ley del paralelogramo tenemos que

$$2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) = \|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2x\|^2,$$

como $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in E$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \\ &\leq 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4\delta^2, \end{aligned}$$

luego para $n, m \to \infty$ concluimos que $\|y_n - y_m\|^2 \to 0$. Así tenemos la existencia de $y \in E$ (recordar que E es cerrado) tal que $y_n \to y$. Además de la continuidad de $\|\cdot\|$ tenemos que $\delta = \|x - y\|$.

Sea $z = x - y$, veamos que $z \in E^\perp$. Sea $u \in E$, sin perder generalidad asumiremos que $\langle z, u\rangle \in \mathbb{R}$ (de no serlo, podemos multiplicar u por $k \in \mathbb{C}$) y para $t \in \mathbb{R}$ consideremos $f(t) = \|z + tu\|^2$.

Notar que $f(t) = \|z + tu\|^2 = \|x - y + tu\|^2 = \|x - (y - tu)\|^2$, luego la función f está acotada inferiormente por δ^2 y $f(0) = \|x - y\|^2 = \delta^2$, de donde obtenemos que $f'(0) = 0$. Esto implica que $\langle z, u\rangle = 0$.

Si $z' \in E^\perp$, como $x - z = y \in E$ del teorema de Pitágoras tenemos que

$$\left\|x - z'\right\|^2 = \|x - z\|^2 + \left\|z - z'\right\| \geq \|x - z\|^2,$$

es decir $\|x - z\| = \operatorname{ínf}_{z' \in E^\perp} \|x - z'\|$.

Finalmente, si $x = y + z = y' + z'$ entonces $y - y' = z - z' \in E \cap E^\perp = \{0\}$. ■

Proposición 2.29. *Sea H un espacio de Hilbert y $E \subseteq H$. Considere $H = E \oplus E^\perp$ tal que si $x = y + z \in E \oplus E^\perp$. Definamos $P_E : H \to M$ como $P_E(x) = y$. Entonces*

1. *$P_E \in \mathcal{LC}(H, E)$ y $\|P_E\| = 1$.*
2. *$P_E \circ P_E = P_E$.*
3. *$\langle P_E x, y\rangle = \langle x, P_E y\rangle$ para todo $x, y \in H$.*

Demostración. Para la linealidad, notemos que si $x_1 = y_1 + z_1 \in E \oplus E^\perp$ y $x_2 = y_2 + z_2 \in E \oplus E^\perp$, entonces $kx_1 + x_2 = (ky_1 + y_2) + (kz_1 + z_2)$ y por la unicidad de la escritura, tenemos que

$$P_E(kx_1 + x_2) = ky_1 + y_2 = kP_E(x_1) + P_E(x_2),$$

es decir P_E es lineal. Además, del teorema de Pitágoras tenemos que si $x = y + z$, entonces $y \perp z$ y se tiene que

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|y\|^2 = \|P_E x\|^2,$$

luego

$$\|P_E\| \leq 1,$$

es decir P_E es acotado (continuo). Además, para $x \in E$ tenemos que $P_E x = x$, luego $\|P_E x\| = \|x\|$, de donde concluimos que $\|P_E\| = 1$.

En segundo lugar, notemos que si $x \in E$, entonces $x = x + 0$ y la escritura es única, por lo tanto

$$P_E x = x \Rightarrow P_E \circ P_E x = P_E x, \quad \forall\, x \in E,$$

y si $x \in E^\perp$, entonces $x = 0 + x$, luego

$$P_E x = 0 \Rightarrow P_E \circ P_E x = P_E 0 = 0, \quad \forall\, x \in E^\perp,$$

de la linealidad de P_E concluimos que si $x = y + z \in E \oplus E^\perp$, entonces

$$P_E(x) = P_E(y+z) = P_E y + P_E z = P_E y = y \Rightarrow P_E \circ P_E x = P_E y = y = P_E x.$$

Finalmente, si $x_1 = y_1 + z_1$ y $x_2 = y_2 + z_2$, entonces $\langle y_i, z_j \rangle = 0$ luego

$$\langle P_E x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, P_E x_2 \rangle .$$

■

Definición 2.17 (Conjuntos ortonormales)**.** *Un subconjunto $E \subseteq H$ se dice ortonormal si*

- $\|u\| = 1$ *para todo* $u \in E$,
- $u_1 \perp u_2$ *para todo* $u_1 \neq u_2 \in E$

Proposición 2.30 (Iteración de Gram-Schmidt)**.** *Sea $(x_n) \subseteq H$ una sucesión linealmente independiente. Entonces existe una sucesión $(u_n) \subseteq H$ tal que*

- $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto ortonormal.*
- *Para cada $N \in \mathbb{N}$, el espacio vectorial generado por $(x_n)_{n=1}^N$ coincide con el espacio vectorial generado por $(u_n)_{n=1}^N$.*

Demostración. Definimos recursivamente

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$
$$u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|},$$

donde $v_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, u_j \rangle u_j$. Se deja como ejercicio verificar que la sucesión (u_n) satisface lo requerido. ■

Proposición 2.31 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea $(x_n) \subseteq H$ una sucesión ortonormal. Entonces para cada $x \in H$ tenemos que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$, usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x_n, x \rangle x \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle x_n, \sum_{n=1}^N \langle x_n, x \rangle x \right\rangle + \left\| \sum_{n=1}^N \langle x_n, x \rangle x \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x \rangle|^2 + \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x \rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x \rangle|^2 ,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x_n, x\rangle| \leq \|x\|^2$$

para todo N, luego $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x\rangle|$ existe y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x\rangle| \leq \|x\|^2$$

■

Definición 2.18 (Base de Hilbert)**.** *Un conjunto ortonormal $E \subseteq H$ se dice base de Hilbert si $\langle x, u\rangle = 0$ para todo $x \in E$, entonces $u = 0$.*

Teorema 2.32. *Todo espacio de Hilbert admite una base de Hilbert.*

Demostración. [6] Hay que utilizar el lema de Zorn[7] aplicado a la familia de conjuntos ortonormales ordenados por inclusión. La base de Hilbert resulta ser un elemento maximal.

Sea $\mathcal{P} = \{E \subseteq H : E \text{ es un conjunto ortonormal}\}$. Sobre $\mathcal{P}$ podemos introducir el orden parcial dado por la inclusión. Para aplicar el Lema de Zorn debemos probar que toda cadena admite una cota superior[8].

Sea C una cadena en $\mathcal{P}$. Veamos que $S = \bigcup_{A\in C} A$ es una cota superior. Solo hay que probar que $S \in \mathcal{P}$, es decir, que M es un conjunto ortonormal. Por definición $u \in S$ nos dice que u pertenece a algún A, luego $\|u\| = 1$. Además, si $u \neq v \in M$, como C es una cadena, entonces debe existir $A \in C$ tal que $u, v \in A$, pero A es ortonormal, luego si $u \neq v$ entonces $u \perp v$.

El Lema de Zorn entonces aplica y nos dice que debe existir un elemento maximal en $\mathcal{P}$. Sea M dicho elemento maximal. Por definición, M es un conjunto ortonormal, veamos que satisface la condición de completitud. Supongamos que no, luego debe existir $x \in H \setminus \{0\}$ tal que $\langle x, u\rangle = 0$ para todo $u \in M$. Esto quiere decir que $x \in M^{\perp}$, luego podemos considerar

$$\tilde{M} = M \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\},$$

que por definición resulta ser un conjunto ortonormal tal que $M \subsetneq \tilde{M}$, lo que contradice la maximalidad. ■

Ejemplo 2.9.

1. En $\mathbb{R}^N$, el conjunto $\{e_i : i = 1, \dots, N\}$ donde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

   es una base de Hilbert.

2. En ℓ^2, el conjunto $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots)$$

   es una base de Hilbert. En efecto, si $f \in \ell^2$, entonces

$$\langle f, e_i\rangle = f_i,$$

   luego si $\langle f, e_i\rangle = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $f_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir $f \equiv 0$.

[6] Se puede omitir la lectura de esta demostración.

[7] Ver por ejemplo [5].

[8] Una cadena en $\mathcal{P}$ es un conjunto $C \subseteq \mathcal{P}$ es tal que si $A, B \in C$ entonces $A \leq B$ o $B \leq A$. Y una cota superior para C es un elemento $S \in \mathcal{P}$ tal que $A \leq S$ para todo $A \in C$.

Teorema 2.33. *Sea $(x_n) \subseteq H$ una sucesión ortonormal. Son equivalentes*

1. **(Completitud)** *Si $\langle x_n, x\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.*

2. *Para cada $x \in H$ tenemos que*
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle\, x_n,$$
donde la suma es convergente en la topología de la norma, sin importar el orden en el que se sumen los términos.

3. **(Identidad de Parseval)** *Para todo $x \in H$*
$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 .$$

Demostración. (1. ⇒ 2.): De la desigualdad de Bessel tenemos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$
De aquí deducimos gracias al teorema de Pitágoras que
$$\left\|\sum_{n=k}^{m} \langle x, x_n\rangle\, x_n\right\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |\langle x, x_n\rangle|^2 \underset{k,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Esto quiere decir que la sucesión de sumas parciales $S_k = \sum_{n=1}^{k} \langle x, x_n\rangle\, x_n$ es de Cauchy, luego debe converger a $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle\, x_n \in H$. Sea $y = x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle\, x_n$, entonces
$$\langle y, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle \langle x_n, x_k\rangle = 0$$
por lo tanto $y = 0$.

(2. ⇒ 3.): Notar que (como en la demostración de la desigualdad de Bessel)
$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \left\|x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle\, x_n\right\|^2 = 0.$$

(3. ⇒ 1.): Evidente. ■

Proposición 2.34. *Un espacio de Hilbert es separable si y solo si admite una base de Hilbert numerable. Si esto ocurre, todas las bases de Hilbert son numerables.*

Demostración. (⇐): Supongamos que H admite una base de Hilbert numerable $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces se deja como ejercicio demostrar que el conjunto
$$D = \left\{\sum_{n=1}^{N} k_n e_n \in H : N \in \mathbb{N},\ k_n = a_n + i b_n,\ a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}$$
es denso en H.

(⇒): Supongamos que H admite una base de Hilbert no numerable $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y consideremos $D \subseteq H$ un conjunto denso. Veamos que D no puede ser numerable.

Como $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una base de Hilbert, tenemos que $e_\alpha \perp e_\beta$, luego

$$\left\|e_\alpha - e_\beta\right\|^2 = \|e_\alpha\|^2 + \left\|e_\beta\right\|^2 = 2,$$

esto implica que las bolas $B(e_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{4})$ son disjuntas para todo $\alpha \in A$, y como D es denso, debe existir al menos un elemento de D en cada una de ellas. En particular $|A| \leq |D|$. ∎

2.3.1. El Teorema de representación de Riesz-Fréchet

Terminamos esta breve introducción a espacios de Hilbert con la demostración del teorema de representación de Riesz-Fréchet, que nos dice que hay una identificación 'natural" entre H y $H^* = \mathcal{LC}(H,\mathbb{C})$, aunque en esta breve introducción al tema solo nos concentraremos en el caso real.

En primer lugar, recordemos que para cualquier $b \in H$, la aplicación $L_b : x \mapsto \langle x, b\rangle$ pertenece a $\mathcal{LC}(H,\mathbb{R})$. Esto, nos permite definir la función inyectiva

$$\begin{aligned} U : H &\longrightarrow \mathcal{LC}(H,\mathbb{R}) \\ b &\longmapsto U(b) = U(b) = L_b \end{aligned}.$$

El resultado del teorema es que está función es de hecho una biyección lineal isométrica, es decir

$$\|b\|_H = \|U(b)\|_{\mathcal{LC}(H,\mathbb{R})}.$$

Teorema 2.35 (Representación de Riesz-Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert real, entonces U es una biyección, isométrica. En otras palabras, para cada $L \in H^* = \mathcal{LC}(H,\mathbb{R})$, existe un único $b_L \in H$ tal que*

$$U(b_L) = L,$$

y además $\|b_L\| = \|L\|$.

Demostración. Sea $L \in \mathcal{LC}(H,\mathbb{R})$, veamos que existe tal $b_L \in H$. Si $L \equiv 0$ entonces basta tomar $b_L = 0$, luego supondremos que $L \not\equiv 0$, es decir, podemos suponer que $E = \ker(L)$ es un subespacio vectorial propio de H, de donde $E^\perp \neq \{0\}$.

Tomemos $z \in E^\perp$ tal que $\|z\| = 1$, y notemos que para cualquier $x \in H$ tenemos que $L(L(x)z - L(z)x) = L(x)L(z) - L(z)L(x) = 0$, luego $L(x)z - L(z)x \in E$, por lo tanto, como $z \in E^\perp$ tenemos que

$$0 = \langle L(z)z - L(z)z, z\rangle = L(x)\|z\|^2 - L(z)\langle x, z\rangle = L(x) - L(z)\langle x, z\rangle,$$

en consecuencia si $b_L = L(z)z$

$$L(x) = \langle x, L(z)z\rangle = \langle x, b_L\rangle.$$

La unicidad se obtiene pues si $\tilde{b}_L$ es otro elemento de H tal que $L(x) = \left\langle x, \tilde{b}_L\right\rangle$ para todo $x \in H$, entonces para $y = b_L - \tilde{b}_L$

$$0 = L(y) - L(y) = \left\langle y, b_L - \tilde{b}_L\right\rangle = \left\|b_L - \tilde{b}_L\right\|^2,$$

luego $b_L = \tilde{b}_L$.

Finalmente, veamos que U es una isometría: Sea $b \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \|U(b)\| &= \sup_{\|x\|=1} |U(b)(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\langle x, b\rangle| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \, \|b\| \\ &= \|b\| \, . \end{aligned}$$

Y por otra parte

$$\begin{aligned} \|U(b)\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{|U(b)(x)|}{\|x\|} \\ &\geq \frac{|U(b)(b)|}{\|b\|} \\ &= \frac{\langle b, b\rangle}{\|b\|} \\ &= \|b\| \, , \end{aligned}$$

es decir

$$\|U(b)\| = \|b\| \, .$$

■

Definición 2.19 (Funciones unitarias)**.** *Dados dos espacios de Hilbert* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$*, decimos que* $U : H_1 \to H_2$ *una función lineal invertible es unitaria si*

$$\langle Ux, Uy\rangle_2 = \langle x, y\rangle \quad \forall\, x, y \in H_1.$$

Teorema 2.36. *Sea* H *un espacio de Hilbert separable con base de Hilbert* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Consideremos la función* $I : H \to \ell^2$*, definida como*

$$I(x) = (\langle x, e_n\rangle_H),$$

es una función unitaria.

Demostración. Notar que

$$\|I(x)\|_{\ell^2}^2 = \langle I(x), I(x)\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle_H|^2$$

y gracias a la identidad de Parseval

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle_H|^2 \, ,$$

luego $\|I(x)\|_{\ell^2} = \|x\|_H$ es decir $I : H \to \ell^2$ está bien definida y es una isometría. Además, es claramente lineal y si $y \in \ell^2$ entonces

$$y = (y(1), y(2), \ldots)$$

tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|^2 < \infty,$$

luego podemos definir $x \in H$ como

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} y(n) e_n,$$

y por construcción $I(x) = y$, es decir I es sobreyectiva. Luego por el Ejercicio 2.42 concluimos que I debe ser una función unitaria. ■

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sea X un espacio vectorial normado. Considere $A \subseteq X$ un subespacio vectorial de dimensión finita.[9] Muestre que A es cerrado en X.

Ejercicio 2.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Muestre que la norma $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ es una función continua.

Ejercicio 2.3. Sea X un espacio vectorial normado. Muestre que $+ : X \times X \to X$ y $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ son funciones continuas.

Ejercicio 2.4. Demostrar que $\ell^1 = \left\{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$ es un espacio de Banach para la norma

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$

Para ello, muestre primero la desigualdad de Hölder siguiente: si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones reales, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq \|(x_n)\|_\infty \|(y_n)\|_1 ,$$

donde

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$

Ejercicio 2.5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial, y sea $A \subset X$ un subespacio vectorial.

1. Muestre que $\bar{A}$ es un subespacio vectorial.
2. Muestre que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces

$$(A, \|\cdot\|) \text{ es un espacio de Banach} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado.}$$

Ejercicio 2.6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, y A es un subespacio vectorial. Defina la relación en X dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$.

1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Considere el espacio cociente $X/A = \{[x] : x \in X\}$, donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x.

2. Muestre que X/A es un espacio vectorial.
3. Muestre que

$$\|[x]\|_A = \inf_{y\in A} \|x + y\| ,$$

define una norma sobre X/A. *La topología inducida por esta norma coincide con la topología cociente.*

4. Muestre que si X es un espacio de Banach y si A es cerrado, entonces $(X/A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach.

[9] A es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, si existen $a_1, \ldots, a_N \in A$ tales que para todo $a \in A$ existen $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{K}$ tales que

$$a = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_N.$$

La dimensión es N si además el conjunto $\{a_1, \ldots, a_N\}$ es linealmente independiente.

5. Muestre que dado $0 < \varepsilon < 1$ entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|[x]\|_A \geq 1 - \varepsilon$.

Ejercicio 2.7. Demuestre el Corolario 2.6.

Ejercicio 2.8. 1. Muestre que si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $\ell^p \subseteq \ell^q$. Para ello se sugiere mostrar que si (x_n) es una sucesión real, entonces
$$\|(x_n)\|_q \leq \|(x_n)\|_p .$$

2. Muestre que si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces la inclusión es estricta, es decir $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Ejercicio 2.9. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y $(x_n) \subseteq X$ una sucesión tal que
$$x_n \to x.$$
Muestre que la sucesión
$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$
es convergente y que
$$S_N \to x.$$

Ejercicio 2.10. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Considere funciones $f_n : \mathbb{N} \to X$ tales que
$$f(k) = \lim_{n\to\infty} f_n(k)$$
existe (esto es, la sucesión converge puntualmente a f). Suponga además que existe una función $g : \mathbb{N} \to X$ tal que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g(k)\| < \infty.$$
y que $\|f_n(k)\| \leq \|g(k)\|$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$. Muestre que $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ está bien definida y que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$
Note que lo que se está demostrando es que se pueden intercambiar dos limites, el limite de la sucesión (f_n) *con el límite de la serie.*

Ejercicio 2.11. Muestre que la sucesión $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge uniformemente a una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.12. Considere la función
$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

1. Muestre que si $|x| \leq 1$ entonces la serie es absoluta y uniformemente convergente.

2. Concluya que $L : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua.

Ejercicio 2.13. Muestre que la serie definida sobre $\mathbb{R}^2$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x^2 + y^4}}$$
converge absoluta y uniformemente.

Ejercicio 2.14. Muestre que las tres definiciones en la Definición 2.6 son equivalentes. Muestre además que $\|\cdot\|_{\mathcal{LC}(X,Y)}$ es efectivamente una norma.

Ejercicio 2.15. Demuestre la Proposición 2.11.

Ejercicio 2.16. Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, y A es un sub-espacio vectorial. Defina la relación en X dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$.

1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Considere el espacio cociente $X/A \overset{def}{=} \{[x] : x \in X\}$, donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x. Note que $[x] = x + A$.

b) Muestre que X/A es un espacio vectorial. *Debe demostrar que las operaciones*

$$[x] + [y] \overset{def}{=} [x + y], \quad \forall\, x, y \in X$$
$$k[x] \overset{def}{=} [kx], \quad \forall\, x \in X, k \in \mathbb{K}.$$

están bien definidas.

c) Muestre que

$$\|[x]\|_A = \inf_{y \in A} \|x + y\|\,,$$

define una norma sobre X/A.

d) Muestre que si X es un espacio de Banach y si A es cerrado, entonces $(X/A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach.

e) Muestre que dado $0 < \varepsilon < 1$ entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|[x]\|_A \geq 1 - \varepsilon$.

f) Concluya que la función $\pi : X \to X/A$ definida como $\pi(x) = [x]$ es una función lineal continua y que $\|\pi\|_{\mathcal{LC}(X,Y)} = 1$.

Ejercicio 2.17. Demuestre el Lema 2.10.

Ejercicio 2.18. Demuestre el Lema 2.16.

Ejercicio 2.19. Sea X un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) normado y sea $T : X \to \mathbb{R}$ una función lineal. Muestre que T es continua si y solo si $T^{-1}(\{0\})$ es cerrado en X.

Ejercicio 2.20. Sea X un espacio vectorial normado y $T, S \in \mathcal{LC}(X, X)$. Muestre que $T \circ S \in \mathcal{LC}(X, X)$ y que $\|T \circ S\| \leq \|T\|\,\|S\|$.

Ejercicio 2.21. Definimos el conjunto de sucesiones reales acotadas como

$$c = \left\{(x_n) \in \ell^\infty : \text{ existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} x_n = L\right\}$$

1. Muestre que c es un espacio de Banach cuando se equipa con la norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

2. Defina $L : c \to \mathbb{R}$ como $L((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Muestre que L es una función lineal continua y que $\|L\| = 1$.

Ejercicio 2.22. Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ una función lineal tal que $\|T\| < 1$. Sea $I : X \to X$ la función identidad.

1. Use el teorema del punto fijo de Banach para mostrar que la función $I - T : X \to X$ es biyectiva. Concluya que la inversa de $I - T$ es continua.

2. Si $T^0 = I$ y $T^n = T \circ \ldots \circ T$, muestre que la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$$
es absolutamente convergente para todo $x \in X$.

3. Muestre que $(I - T)^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 2.23. Considere ℓ^1 equipado con su norma $\|\cdot\|_1$. Sea
$$A = \left\{ f \in \ell^1 : \sum_{n \in \mathbb{N}} n\,|f(n)| < \infty \right\}.$$
Asuma, sin demostrar, que A es denso en ℓ^1 (lo que implica que $(A, \|\cdot\|_1)$ no puede ser completo).

1. Defina $T : A \to \ell^1$ como $Tf(n) = nf(n)$ y muestre que T es una aplicación cerrada, pero no acotada (continua).

2. Muestre que $T^{-1} : \ell^1 \to A$ es continua y sobreyectiva, pero no abierta.

Ejercicio 2.24. Considere $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ equipado con la norma uniforme, y considere $Y = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ como subespacio vectorial de X.

1. Muestre que Y equipado con la norma uniforme no es completo. *Ayuda: Use el teorema de Stone-Weierstrass para mostrar que Y es denso en X.*

2. Considere la aplicación $D : Y \to X$ definida como $Df(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Muestre que D es una aplicación lineal cerrada, pero que no es continua. *Ayuda: Muestre que si $h_k(x) \to h(x)$ uniformemente en $[0, 1]$, entonces $\int_a^b h_k(x)\mathrm{d}x \to \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$ para todo $0 \le a < b \le 1$.*

Ejercicio 2.25 (Teorema de Banach-Steinhaus). Sean X, Y espacios de Banach y sea $(T_n) \subseteq \mathcal{LC}(X, Y)$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe para todo $x \in X$. Defina $T : X \to Y$ como $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ y muestre que $T \in \mathcal{LC}(X, Y)$.

Note que este resultado dice que si se tiene una sucesión de funciones lineales continuas que converge puntualmente a una función lineal, entonces el límite es también continuo.

Ejercicio 2.26. Sean X, Y, Z espacios de Banach, y sea $B : X \times Y \to Z$ una función bilineal tal que para cada $y \in Y$ entonces $B(\cdot, y) : X \to Z$ es continua y para cada $x \in X$, $B(x, \cdot) : Y \to Z$ es continua. Muestre que B es continua. *Recuerde que en $X \times Y$ se utiliza la norma producto $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.*

Ejercicio 2.27. Sea $1 \le p \le \infty$ y considere $X = \ell^p$ equipado con su norma.

1. Defina $L : X \to X$ tal que si $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ entonces $L(x) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Muestre que L es lineal, continua, sobreyectiva, pero no inyectiva. Encuentre $\|L\|_{\mathcal{LC}(X,X)}$.

2. Defina $R : X \to X$ tal que si $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ entonces $R(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Muestre que R es lineal, continua, inyectiva, pero no sobreyectiva. Encuentre $\|R\|_{\mathcal{LC}(X,X)}$.

3. Calcule $L \circ R$ y $R \circ L$.

Ejercicio 2.28. Sea X un espacio vectorial normado, y sea $A \subseteq X$ un subespacio vectorial propio (es decir $A \neq X$). Muestre que A tiene interior vacío.

Ejercicio 2.29. 1. Muestre que para $1 \leq p < \infty$ las bases canónicas en ℓ^p son bases de Schauder.

2. Muestre que la base canónica no es base de Schauder para ℓ^∞.

3. Muestre que la base canónica no es base de Hamel para ningún ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 2.30. Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $0 < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$. Defina $x_1 = (a, b, 0, \ldots)$, $x_2 = (0, a, b, 0, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, a, b, 0, \ldots)$ y así sucesivamente. Muestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para ℓ^2.

Ejercicio 2.31. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión tal que $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ existe. Muestre que para cualquier función lineal continua $T : X \to Y$ se tiene que

$$T(s) = T\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} T(x_n).$$

Note que debe demostrar que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} T(x_n)$ es convergente a $T(s)$.

Ejercicio 2.32. Suponga que X es un espacio vectorial (real) que tiene una norma $\|\cdot\|$ que satisface la ley del paralelogramo

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

para todo $a, b \in X$. Definamos

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

El propósito de este problema es demostrar que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ define un producto interno sobre X y que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

1. Verifique que $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

2. Demuestre que para todo $x, y \in X$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle y, x\rangle\\ \langle -x, y\rangle &= -\langle x, y\rangle\\ \langle x, 2y\rangle &= 2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

3. Demuestre que para todo $x, y, z \in X$

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

Ayuda: Use la ley del paralelógramo para $a = x, b = y$, luego para $a = x + z, b = y + z$, y finalmente para $a = x + y + z, b = z$.

4. Demuestre que para todo $x, y \in X, k \in \mathbb{R}$

$$\langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle$$

Ayuda: Considere primero el caso $k \in \mathbb{N}$, luego $k \in \mathbb{Q}$ y finalmente $k \in \mathbb{R}$.

5. Concluya.

Ejercicio 2.33. Sea $p \neq 2$ y considere $\mathbb{R}^2$ equipado con la norma $\|\cdot\|_p$. Muestre con un ejemplo que la ley del paralelogramo falla para esta norma. Concluya que la ley del paralelogramo no es cierta en ℓ^p con la norma $\|\cdot\|_p$.

Esto nos dice que $\|\cdot\|_p$ no puede venir de un producto interno.

Ejercicio 2.34. Demuestre el Lema 2.26.

Ejercicio 2.35. Muestre que si E es un subespacio vectorial, entonces $E^\perp$ también es un subespacio vectorial.

Ejercicio 2.36. Sea H un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sean $T, S : H \to H$ dos funciones lineales que satisfacen

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle \quad \forall\, x, y \in H.$$

Demuestre que $\|T\| = \|S\|$.

Ejercicio 2.37. Sea H un espacio de Hilbert y sea $E \subseteq H$ un conjunto cualquiera. Demuestre que $(E^\perp)^\perp$ es el subespacio cerrado de H mas pequeño que contiene a E. Concluya que si E es un subespacio vectorial cerrado de H entonces $(E^\perp)^\perp = E$.

Ejercicio 2.38. Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que $P \in \mathcal{LC}(H, H)$ es una proyección si satisface $P \circ P = P$. Si $I : H \to H$ es la función identidad, demuestre las siguientes propiedades:

1. $I - P$ es una proyección.
2. $\ker(I - P) = R(P)$ y $\ker(P) = R(I - P)$.
3. $\ker(P) \cap \ker(I - P) = \{0\}$.
4. $H = \ker(P) \oplus \ker(I - P)$.

Dado una función lineal $T : X \to Y$, se definen

$$\ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}\,,$$
$$R(T) = \{Tx \in Y : x \in X\}\,.$$

Ejercicio 2.39. Sea (x_n) una sucesión en un espacio vectorial (real) H con producto interno tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente. Muestre que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, x \rangle = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, x \right\rangle$$

para todo $x \in H$.

Ejercicio 2.40. Muestre que el espacio

$$c_0 = \left\{ (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

es denso en $\ell^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2.41. Demuestre que el conjunto D definido en la Proposición 2.34 es denso.

Ejercicio 2.42. Sea H un espacio de Hilbert complejo.

1. Para cada $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

2. Sea $\tilde{H}$ otro espacio de Hilbert y consideremos $L : H \to \tilde{H}$ una función lineal. Entonces

$$L \text{ es unitario} \Leftrightarrow L \text{ es una isometría sobreyectiva.}$$

Ejercicio 2.43. Sea H un espacio de Hilbert real y considere $T \in \mathcal{LC}(H, H)$. Defina $T^\dagger : \mathcal{LC}(H, \mathbb{R}) \to \mathcal{LC}(H, \mathbb{R})$ como $T^\dagger(f) = f \circ T$, esto es, si $f \in \mathcal{LC}(H, \mathbb{R})$ entonces $T^\dagger f \in \mathcal{LC}(H, \mathbb{R})$ y para cada $x \in H$

$$T^\dagger f(x) = f(Tx).$$

1. Justifique que $T^\dagger$ es una función lineal.
2. Demuestre que $\|T^\dagger\| \leq \|T\|$. *Tenga cuidado con las definiciones de cada norma*.
3. Sea $U : H \to \mathcal{LC}(H, \mathbb{R})$ la isometría definida en el Teorema de Riesz-Fréchet, es decir: si $b \in H$, entonces $U(b) \in \mathcal{LC}(H, \mathbb{R})$ y para cada $x \in H$ se tiene que

$$U(b)(x) = \langle x, b \rangle .$$

   Defina $T^* = U^{-1} \circ T^\dagger \circ U : H \to H$ y demuestre que para cada $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle .$$

4. Defina $T^{**} = U^{-1} \circ (T^*)^\dagger \circ U$. Muestre que $T^{**} = T$.

Bibliografía

1. Apostol, T. M. *Mathematical analysis* Second, xvii+492 (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974).
2. Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* xiv+599. isbn: 978-0-387-70913-0 (Springer, New York, 2011).
3. Dieudonné, J. *Foundations of modern analysis* Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I, xviii+387 (Academic Press, New York-London, 1969).
4. Folland, G. B. *Real analysis* Second. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication, xvi+386. isbn: 0-471-31716-0 (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999).
5. Kelley, J. L. *General topology* Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27, xiv+298 (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975).
6. Munkres, J. R. *Topology: a first course* xvi+413 (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975).
7. Royden, H. L. *Real analysis* Third, xx+444. isbn: 0-02-404151-3 (Macmillan Publishing Company, New York, 1988).
8. Rudin, W. *Principles of mathematical analysis* Third. International Series in Pure and Applied Mathematics, x+342 (McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976).
9. Rudin, W. *Functional analysis* Second, xviii+424. isbn: 0-07-054236-8 (McGraw-Hill, Inc., New York, 1991).
10. Zorich, V. A. *Mathematical analysis II* Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Paperback reprint [of MR2033095], xvi+681. isbn: 978-3-540-87453-9 (Springer-Verlag, Berlin, 2009).