Cálculo Diferencial e Integral

Hernán Castro Z.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE TALCA
http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro.
hcastro@utalca.cl.

Template de LaTeX 2_ε creado por Hernán Castro Z..

Edición del 23 de marzo de 2022

Índice general

I Cálculo en una variable

1. Cálculo diferencial ... **3**
1.1 Funciones exponenciales y logarítmicas. ... **3**
1.2 Algunas herramientas de cálculo ... **5**
1.2.1 Derivadas ... 5
1.2.2 Algunos conceptos relativos a la derivada. ... 7
1.3 Optimización en una variable ... **12**
1.4 Razón de cambio ... **19**
1.5 Análisis Marginal y aproximación de funciones ... **22**
1.6 Nociones básicas de modelamiento matemático ... **26**
1.7 Modelos exponenciales y logarítmicos ... **27**
1.8 Ajuste de curvas ... **33**
1.8.1 Ajuste de rectas: recta de mínimos cuadrados (RMC) ... 34
1.8.2 Ajustes no lineales ... 37
2. Cálculo integral ... **43**
2.1 Antiderivadas, integral indefinida ... **43**
2.2 Reglas básicas de integración ... **45**
2.3 Métodos de integración ... **48**
2.3.1 Sustitución o cambio de variables ... 48
2.3.2 Integración por partes ... 49
2.3.3 Fracciones parciales ... 51
2.3.4 Integrales trigonométricas y sustituciones trigonométricas ... 54
2.4 Sumatorias ... **57**
2.5 Integral definida ... **58**
2.5.1 Aproximando áreas ... 58
2.5.2 La integral definida ... 65
2.6 Sumas de Riemann ... **67**
2.7 El teorema fundamental del cálculo ... **70**
2.8 Área entre curvas ... **74**

2.9 Volúmenes **76**
2.9.1 Sólidos de revolución 77
2.9.2 Rotación en torno al eje y 82
2.10 Promedio de una función y el teorema del valor medio integral **86**
2.11 Integrales impropias **88**
2.11.1 Intervalos infinitos 88
2.11.2 Función infinita en un intervalo finito 89
3. Series y series de potencias **93**
3.1 Sucesiones **93**
3.2 Series **96**
3.2.1 Criterio de la integral 100
3.2.2 Error 102
3.2.3 Criterios de comparación 102
3.3 Series de potencias **107**
3.4 Funciones que se expresan como series de potencias **109**
3.5 Series de Taylor **111**

II Cálculo en varias variables

4. Cálculo diferencial en varias variables **119**
4.1 Funciones de dos variables **119**
4.1.1 Propiedades 122
4.1.2 Gráficos de funciones 122
4.2 Derivadas parciales **123**
4.2.1 Aplicaciones 124
4.2.2 Derivadas de orden superior 124
4.2.3 Regla de la cadena 125
4.2.4 Derivación implícita 127
5. Optimización en varias variables **129**
5.1 Optimización de funciones de dos variables **129**
5.1.1 Extremos relativos y puntos críticos en dos variables 130
5.2 Optimización aplicada **134**
5.3 Optimización con restricciones **137**
5.3.1 Multiplicadores de Lagrange 138
5.4 Programación lineal **140**
5.5 Solución gráfica de problemas de programación lineal en dos variables . **141**
5.6 Modelos de programación lineal en dos variables **143**

Prefacio

Este apunte ha sido confeccionado para diversos cursos dictados en la Universidad de Talca. El propósito de este escrito es recopilar materias expuestas en diversos libros y organizarlas en la manera presentada en estos cursos por el autor.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos pueden estar incompletos.

I
Cálculo diferencial e integral en una variable

Capítulo 1

Cálculo diferencial

1.1. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Definición 1.1 (Funciones exponenciales)**.** *Dado* $b > 0$*, denotado como* base*, existe una única función* $f(x)$*, denotada como* función exponencial de base b *tal que*

$$f(x) = b^x.$$

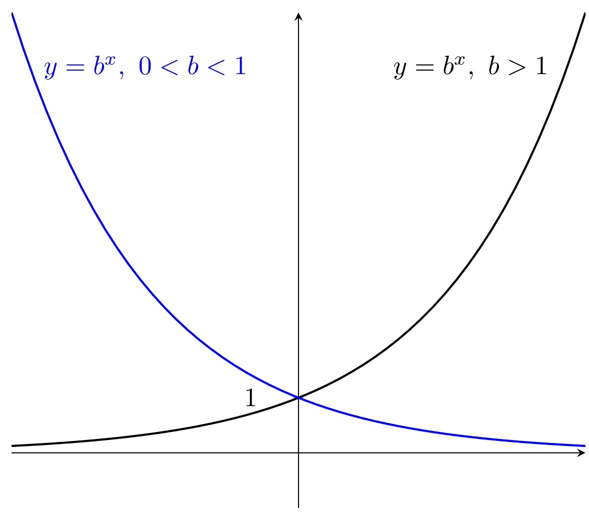


Figura 1.1: Gráfico de funciones exponenciales.

Observación 1.1. Cosas a recordar: Suponga que $a,\ b > 0$, entonces

1. $b^x = b^y$ entonces $x = y$.
2. $a^x = b^x$ entonces $a = b$.
3. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$.
4. $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$.
5. Si $a > 0$, entonces $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.
6. $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$.

Si $b > 1$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to\infty} b^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} b^{-x} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} b^{-x} = +\infty$.

Un caso muy importante es el que se produce cuando $b = e \approx 2{,}7182\ldots$. Esto pues la función $f(x) = e^x$ es la *única* función que satisface $f'(x) = f(x)$, por esto (y otras razones), es que e se denomina la base *natural*.

Ejemplo 1.1. Se estima que en t años la población de cierto país será de $P(t) = 50e^{0{,}02t}$ millones de personas.

1. ¿Cuál es la población actual?
2. ¿Cuál será la población en 30 años?

Solución.

1. La población inicial es cuando $t = 0$, o sea $P(0) = 50$ millones de personas.
2. En 30 años la población será de $P(30) = 50e^{\frac{3}{5}} \approx 91{,}11$ millones de personas.

Definición 1.2 (Funciones logarítmicas)**.** *Dado* $b > 0$*, denotado como* base*, existe una única función* $f(x)$*, denotada como* función logarítmica de base b *tal que*

$$f(x) = \log_b x.$$

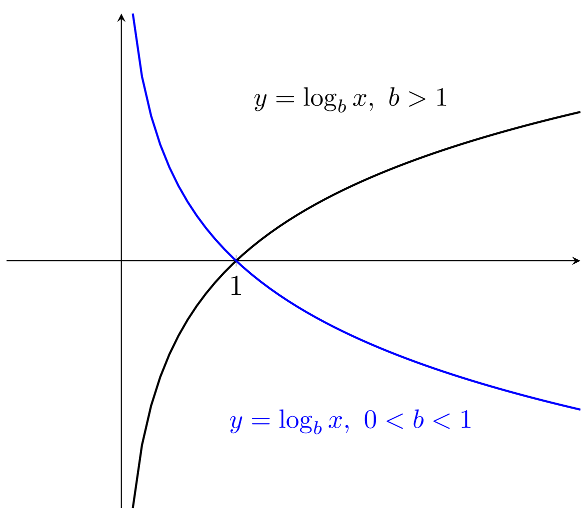


Figura 1.2: Gráfico de funciones logarítmicas.

Observación 1.2*.* Cosas a recordar: suponga que $a,\ b > 0$.

1. Si $\log_b x = \log_b y$ entonces $x = y$.
2. Si $\log_a x = \log_b x$ entonces $a = b$.
3. $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$.
4. $\log_b x^y = y \log_b x$.
5. Función inversa: $\log_b b^x = x$ y $b^{\log_b x} = x$.
6. Cambio de base: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Si $b > 1$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_b x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$.

Al igual que antes, distinguimos el caso en que $b = e$, y denotamos por $\ln x = \log_e x$ y denominamos a esta función como *logaritmo natural*.

Dado que lo necesitaremos, recordemos las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Teorema 1.1 (Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas)**.** *Sea $b > 0$, entonces*

1. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
2. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$,
3. $\dfrac{d}{dx}(b^x) = e^x \cdot \ln b$,
4. $\dfrac{d}{dx}(\log_b x) = \dfrac{1}{\ln b} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Ejercicio 1.1. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $3 = e^{20x}$.
2. $2 \ln x = 1$.
3. $2^{x^2+x} = 4$.
4. $\ln(x-2) + 3 = \ln(x+1)$.
5. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Hint: Defina $u = e^x$.

Ejercicio 1.2. Simplifique las siguientes expresiones sin usar calculadora.

1. $e^{3\ln 4} - 3\log_2 16$.
2. $\ln(9e^2) + \ln(3e^{-2})$.

Ejercicio 1.3. Cuando una cadena, cable telefónico o similar es colgado entre dos postes, la curva que se forma es una *catenaria*. Una catenaria típica esta dada por la fórmula

$$C(x) = \frac{1}{8}\left(e^{4x} + e^{-4x}\right)$$

1. Encuentre el mínimo de esta catenaria cuando $-10 < x < 10$.
2. Bosqueje el gráfico de $C(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. ¿Cuál es la altura mínima a la que se puede colgar un cable modelado por esta catenaria en $[-2, 2]$, para que el cable no toque el suelo?

Ejercicio 1.4. Bosqueje el gráfico de las siguiente funciones, identificando puntos críticos, puntos de inflexión y máximos/mínimos si es que los hubiese.

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$
2. $g(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^2}$, $x > 0$.
3. $h(x) = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$, $x \geq 0$.

1.2. Algunas herramientas de cálculo

1.2.1. Derivadas

Definición 1.3. *Dada una función f definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, definimos la* derivada *de f en $x_0 \in I$ como*

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Observación 1.3.

- El límite en la definición de la derivada, puede no existir. Si este es el caso, decimos que la función no es diferenciable en x_0.
- Es importante recordar que la derivada de una función tiene varias interpretaciones. En primer lugar, si tenemos dos variables x, y relacionadas por una función f, es decir, $y = f(x)$, entonces $f'(x_0)$ representa la tasa instantánea de cambio de la variable y con respecto a la variable x en el instante x_0.
- Otra interpretación de la derivada se puede obtener al observar el gráfico de la función f. En este caso, el valor $f'(x_0)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Ver figura 1.3 para visualizar este punto.

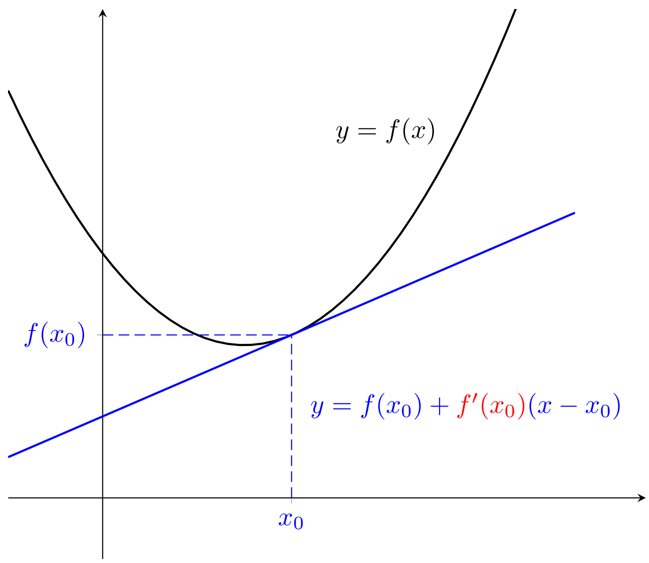


Figura 1.3: La derivada es la pendiente de la recta tangente.

Para efectos prácticos, no utilizamos la definición formal de la derivada, por el contrario, debemos conocer las derivadas de ciertas funciones básicas, y las reglas para obtener derivadas de funciones generadas a partir de estas funciones básicas.

Dentro de las funciones básicas consideramos: polinomios, funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales. Así como se debe saber calcular la derivadas de funciones generadas a partir de las anteriores mediante operaciones entre funciones: sumas, restas, productos (regla del producto), cocientes (regla del cociente), composiciones (regla de la cadena).

El siguiente ejemplo ilustra alguno casos:

Ejemplo 1.2. Encontrar la derivada de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}}{\ln(\tan x) + x^5}$.

Solución. Para encontrar la derivada iremos paso a paso:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}}{x \cdot \ln x + x^5}\right)' \\ &= \frac{\left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right)' \cdot (x \cdot \ln x + x^5) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot (x \cdot \ln x + x^5)'}{(x \cdot \ln x + x^5)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left((\operatorname{sen} x)' + \left(e^{x^2+4}\right)'\right) \cdot (x \cdot \ln x + x^5) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot \left((x \cdot \ln x)' + (x^5)'\right)}{(x \cdot \ln x + x^5)^2}$$
$$= \frac{\left(\cos x + 2x \cdot e^{x^2+4}\right) \cdot (x \cdot \ln x + x^5) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot ((\ln x + 1) + 5x^4)}{(x \cdot \ln x + x^5)^2}$$

Otro tipo de derivadas que debemos ser capaces de calcular, es aquella que requiere derivación implícita: cuando la variable dependiente y la variable independiente están relacionadas mediante una ecuación.

Ejemplo 1.3. Calcular la derivada de y en términos de x e y, cuando $x^2 y + \tan y = \log_2(xy)$.

Solución. En esto casos debemos derivar ambos lados de la ecuación con respecto a la variable x, asumiendo que y depende de x. El principal cuidado que debemos tener es que siempre asumimos que y es una función que depende de x, por lo que la derivada de y es entonces $\dfrac{dy}{dx}$, y para obtener la derivada de funciones de y debemos usar la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 y + \tan y\right) = \frac{d}{dx}\left(\log_2(xy)\right)$$
$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy \ln 2}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right),$$

de donde deducimos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{x \ln 2} - 2xy}{x^2 + \sec^2 y - \dfrac{1}{y \ln 2}}.$$

Ejercicio 1.5. Calcule las derivadas de:

1. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.
2. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^5} + \sqrt[3]{x+1} + x \cos x$.
4. $f(x) = e^{2x}$.
5. $f(x) = 2^{2x}$.
6. $f(x) = \ln(x^5)$.
7. $f(x) = (\ln(x))^5$.
8. $f(x) = \log_2 x$.
9. $f(t) = \dfrac{A}{1 + Ce^{-kt}}$, donde A, C y k son constantes positivas.

Ejercicio 1.6. Dada la relación entre x e y, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $x^2 + y^2 = R^2$, donde R es una constante positiva.
2. $yx^2 + \ln y = \cos(xy)$.
3. $\dfrac{x^2 + \frac{1}{3}y^3}{x - y} = 10$.

1.2.2. Algunos conceptos relativos a la derivada.

Definición 1.4 (Números y puntos críticos). *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, decimos que $c \in I$ es un* ***número crítico*** *para la función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si:*

1. $f'(c)$ no esta definido, ó

2. $f'(c)$ *está definido y* $f'(c) = 0$.

Además, si c *es un número crítico, decimos que el par* $(c, f(c))$ *es un* ***punto crítico*** *para la función.*

Ejemplo 1.4. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 3\pi)$.

Solución. La derivada de la función f está dada por $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, que está definida en todo el intervalo, luego para encontrar los puntos críticos, debemos resolver la ecuación

$$-\operatorname{sen} x = 0.$$

Si resolvemos la ecuación nos damos cuenta que el conjunto solución está dado por todos los múltiplos enteros de π, es decir $\{\ldots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots\}$, de los cuales sólo $\{0, \pi, 2\pi\}$ pertenecen al intervalo en cuestión. Luego los puntos críticos son exactamente: $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ y $(2\pi, 1)$. ■

Ejemplo 1.5. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1)$.

Solución. En este caso, la función $|x|$ no es diferenciable en $c = 0$ (¿Por qué?). Por lo que tenemos que 0 es un punto crítico. Por otra parte, cuando $x \neq 0$, la derivada de $|x|$ nunca se anula (¿Por qué?), de donde deducimos que el único punto crítico de la función es $(0, 0)$. ■

Definición 1.5 (Monotonía de funciones)**.** *Dado un intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *y una función* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Decimos que:*

- *una función es creciente, si cada vez que* $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) < f(x_2)$.
- *una función es decreciente, si cada vez que* $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 1.6. Determine donde la función $f(x) = x^2 - x$ es creciente, y donde es decreciente.

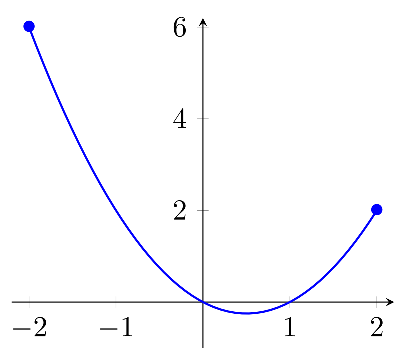


Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = x^2 - x$ en $[-2, 2]$.

¿Cómo determinamos si una función es creciente o decreciente?

Teorema 1.2 (Test de la primera derivada para determinar monotonía)**.** *Dado un intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *y una función diferenciable* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Tenemos que:*

- f *es creciente en el intervalo* I, *si* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$.
- f *es decreciente en el intervalo* I, *si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$.

Solución (Ejemplo 1.6). Calculamos la derivada de f y obtenemos $f'(x) = 2x - 1$. Para determinar el tipo de monotonía de la función, debemos analizar el signo de f. Para ello encontramos los puntos críticos, en este caso solo hay uno $x = \frac{1}{2}$, y dividimos el intervalo en cuestión usando los puntos críticos:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$2x-1$	$-$	decreciente
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$2x-1$	$+$	creciente

■

Definición 1.6 (Extremos relativos)**.** *Decimos que una función f tiene un*

- *máximo relativo en x_0, si es que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x e un intervalo $a < c < b$.*
- *mínimo relativo en x_0, si es que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x e un intervalo $a < c < b$.*

Ejemplo 1.7. Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x$.

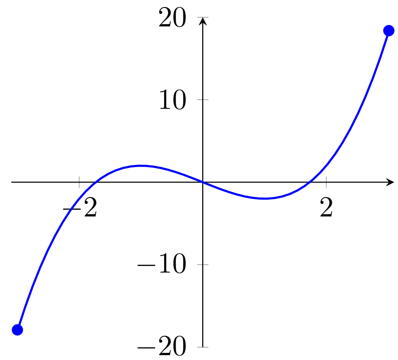


Figura 1.5: Gráfico de $x^3 - 3x$ en $[-3, 3]$.

¿Cómo encontrar extremos relativos?

Teorema 1.3 (Test de la primera derivada para extremos relativos)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que:*

- *x_0 es un máximo relativo para f, si es que $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0.*
- *x_0 es un mínimo relativo para f, si es que $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0.*

Solución (Ejemplo 1.7). Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 3$, de donde obtenemos 2 puntos críticos: $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. Tenemos la siguiente tabla:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$
$(-\infty, -1)$	$3(x+1)(x-1)$	$+$
$(-1, 1)$	$3(x+1)(x-1)$	$-$
$(1, \infty)$	$3(x+1)(x-1)$	$+$

de donde concluimos que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. ■

Definición 1.7 (Convexidad y concavidad)**.** *Decimos que*

- *una función f es convexa, si es que $f'(x)$ es creciente en el intervalo.*
- *una función f es cóncava, si es que $f'(x)$ es decreciente en el intervalo.*

Teorema 1.4 (Test de la segunda derivada para determinar convexidad o concavidad)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función dos veces diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que:*

- *f es convexa en el intervalo I, si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$.*
- *f es cóncava en el intervalo I, si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$.*

Definición 1.8 (Puntos de inflexión)**.** *Decimos que f tiene un punto de inflexión en el c si es que la convexidad de la función cambia, es decir, si es que*

- *f es convexa a la izquierda de c y cóncava a la derecha de c, ó*
- *f es cóncava a la izquierda de c y convexa a la derecha de c.*

Teorema 1.5 (Test de la segunda derivada para encontrar puntos de inflexión)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos si que c es un punto de inflexión, entonces*

- *$f''(c)$ no existe, ó*
- *$f''(c)$ existe y $f''(c) = 0$.*

Ejemplo 1.8. Sea $f(x) = x^3 - 3x$ definida sobre todos los reales. Determine donde la función es cóncava y donde es convexa. Además encuentre los puntos de inflexión.

Solución. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 3$, por lo que $f''(x) = 6x$ para todo x. Por lo tanto tenemos un posible punto de inflexión en $(0, 0)$.

intervalo	$f''(x)$	signo de $f''(x)$
$(-\infty, 0)$	$6x$	$-$
$(0, \infty)$	$6x$	$+$

De donde deducimos que f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Además $(0, 0)$ es un punto de inflexión. ■

Teorema 1.6 (Test de la segunda derivada para extremos relativos)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función 2 veces diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que si $x_0 \in I$ satisface $f'(x_0) = 0$, entonces*

- *x_0 es un máximo relativo para f, si es que $f''(x_0) < 0$.*
- *x_0 es un mínimo relativo para f, si es que $f''(x_0) > 0$.*

Ejemplo 1.9. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$ definida sobre todos los reales. Encuentre los extremos relativos de esta función e identifique los máximos y mínimos relativos.

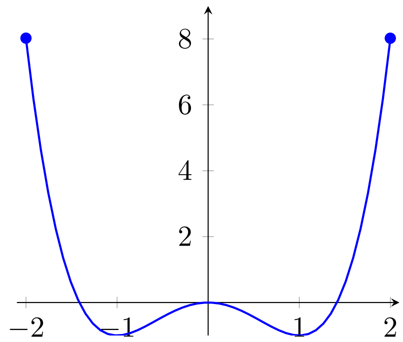


Figura 1.6: Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $[-2, 2]$.

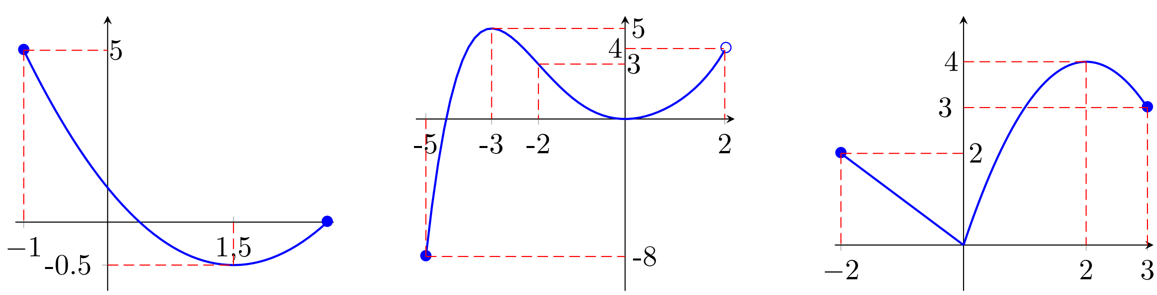
Solución. Primero identificamos los puntos críticos usando la derivada de f, que se puede escribir como $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$, de donde deducimos que hay solo 3 números críticos: $c = -1$, $c = 0$ y $c = 1$.

Para identificar los extremos relativos, calculamos la segunda derivada, $f''(x) = 12x^2 - 4$ y evaluamos los puntos críticos, donde obtenemos

$f''(x)$	$f''(c)$
$12x^2 - 4$	8
$12x^2 - 4$	-4
$12x^2 - 4$	8

De donde concluimos que f tiene mínimos relativos cuando $c = -1$ y $c = 1$; y un máximo relativo cuando $c = 0$. ■

Ejercicio 1.7. Dado los gráficos de la figura 1.7, identifique: intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad, concavidad, puntos críticos, puntos de inflexión, extremos relativos y absolutos.



(a) (b) (c)

Figura 1.7: Gráficos para el ejercicio 1.7

Ejercicio 1.8. Dada la función $f(x)$, determine: puntos críticos; intervalos de crecimiento y decrecimiento; intervalos de convexidad y concavidad y puntos de inflexión. Finalmente haga un bosquejo del gráfico de la función utilizando la información anterior.

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1, 2)$.
2. $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ en $[-2, 2]$.
3. $f(x) = -\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{3}x - 2$ en $[0, 4]$.
4. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x-5)$ definida sobre todos los reales.
5. $f(x) = e^{-x} + x$ en $[0, 10]$.

1.3. Optimización en una variable

Definición 1.9 (Máximos y mínimos absolutos)**.** *Sea f una función definida en un intervalo I que contiene a un número c. Decimos que:*

- *$f(c)$ es el máximo absoluto de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I, y*
- *$f(c)$ es el mínimo absoluto de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.*

Habitualmente, los extremos absolutos coinciden con los extremos relativos, sin embargo, hay ocasiones donde esto no ocurre. A continuación veremos como determinar los extremos absolutos de una función

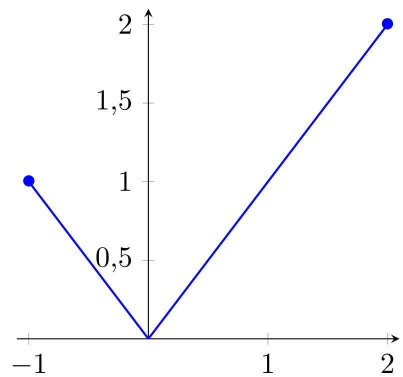


Figura 1.8: Gráfico de $f(x) = |x|$ en $[-1, 2]$

dada. En primer lugar, consideraremos el caso en que el intervalo I es un intervalo cerrado $[a, b]$.

Teorema 1.7 (Teorema del Valor extremo)**.** *Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza sus valores extremos en el intervalo.*

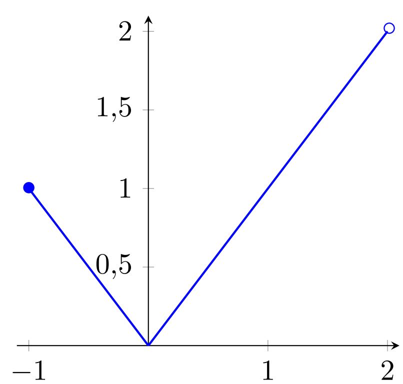


Figura 1.9: Gráfico de $f(x) = |x|$ en $[-1, 2)$. Notar que esta función no alcanza su máximo.

Gracias a este teorema, encontrar valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es relativamente directo:

1. Verificamos que la función es continua y que el intervalo es cerrado.
2. Encontramos los números críticos para la función f.
3. Calculamos los valores de f en los números críticos; además calculamos $f(a)$ y $f(b)$,
4. El mayor de los valores obtenidos en el paso anterior es el máximo absoluto, y el menor de los valores es el mínimo absoluto.

Ejemplo 1.10. Encontrar los valores extremos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ en el intervalo $[-3, 0]$.

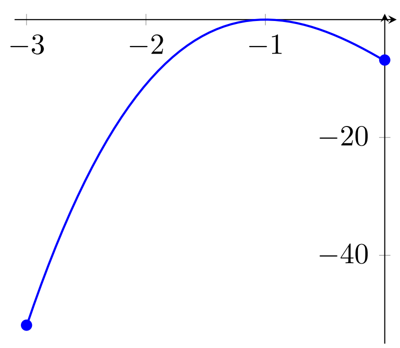


Figura 1.10: Gráfico de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ en $[-3, 0]$

Solución. Siguiendo el procedimiento, primero nos damos cuenta que la función es un polinomio, por lo tanto es continua. Luego debemos encontrar los números críticos de f, para ello calculamos $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$ y nos percatamos que solo hay dos posibles candidatos: $c = -1$ y $c = 2$. Sin embargo, $c = 2$ no pertenece al intervalo, por lo cual no lo consideramos. Finalmente calculamos los valores de f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$f(x)$	c	$f(c)$
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	-3	-52
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	-1	0
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	0	-7

De donde deducimos que el máximo absoluto es 0 y se alcanza cuando $x = -1$. El mínimo absoluto es -52 y se alcanza cuando $x = -3$.

■

También estaremos interesados en encontrar los valores extremos de funciones que no están definidas en intervalos cerrados, en cuyo caso, no tenemos garantizada la existencia de dichos valores extremos, ya que el Teorema del valor extremos no aplica.

Para encontrar los valores extremos en estos casos, procedemos a encontrar los números críticos y evaluamos la función en ellos, junto con los extremos del intervalo (si los hubiese). Sin embargo, para poder concluir, necesitamos hacer una análisis extra, usando la primera o la segunda derivada de la función: Análisis del gráfico.

***Ejemplo 1.11*.** Sea $f(t) = t^3 - \dfrac{21}{2}t^2 + 30t + 20$. Encuentre, si es que los hubiese, el máximo y mínimo absoluto de la función f en el intervalo $t \geq 2$.

***Solución*.** En este caso el intervalo es no-acotado, por lo que la existencia de los valores extremos no está garantizada. Para buscar los valores extremos, primero determinamos los números críticos: $f'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 3(t^2 - 7t + 10) = 3(t-2)(t-5)$. De donde deducimos que hay 2 números críticos: $t = 2$ y $t = 5$. Para saber si estamos en presencia de máximos o mínimos, debemos estudiar mas a fondo la función. En primer lugar analizamos la primera derivada en cada sub-intervalo

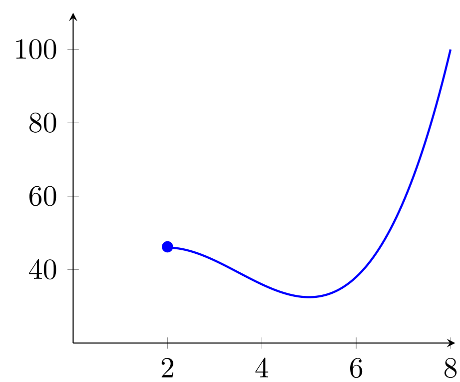


Figura 1.11: Gráfico de $f(t) = t^3 - \dfrac{21}{2}t^2 + 30t + 20$ para $t \geq 2$.

intervalo	$f'(t)$	signo de $f'(t)$
$(2, 5)$	$3(t-2)(t-5)$	$-$
$(5, \infty)$	$3(t-2)(t-5)$	$+$

de donde podemos deducir de inmediato que $t = 5$ es un mínimo absoluto, ya que f es decreciente para todo $t < 5$ y creciente para todo $t > 5$. Por otra parte, para $t = 2$ tenemos un máximo local que NO es un máximo absoluto, pues para $\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$ (ver Figura 1.11). ■

En resumen, podemos tenemos la siguiente guía para resolver problemas de optimización:

1. Identificar que es lo que se quiere maximizar o minimizar. Una vez hecho esto, asignar nombres a las variables de interés.

2. Expresar mediante ecuaciones o desigualdades las relaciones entre las variables. Usualmente una figura puede ayudar en este proceso.

3. Reducir la cantidad a ser optimizada para obtener una función de una sola variable independiente. Además se deben identificar posibles restricciones a dicha variable.

4. Si denotamos por $f(x)$ a la cantidad a ser optimizada, encontramos $f'(x)$ y determinamos todos los puntos críticos. Luego identificamos el valor requerido (máximo o mínimo) usando los métodos anteriormente expuestos.

5. Interpretar el resultado en términos del problema original.

Solución (Ejemplo 1.20). Recordar que ya realizamos los primeros 3 pasos y habíamos llegado a la conclusión de que queríamos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + \dfrac{800}{x}, \\ \text{sujeto a que } x > 0. \end{cases} \tag{P'}$$

Para resolver entonces consideramos $f(x) = 2x + \frac{800}{x}$ y calculamos $f'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}$, de donde obtenemos que el único punto crítico relevante está dado por $x = \sqrt{400} = 20$. Además observamos que cuando $x < 20$, la función es decreciente ($f'(x) < 0$) y cuando $x > 20$ la función es creciente ($f'(x) > 0$), de donde concluimos que $x = 20$ determina un mínimo absoluto para f. En otras palabras, necesitamos $2 \cdot 20 + \dfrac{800}{20} = 80$ metros de cerca y el corral tiene las dimensiones expresadas en la Figura 1.12.

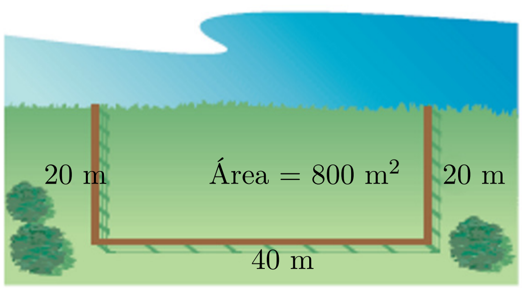


Figura 1.12: Dimensiones de la cerca ideal.

■

Ejemplo 1.12. Encontrar los valores extremos de la función $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ cuando $x > 0$.

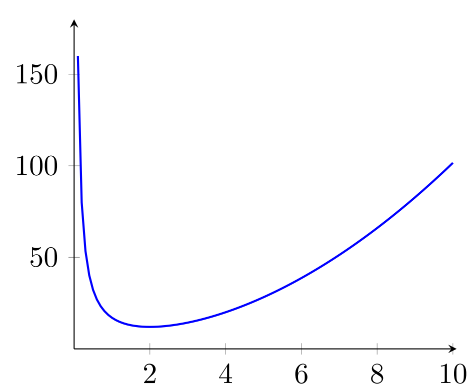


Figura 1.13: Gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ para $x > 0$.

Solución. Notar que la función es discontinua solo cuando $x = 0$, valor que no está incluido en el intervalo. Dicho esto, podemos calcular la derivada

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2\left(x^3 - 8\right)}{x^2}.$$

De aquí deducimos que $x = 2$ es el único número crítico para la función (observar que 0 no se encuentra en el intervalo de interés).

Para determinar si $x = 2$ es un extremo relativo, utilizaremos el test de la primera derivada:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$
$(0, 2)$	$\frac{2\left(x^3 - 8\right)}{x^2}$	$-$
$(2, \infty)$	$\frac{2\left(x^3 - 8\right)}{x^2}$	$+$

De donde podemos concluir que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$, además dado que la función es siempre decreciente cuando $x < 2$ y siempre creciente cuando $x > 2$, podemos concluir que en realidad f tiene un mínimo absoluto cuando $x = 2$. Por otra parte, dado que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, concluimos que f no tiene máximo absoluto. ■

Ejemplo 1.13. Un agricultor estima que si planta 60 naranjos, entonces la cosecha será de 400 naranjas por árbol. La cosecha disminuirá 4 naranjas por árbol si es que se planta 1 árbol adicional. ¿Cuántos árboles deben plantarse para maximizar la cosecha?

Solución. Nuestro objetivo es maximizar la cosecha, por lo que debemos expresar la cosecha como una función:

$$\text{cosecha total} = (\text{cantidad de árboles}) \cdot (\text{cosecha por árbol}),$$

Observemos que la cantidad de árboles puede ser expresada como $60 + x$, donde cada x denota un árbol plantado en adición a los 60, y que la cantidad de naranjas puede ser expresada como $400 - 4x$, es decir, nuestra función queda:

$$C(x) = (60 + x)(400 - 4x) = 4(6000 + 40x - x^2).$$

A continuación identificamos restricciones sobre las variables, que en nuestro caso es x. Como dijimos, cada x representa un árbol plantado, con la observación de que x puede ser negativo, en cuyo caso indica que se debe cortar un árbol. Dado que inicialmente tenemos 60 árboles, la restricción es que $x \geq -60$ (no podemos cortar mas árboles de los que tenemos).

Es decir nuestro problema queda

$$\begin{cases} \text{maximizar } C(x) = 4(6000 + 40x - x^2) \\ \text{sujeto a que } x \geq -60. \end{cases}$$

Para resolver esto, calculamos $C'(x) = 8(20 - x)$, y deducimos que solo hay un número crítico: $c = 20$. Dado que nuestro intervalo es no acotado, debemos hacer determinar si este número crítico es un máximo o mínimo usando los test de la primera o segunda derivada.

Si calculamos la segunda derivada, notamos que $C''(x) = -8 < 0$ para todo x, por lo tanto deducimos que $c = 20$ es un máximo relativo. Para determinar si es que es un máximo absoluto observamos que la función es creciente para todo $x < 20$ y decreciente para todo $x > 20$. En conclusión, podemos decir que la cosecha se maximiza si plantamos 20 árboles adicionales, es decir, si tenemos una plantación de 80 árboles. ■

Ejercicio 1.9. El granjero del ejemplo 1.20, al no saber técnicas de optimización, compró para su corral de caballos 200 metros de cerca. Como vimos anteriormente, la cantidad óptima necesitada es de solo 80 metros, por lo que le sobraron 120 metros de cerca. Ante esto, decide que es tiempo de construir un nuevo corral para sus chanchos y vacas. Dado que esta vez no quiere desaprovechar nada, le pregunta a los estudiantes de este curso ¿Cuál es el área máxima que puede cercar utilizando los 120 metros de cerca?. Resuelva este problema bajo el supuesto de que los corrales son rectangulares y que están dispuestos como indica la figura 1.14.

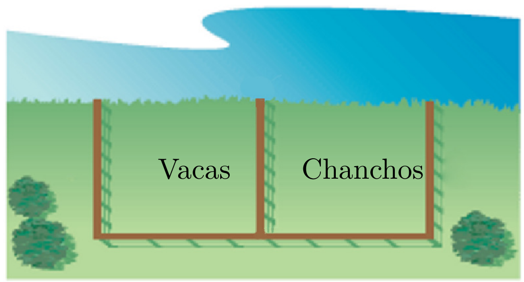


Figura 1.14: Corral para chanchos y vacas.

Ejercicio 1.10. Se desea construir una caja con tapa utilizando un cartón rectangular que mide 5 metros por 8 metros. La caja se realiza cortando las regiones sombreadas y luego doblando por la lineas punteadas (Ver figura 1.15). ¿Cuáles son las dimensiones x, y, z que maximizan el volumen de la caja?

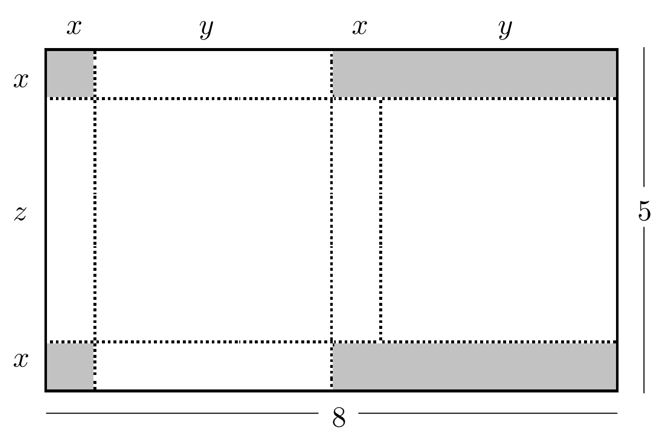


Figura 1.15: Diagrama para el ejercicio 1.10.

Ejercicio 1.11. Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen, y su base es paralela al eje x con los extremos ubicados en la curva $12y = 36 - x^2$. Determine las dimensiones del triángulo de área máxima bajo dichas condiciones. Ver figura 1.16.

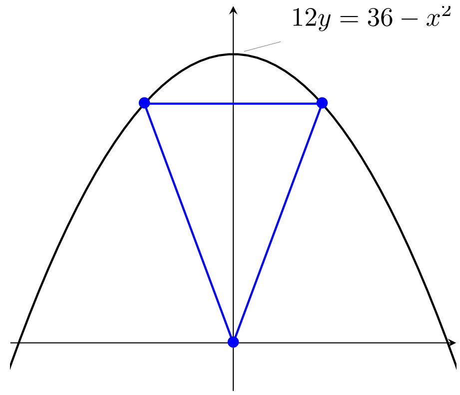


Figura 1.16: Diagrama para el ejercicio 1.11

Ejercicio 1.12. El gerente de una fábrica estima que cuando q miles de unidades de un producto son producidas cada mes, el costo de la producción será de $C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$ miles de pesos. Además estima que las q unidades serán vendidas a un precio de $p(q) = 22{,}2 - 1{,}2q$ miles de pesos por unidad.

1. Determine el nivel de producción que le otorgará la mayor ganancia a la empresa. ¿Cuánto es dicha máxima ganancia?. Hint: La ganancia es igual a los ingresos menos los costos.

2. ¿A qué nivel de producción se minimiza el costo promedio por unidad? Hint: El costo promedio está dado por $\dfrac{C(q)}{q}$.

Ejercicio 1.13. La ley de Poiseuille dice que la rapidez de la sangre que fluye a r centímetros del eje central de una arteria de radio R está dada por

$$S(r) = c(R^2 - r^2),$$

donde c es una constante positiva. Determine a que distancia del eje central de la arteria la sangre fluye con mayor rapidez. Hint: R y c son constantes conocidas, por lo que su respuesta debe ser en términos de c y R.

Ejercicio 1.14. La reacción del cuerpo humano a algunas sustancias psicotrópicas se puede modelar mediante la ecuación

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

donde D es la dosis y C es una constante que indica la máxima dosis que se puede dar. La tasa de cambio de R con respecto a D se denomina *sensibilidad*.

1. Encuentre el valor de D para el cual la sensibilidad es mayor. ¿Cuál es la máxima sensibilidad? Hint: Su respuesta debe estar en términos de C.

2. ¿Cual es la reacción cuando se utiliza la dosis obtenida anteriormente?

Ejercicio 1.15. Debemos construir un tambor cilíndrico para guardar V cm^3 de agua (V es una cantidad fija conocida). En virtud que queremos que el tambor nos dure bastante tiempo, decidimos que este sea construido con acero inoxidable, pero como dicho material es caro, decidimos colocarle una tapa de plástico. El costo del acero inoxidable es \$300 por centímetro cuadrado, en tanto que el costo del plástico es de \$100 por centímetro cuadrado. Determine las medidas del tambor (alto y radio de la base) que nos hacen gastar la menor cantidad de dinero.

Ejercicio 1.16. Una empresa de buses interurbanos arrienda sus buses de 50 pasajeros para viajes especiales a grupos de mas de 35 personas. Si un grupo de 35 personas solicita el servicio, entonces cada persona debe pagar \$6.000. Para grupos mas grandes, el costo por pasajero se reduce en \$50 por cada persona adicional a los 35 (es decir, si hay 36 personas, cada persona cancela \$5.950, si hay 37, entonces cada persona cancela \$5.900, etc.). Determine la cantidad de pasajeros que hacer que la empresa de buses reciba la mayor cantidad de dinero. Hint: Recuerde que deben viajar un número *entero* de personas.

Ejercicio 1.17. Una empresa de bebidas gaseosas desea introducir al mercado el formato de bebidas de 500 cm^3 enlatadas. Determine las dimensiones de la lata de modo que esta utilice la menor cantidad de material para su construcción. Hint: la superficie de un cilindro se puede calcular como la suma de la superficie de las tapas, mas la superficie del contorno.

Ejercicio 1.18. Determine las dimensiones de la lata en el ejercicio 1.17, si es que el costo de las tapas es el doble que el costo de la superficie del contorno. Hint: recuerde que quiere minimizar costos.

1.4. Razón de cambio

En ciertos problemas prácticos, x e y (o quizás mas variables) están relacionadas por una ecuación, y ambas variables se puede considerar como funciones de una tercera variable t, la que usualmente representa al tiempo. Bajo este escenario, a veces es útil relacionar las tasas a las que x e y varían con el tiempo, es decir, relacionar $\dfrac{dx}{dt}$ con $\dfrac{dy}{dt}$. A continuación presentamos un procedimiento general para afrontar este tipo de problemas:

1. Cuando es pertinente, hacer un diagrama para representar la situación y asignar nombres a las variables.
2. Determinar una ecuación que relacione las variables.
3. Usar diferenciación implícita para obtener una ecuación que relacione las tasas de cambio.
4. Determinar que datos son conocidos y cuales son los que se quiere obtener.

Ejemplo 1.14. El jefe de una empresa determina que cuando q cientos de unidades de cierto producto son producidas, el costo total de producción es de C miles de pesos, donde

$$C^2 - 3q^3 = 4275.$$

Cuando 1500 unidades están siendo producidas, el nivel de la producción esta incrementándose a una tasa de 20 unidades por semana. ¿Cuál es el costo total a este tiempo y a que tasa está cambiando?

Solución. Queremos encontrar C y $\dfrac{dC}{dt}$ cuando $q = 15$ (recordar que q representa cientos de unidades). En primer lugar, de la ecuación que relaciona C con q obtenemos que

$$C^2 = 4275 + 3q^3 = 4275 + 3 \cdot 15^3 = 4275 + 3 \cdot 3325 = 4275 + 10125 = 14400,$$

de donde obtenemos que $C = 120$. Por otra parte, si derivamos la ecuación con respecto a t obtenemos que

$$2C\frac{dC}{dt} = 9q^2\frac{dq}{dt},$$

o sea

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9q^2}{2C}\frac{dq}{dt}.$$

Luego para concluir, reemplazamos $C = 120$ miles de pesos, $q = 15$ y $\frac{dq}{dt} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$ (recordar que q está en cientos), de donde obtenemos

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9 \cdot (15)^2}{2 \cdot 120} \cdot \frac{2}{10} = \frac{27}{16}.$$

Es decir, C está cambiando a $\frac{27}{16} = 1,6875$ miles de pesos por semana, es decir a \$1.687,5 por semana. ■

Ejemplo 1.15. Un lago ha sido contaminado por una planta ubicada en su costa. Un grupo ecológico determina que cuando los niveles de contaminación es x partes por millón (ppm) , habrán F peces en el lago, donde

$$F = \frac{32000}{3 + \sqrt{x}}.$$

Cuando hay 4000 peces restantes en el lago, la contaminación crece a una tasa de 1,4 ppm/semana. ¿A qué tasa está cambiando la población de peces en este tiempo?

Solución. Notamos que $F \cdot (3 + \sqrt{x}) = 32000$ y reemplazamos $F = 4000$ para obtener que a este tiempo se tiene

$$4000\,(3 + \sqrt{x}) = 32000$$

de donde se obtiene que $x = 25$. Ahora, para obtener la tasa de cambio de la población de peces, derivamos la ecuación respecto a t para obtener

$$\frac{dF}{dt}\,(3 + \sqrt{x}) + F\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} = 0,$$

o sea

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{F}{2\sqrt{x}\,(3 + \sqrt{x})}\frac{dx}{dt},$$

y cuando reemplazamos los valores conocidos, obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{4000}{2\sqrt{25}\left(3 + \sqrt{25}\right)} \cdot \frac{14}{10} = -70,$$

es decir, la población de peces disminuye a una tasa de 70 peces por semana. ■

Ejercicio 1.19. Un bloque de hielo que se usa para refrigerar se puede modelar como un cubo de lado s. En estos instantes, el bloque tiene un volumen de 125.000 cm^3, y se esta derritiendo a una tasa de 1.000 cm^3 por hora.

1. ¿Cuánto mide el lado del cubo en estos instantes? ¿A qué tasa esta variando s?

2. ¿A qué tasa varía el área de la superficie del cubo?

Ejercicio 1.20. Una escalera de 10 metros está apoyada sobre una pared. La parte superior de la escalera empieza a resbalar hacia abajo a una velocidad de 3 metros por segundo (Ver figura 1.17). ¿Cuán rápido se mueve la parte inferior de la escalera, cuando la parte superior esta a 6 metros del suelo?

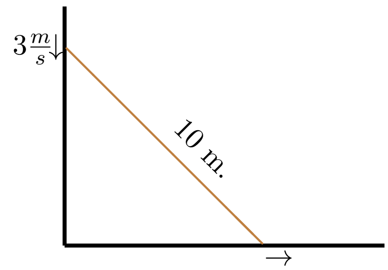


Figura 1.17: Escalera cayéndose.

Ejercicio 1.21. Hacia un tanque cónico (cono invertido) fluye agua a razón de 8 m^3/min. Si la altura del tanque es de 12 m. y el radio de la base del cono es de 6 m. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una altura de 4 m.?

Ejercicio 1.22. Se infla un globo esférico a razón de 10 cm^3/min. Calcular la tasa de cambio del radio del globo cuando el volumen de éste es de 15 cm^3. Hint: El volumen de una esfera está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 1.23. Un colector de aguas lluvia tiene 40 m. de largo y 20 m. de ancho. Además tiene 8 m. de profundidad en su parte mas profunda y 3 m. en su parte menos profunda (Ver figura 1.18). En un día lluvioso se estima que fluyen 10 m^3/hora hacia el colector. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando esta tiene:

1. 3 m. de altura.

2. 6 m. de altura.

Hint: haga un dibujo del perfil del colector en cada instante.

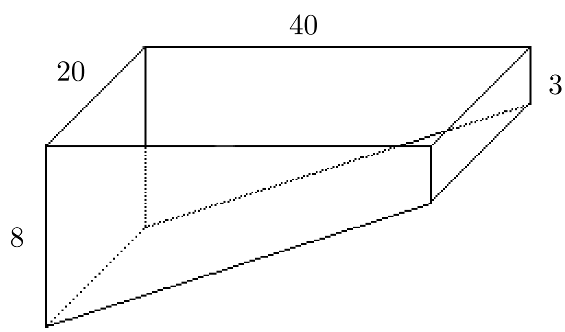


Figura 1.18: Colector de aguas lluvia.

Ejercicio 1.24. Un avión que vuela hacia el norte a 640 km/h pasa sobre cierta ciudad al medio día (12h00). Un segundo avión que va hacia el este a 600 km/h, está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos mas tarde (12h15). Si los aviones están volando a la misma altitud, que tan rápido se están separando a la 1:15 p.m.(13h15). Hint: haga un dibujo mirado desde arriba de los aviones.

Ejercicio 1.25. Se deja caer una piedra a un lago en calma, lo que provoca que se produzcan ondas circulares. El radio del circulo exterior crece a un ritmo constante de 1 metro por segundo. ¿A qué ritmo cambia el área de la región circular cuando el radio es de 4 metros?

Ejercicio 1.26 . Un auto está a 30 kms. al NORTE de una ciudad y se dirige hacia el NORTE a 25 kms/h. Simultáneamente un camión se encuentra a 40 kms. al ESTE y se desplaza al ESTE a 50 kms/h. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los vehículos en ese instante? Hint: Recuerde el teorema de Pitágoras.

1.5. Análisis Marginal y aproximación de funciones

En economía usualmente se utiliza la derivada para estimar el cambio en una cantidad (por ejemplo: costos, ingresos o ganancia) que resulta de incrementar en 1 unidad el nivel de producción. Dicho uso se denota como *análisis marginal*.

Motivación: Supongamos que $C(x)$ representa el costo de producir x unidades de cierto producto. Si se están produciendo x_0 unidades, entonces la derivada

$$C'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h}$$

se conoces como el *costo marginal* de producir x_0 unidades.

Ahora, si consideramos $h = 1$, tenemos que

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0),$$

es decir, $C'(x_0)$ *aproxima* el costo adicional de producir una unidad extra a x_0 (Ver figura 1.19)

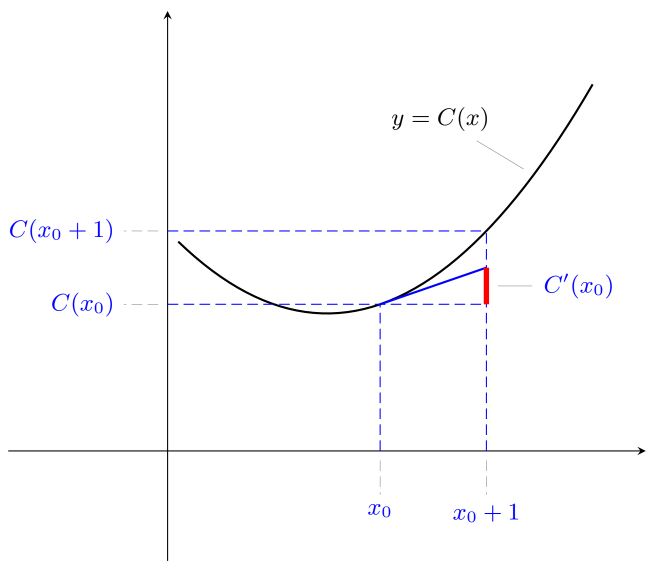


Figura 1.19: Costo marginal. En rojo se aprecia gráficamente el valor de $C'(x_0)$.

Ejemplo 1.16 . Se estima que cuando se producen x unidades de cierto producto, el costo será de $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ miles de pesos, y que cuando x unidades se venden, el precio es de $p(x) = \frac{1}{3}(75 - x)$ miles de pesos.

1. Encuentre el costo marginal, los ingresos marginales y la ganancia marginal.

2. Use el costo marginal para estimar el costo de producir la novena unidad. ¿Cuál es el costo real de dicha unidad?

3. Use el ingreso marginal para estimar el ingreso de vender la novena unidad. ¿Cuál es el ingreso real?

Solución. 1. El costo marginal es

$$C'(x) = \frac{1}{4}x + 3.$$

El ingreso total esta dado por $I(x) = x \cdot p(x) = \frac{x}{3}(75 - x) = 25x - \frac{x^2}{3}$, por lo tanto el ingreso marginal es

$$I'(x) = 25 - \frac{2}{3}x.$$

Finalmente la ganancia se puede calcular como $G(x) = I(x) - C(x) = 25x - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{1}{8}x^2 + 3x + 98\right) = -\frac{11}{24}x^2 + 22x - 98$, y la ganancia marginal es

$$G'(x) = I'(x) - C'(x) = 25 - \frac{2}{3}x - \left(\frac{1}{4}x + 3\right) = 22 - \frac{11}{12}x.$$

2. $C'(8) = 5$. Para obtener el costo real de la novena unidad calculamos $C(9) - C(8) = \frac{1081}{8} - 130 = \frac{41}{8} = 5{,}125$.

3. $I'(8) = \frac{59}{3} = 19,\bar{6}$ y el ingreso real es de $I(9) - I(8) = 198 - \frac{536}{3} = \frac{58}{3} = 19,\bar{3}$.

■

En términos un poco mas generales, uno puede utilizar la derivada para aproximar cualquier función. Recordemos que la derivada se puede definir como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

luego si es que h es suficientemente pequeño, podemos escribir

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o equivalentemente

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h,$$

de donde obtenemos:

Teorema 1.8 (Aproximación por incrementos)**.** *Sea f una función diferenciable en x_0, y sea Δx un pequeño incremento en x, entonces*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

*Similarmente, si denotamos $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ al **cambio en la función**, entonces*

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Ejemplo 1.17. Suponga que el costo total de producir q kilos de cierto producto es $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Si el nivel de producción es de 40 kilos, estimar como cambia el costo si es que se producen 40.5 kilos.

Solución. Sabemos que el costo de producir 40 kilos es de $C(40) = 3(40)^2 + 5(40) + 10 = 5010$, y nos piden estimar ΔC (el cambio en el costo) cuando $\Delta q = 0{,}5$ (el cambio en los kilos) y $q = 40$ (los kilos que inicialmente se producen), es decir

$$\Delta C \approx C'(40) \cdot 0{,}5.$$

Para ello calculamos $C'(q) = 6q + 5$ y $C'(40) = 245$, por lo tanto

$$\Delta C \approx \frac{245}{2} = 122{,}5.$$

Además, el costo total de producir 40,5 kilos puede ser aproximado por

$$C(40{,}5) \approx C(40) + C'(40) \cdot 0{,}5 = C(40) + \Delta C,$$

es decir, el costo inicial de producir 40 kilos, mas el *cambio* en el costo de producir medio kilo más, es decir

$$C(40{,}5) \approx 5010 + 122{,}5 = 5122{,}5.$$

Para comparar, notemos que el costo real de producir 40,5 kilos está dado por

$$C(40{,}5) = 3(40{,}5)^2 + 5(40{,}5) + 10 = 5133{,}25,$$

es decir, estamos cometiendo un error de $5133{,}15 - 5122{,}5 = 10{,}65$. ■

Otro uso que se le puede dar al teorema de aproximación es estimar errores de propagación.

Ejemplo 1.18. Un tecnólogo medico modela un tumor como una esfera, por lo que utiliza la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para calcular su volumen. Luego de un examen, determina que el diámetro del tumor de un paciente es de 2.5 cm, pero la máquina utilizada tiene un margen de error máximo de un 2 %. ¿Qué tan preciso es el cálculo del volumen?

Solución. Tenemos que $d = \frac{R}{2}$, por lo tanto $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, por lo que el volumen calculado por el tecnólogo es de

$$V = \frac{1}{6}\pi(2{,}5)^3 \approx 8{,}181\ cm^3.$$

Sin embargo hay un error de medición de un 2 %, es decir, la medida del diámetro puede crecer o disminuir en[1] $2{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}05$. Para estimar el posible error en el volumen, utilizamos el teorema de aproximación:

$$\Delta V \approx V'(d)\Delta d.$$

En nuestro caso $V'(d) = \frac{1}{2}\pi d^2$, $d = 2{,}5$ y $\Delta d = \pm 0{,}05$, por lo que

$$\Delta V \approx \frac{1}{2}\pi\,(2{,}5)^2 \cdot (\pm 0{,}05) \approx \pm 0{,}491\ cm^3.$$

O sea el volumen real debiese estar en

$$7{,}690 = 8{,}181 - 0{,}491 \precapprox V \precapprox 8{,}181 + 0{,}491 = 8{,}672.$$

■

[1] La variación se calcula como:

(error en la medición)=(medición)×(error porcentual).

Otra situación típica es la "inversa", es decir, deseamos producir una variación determinada en la función, por lo que queremos saber cuanto debemos cambiar en x para obtener dicha variación.

Ejemplo 1.19. La producción de una fábrica es $Q(L) = 900L^{\frac{1}{3}}$ unidades, donde L es el número de trabajadores. En la actualidad hay 1000 trabajadores, y se nos pide estimar cuántos trabajadores adicionales se requieren para aumentar la producción en 15 unidades.

Solución. Si usamos el teorema de aproximación, tenemos que

$$\Delta Q \approx Q'(L)\Delta L.$$

Lo que queremos saber en este caso es ΔL, conociendo que $L = 1000$ y que $\Delta Q = 15$, es decir

$$\Delta L \approx \frac{\Delta Q}{Q'(L)} = \frac{15}{Q'(1000)},$$

pero $Q'(L) = 300L^{-\frac{2}{3}}$, de donde $Q'(1000) = \dfrac{300}{(1000)^{\frac{2}{3}}} = 3$, por lo tanto

$$\Delta L \approx \frac{15}{3} = 5,$$

es decir, se necesitan alrededor de 5 trabajadores adicionales. ■

Ejercicio 1.27. Dada la función de costo $C(x)$ y el precio $p(x)$, determine: el costo marginal, el ingreso marginal y la ganancia marginal de producir la cuarta unidad.

1. $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 57$, $p(x) = \frac{1}{4}(36 - x)$.
2. $C(x) = \frac{5}{9}x^2 + 5x + 73$, $p(x) = -x^2 - 2x + 33$.

Ejercicio 1.28. Estime cuanto varia la función dada cuando se produce el incremento mencionado.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$, cuando x cambia de 5 a 5,3.
2. $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - 3$, cuando x cambia de 4 a 3,8.

Ejercicio 1.29. Un estudio medioambiental sugiere que en t años, el nivel de monóxido de carbono en el aire será de

$$C(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4 \quad \text{partes por millon.}$$

Aproximadamente, ¿Cuánto variará el nivel del monóxido de carbono en los próximos 6 meses?

Ejercicio 1.30. Un estudio de eficiencia determina que el trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá producido

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15 \quad \text{unidades}$$

x horas mas tarde. Aproximadamente, ¿Cuántas unidades producirá el trabajador entre las 9:00 a.m y las 9:15 a.m.?

Ejercicio 1.31. Una empresa avícola estima que la producción semanal de huevos puede ser modelada por la función $H(g) = 30g^{\frac{2}{3}}$, donde g representa el número de gallinas. En la actualidad, la empresa cuenta con 100 gallinas. Estime cuantas gallinas adicionales se necesitan para incrementar la producción de huevos en 10 huevos por semana.

Ejercicio 1.32. La ley de Stefan-Boltzmann en física dice que un cuerpo emite energía térmica de acuerdo a la fórmula $E(T) = \sigma T^4$, donde E es la cantidad de energía emitida por una superficie a temperatura T (medida en grados Kelvin), y σ es la constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$. Estime el cambio porcentual en E que se produce al incrementar la temperatura T en un 2 %.

Ejercicio 1.33. Un tumor canceroso es modelado como una esfera de radio r.

1. ¿A qué tasa está cambiando el volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ con respecto a r cuando $r = 0{,}75$ cm.?

2. Estime el error porcentual máximo que se puede permitir a la medición del diámetro del tumor, si es que se quiere garantizar un error en el cálculo del volumen no mayor a un 8 %.

1.6. Nociones básicas de modelamiento matemático

El modelamiento matemático es un tipo de modelo científico que usa formulismos matemáticos para expresar relaciones entre variables y/o parámetros, para estudiar el comportamiento de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad.

Básicamente, el modelamiento matemático consta de 4 etapas: Formulación, Análisis, Interpretación y Testeo.

1. **Formulación**: Dada una situación compleja de la vida real (Ejemplo: una epidemia de mosquitos), debemos asumir ciertas condiciones que nos permiten simplificar el entendimiento del problema (identificar las variables relevantes, hacer supuestos en base a experimentación, etc.) para así poder establecer un modelo.

2. **Análisis del Modelo**: Esta etapa consiste en usar las herramientas matemáticas (cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.) para resolver el modelo (Ejemplo: la población de mosquitos aumenta a una tasa exponencial).

3. **Interpretación**: Durante esta etapa debemos aplicar las conclusiones obtenidas durante el análisis a nuestro problema real, produciendo alguna predicción (Ejemplo: los mosquitos se apoderan del mundo).

4. **Testeo y ajustes**: Volvemos a experimentar y comparamos los resultados experimentales con la predicción del modelo. Finalizada esta etapa, hay dos opciones: el modelo predijo correctamente los resultados experimentales, o bien es necesario ajustar el modelo para tomar en cuenta las discrepancias.

Ejemplo 1.20. En una granja se planea construir un corral para caballos al costado de un río. El corral debe ser rectangular y debe contar con 800 metros cuadrados. Además, es necesario cercar en los 3 costados no adyacentes al río. ¿Cuántos metros de cerca se necesitan?

Solución. Para estudiar este tipo de ejemplos, siempre es útil hacer un diagrama que represente la situación. En este caso tenemos lo ilustrado en la Figura 1.20. En segundo lugar debemos identificar las variables relevantes. En el caso del ejemplo, tenemos 2 variables: el ancho del corral (la variable x en la imagen), y el largo del corral (la variable y).

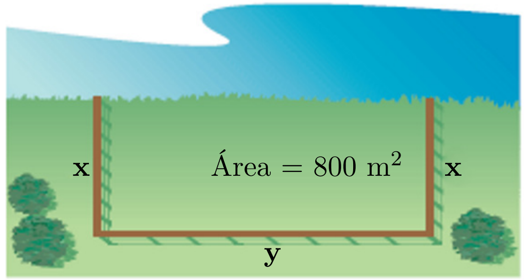


Figura 1.20: Corral para caballos.

Luego identificamos las condiciones que satisfacen las variables. En el caso del ejemplo, la condición principal es que el área del corral debe ser de 800 m^2, es decir

$$x \cdot y = 800.$$

Luego debemos identificar el problema en cuestión. En el ejemplo, queremos saber la cantidad de metros de cerca necesario, lo que se puede representar por

$$2x + y.$$

Finalmente hacemos un supuesto que es bastante razonable: Queremos usar la menor cantidad de cerca posible, ya que esto reduciría los costos asociados a la construcción del corral.

Con todo lo anterior, el problema queda modelado por el siguiente ejercicio matemático:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x \cdot y = 800, \\ \qquad\qquad x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{P}$$

Reducción de variables: en primer lugar observamos que la restricción $x \cdot y = 800$ puede escribirse como $y = \dfrac{800}{x}$, lo que nos permite re-escribir nuestro problema como

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + \dfrac{800}{x}, \\ \qquad \text{sujeto a que } x > 0. \end{cases} \tag{P'}$$

Este problema se puede resolver utilizando las herramientas de cálculo en una variable aprendidas en cursos anteriores. Sin embargo, uno de los propósitos de este curso es aprender a trabajar directamente con el problema (P), y para ello debemos conocer tópicos de *cálculo en varias variables*.

1.7. Modelos exponenciales y logarítmicos

Modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial

En estos casos suponemos que la función se comporta como una función exponencial, es decir

$$Q(t) = Ae^{kt} \quad \text{o bien} \quad Q(t) = Ae^{-kt},$$

donde A y k son constantes positivas. Este tipo de funciones sirve para modelar, por ejemplo, el crecimiento no acotado (cuando $Q(t) = Ae^{kt}$) o decrecimiento hasta la extinción (cuando $Q(t) = Ae^{-kt}$) de una población.

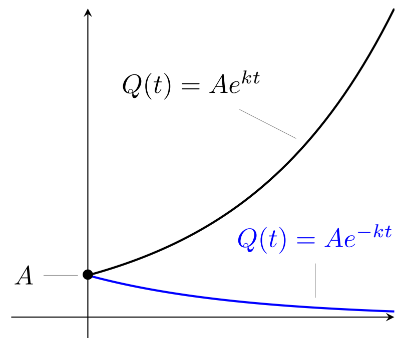


Figura 1.21: Modelos exponenciales.

***Ejemplo 1.21*.** La densidad de población a x km. del centro de una ciudad es modelada mediante una función exponencial:

$$Q(x) = Ae^{-kx} \quad \text{miles de personas por km}^2.$$

Encuentre la función si la densidad en el centro del la ciudad es de 15 mil personas por km^2, y a 10 km. del centro es de 9 mil personas por km^2. ¿Cuál es la densidad de población a 20 km. del centro? ¿Cuál es la tasa de cambio de la densidad de población a 20 km. del centro?

***Solución*.** La densidad en el centro de la ciudad es cuando $x = 0$, es decir $Q(0) = A = 15$ mil personas por km^2. Por otra parte, la densidad a 10 km. del centro es $Q(10) = 9$ mil personas por km^2, de donde deducimos que $9 = 15e^{-10k}$, o sea $k = -\frac{1}{10}\ln\frac{3}{5}$.

Finalmente calculamos $Q(20) = 15e^{2\ln\frac{3}{5}} = 15\cdot\frac{3^2}{5^2} = \frac{27}{5} = 5{,}4$ miles de personas por km^2. Además $Q'(t) = -Ake^{-kt} = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{5}e^{\frac{t}{10}\ln\frac{3}{5}}$, de donde $Q'(20) = \frac{27}{50}\ln\frac{3}{5}$. ■

Curvas de aprendizaje

Usamos una función de la forma

$$Q(t) = B - Ae^{-kt},$$

donde A, B y k son constantes positivas. Este tipo de funciones sirve para modelar, por ejemplo, la relación entre la eficiencia de un individuo respecto a la experiencia que éste tenga, así como cierto tipo de poblaciones en ecosistemas acotados.

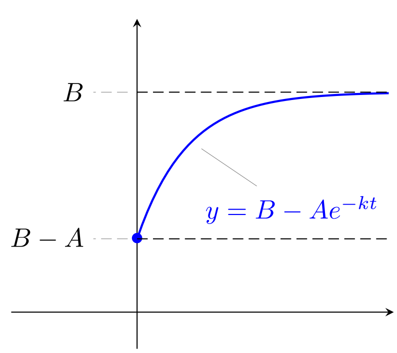


Figura 1.22: Curva de aprendizaje.

Ejemplo 1.22. La tasa a la que un trabajador cosecha uvas es una función de su experiencia. Se estima que un trabajador promedio cosecha, luego de t meses,

$$Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t} \quad \text{racimos de uva al día.}$$

1. ¿Cuántos racimos cosecha un trabajador nuevo?
2. ¿Cuántos racimos cosecha un trabajador con 2 meses de experiencia?
3. Aproximadamente, ¿cuántos racimos cosecharía un trabajador si llevara "una vida" trabajando?

Solución. 1. Un trabajador nuevo cosecha $Q(0) = 300$ racimos de uva.

2. Luego de 2 meses, un trabajador cosecha $Q(2) = 700 - 400e^{-1} \approx 552,85$ racimos de uva.
3. Esto quiere decir que lo máximo que puede cosechar un trabajador es $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 700$ racimos de uva.

Curvas logísticas

Otra función similar a la curva de aprendizaje es la llamada *Curva logística*. Dicha función se puede escribir como

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-kt}},$$

donde $A,\ B$ y k son constantes positivas.

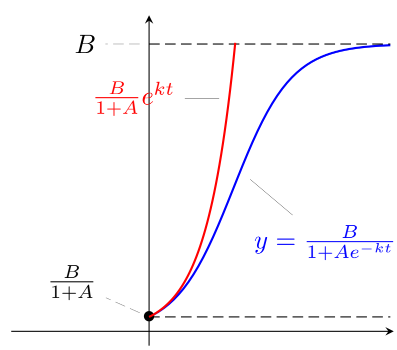


Figura 1.23: Curva logística y su crecimiento exponencial al comienzo.

La principal diferencia con la curva de aprendizaje, es que esta curva tiene un comportamiento similar a la curva exponencial $y = \frac{B}{1+A}e^{kt}$ para valores pequeños de t. Esta curva se utiliza usualmente para modelar poblaciones en un ecosistema con recursos finitos donde inicialmente hay un *crecimiento exponencial* de la población. La cantidad B denota la *capacidad máxima* que tiene dicho ecosistema.

Teorema 1.9 (Derivadas de la función logística)**.** *Sea* $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-kt}}$ *una función logística de parámetros* $A,\ B,\ k > 0$. *Tenemos que*

1. $Q'(t) = \dfrac{ABke^{-kt}}{(1 + Ae^{-kt})^2}$.
2. $Q''(t) = \dfrac{ABk^2e^{-kt}}{(1 + Ae^{-kt})^3}\left(Ae^{-kt} - 1\right)$.

Ejercicio 1.34. Un buen ejercicio de cálculo es demostrar el teorema anterior, es decir, calcular las derivadas de $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-kt}}$ asumiendo que $A,\ B,\ k$ son constantes.

Ejemplo 1.23. Un apicultor estima que t meses después de establecida una colmena, la cantidad de abejas que tendrá estará dada por

$$Q(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}.$$

1. Determine la población inicial de abejas.

2. ¿Cuántas abejas habrán al cabo de 3 meses?

3. ¿A qué tasa se reproducen las abejas luego de 3 meses?

4. ¿Cuándo las abejas se reproducen con mayor rapidez?

5. Determine la capacidad máxima de la colmena.

Solución. 1. El apicultor empezó con $Q(0) = \dfrac{1000}{1+9} = 100$ abejas.

2. Luego de 3 meses habrán $Q(3) = \dfrac{1000}{1 + 9e^{-3}} \approx 691$ abejas.

3. La tasa de reproducción está dada por $R(t) = Q'(t) = \dfrac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^2}$, por lo que la tasa al tercer mes es

$$R(3) = \frac{9000e^{-3}}{(1 + 9e^{-3})^2} \approx 214 \quad \text{abejas por mes.}$$

4. Para determinar esto, debemos *maximizar* la tasa de reproducción, es decir, debemos encontrar el máximo de la función

$$R(t) = \frac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^2}.$$

   Para ello encontramos sus puntos críticos, es decir, debemos mirar $R'(t)$. Si hacemos el cálculo, obtenemos que:

$$R'(t) = Q''(t) = \frac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^3}\left(9e^{-t} - 1\right).$$

   De aquí deducimos que hay solo un punto crítico, que satisface $9e^{-t} - 1 = 0$, es decir $t = \ln 9 \approx 2{,}197$. Además podemos usar el test de la primera derivada, ya que $R'(t) > 0$ cuando $t < \ln(9)$ y $R'(t) < 0$ cuando $t > \ln(9)$, por lo que $t = \ln(9)$ es un máximo para $R(t)$.

   En otras palabras, hemos maximizado $Q'(t)$, la tasa de reproducción.

   Observación. En este punto es importante no confundirse en los conceptos. Nos piden maximizar una tasa, es decir, maximizar una derivada. Lo conveniente es denotar a la derivada con un nuevo nombre, en este caso llamamos $R(t) = Q'(t)$ y "olvidarnos" que $R(t)$ es la derivada de otra función. Luego procedemos de la manera habitual para maximizar la función $R(t)$.

5. La capacidad máxima de la colmena es de $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 1000$ abejas.

■

Otro uso habitual es en el de modelamiento de epidemias o plagas. En este caso, la cantidad B denota la cantidad máxima de individuos susceptibles a ser contagiados.

***Ejemplo 1.24*.** El ministerio de Salud estimó que t semanas después del brote de la gripe porcina, aproximadamente

$$Q(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1{,}5t}} \quad \text{miles de personas}$$

se habían contagiado en Chile.

1. ¿Cuántas personas tenían la gripe al comienzo de la epidemia? ¿Cuántos contagiados habían luego de 2 semanas?
2. ¿Cuándo comenzó a decaer la tasa de infección?
3. ¿Cuánta gente estará eventualmente enferma?

***Solución*.**

1. La cantidad inicial de infectados es de $Q(0) = 1$ (o sea mil personas) y al cabo de 2 semanas habían $Q(2) = \dfrac{20}{1 + 19e^{-3}} \approx 10{,}28$ miles de personas contagiadas.
2. La tasa de infección comienza a decaer luego de alcanzar su máximo, es decir, debemos encontrar el máximo de
$$R(t) = Q'(t) = \frac{570e^{-1{,}5t}}{(1 + 19e^{-1{,}5t})^2}.$$
Para ello encontramos sus puntos críticos, es decir, debemos calcular
$$R'(t) = Q''(t) = \frac{855e^{-1{,}5t}\left(19e^{-1{,}5t} - 1\right)}{(1 + 19e^{-1{,}5t})^3}$$
de donde deducimos que el único punto crítico satisface $19e^{-1{,}5t} - 1 = 0$, o sea $t = \dfrac{\ln 19}{1{,}5} \approx 1{,}96 \approx 2$ semanas. Ejercicio propuesto: verificar que efectivamente este punto crítico es un máximo para $Q'(t)$.
3. La cantidad de personas que se eventualmente se enfermara está dada por $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 20$ mil personas.

■

También hay situaciones en que un modelo logarítmico es pertinente:

***Ejemplo 1.25*.** Se ha estimado que luego de los 8 años, la capacidad aeróbica de una persona de x años de edad puede ser modelada por la función

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}, \quad x \geq 8.$$

1. Bosqueje el gráfico de $A(x)$.
2. ¿A qué edad una persona alcanza su peak de capacidad aeróbica?
3. ¿A qué edad la capacidad aeróbica decrece con mayor rapidez?

***Solución*.** Para encontrar el peak, debemos determinar los números críticos. $A'(x) = \dfrac{110}{x^2}(3 - \ln x)$, de donde deducimos que $x = e^3 \approx 20{,}09$ es el único punto crítico. Si analizamos la función, nos damos cuenta que cuando $0 < x < e^3$ la función es creciente, y cuando $x > e^3$ la función es decreciente, por lo que cuando $x = e^3 \approx 20$ es cuando se alcanza el peak de la capacidad aeróbica.

La segunda pregunta nos pide encontrar cuando la capacidad aeróbica decrece con mayor rapidez, esto es, cuando $A'(x)$ es lo mas negativa posible. En otras palabras, debemos encontrar el mínimo absoluto de

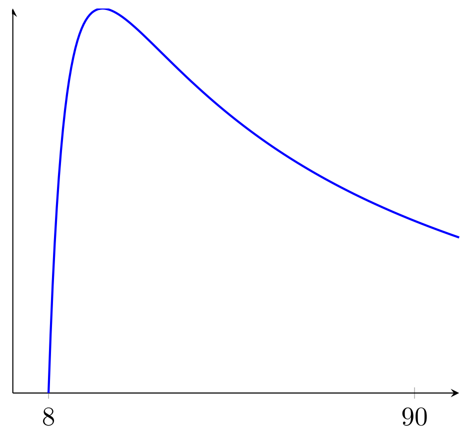


Figura 1.24: Gráfico de $A(x)$.

$A'(x)$. Para ello encontramos $A''(x) = \frac{110}{x^3}(2\ln x - 7)$, de donde $x = e^{\frac{7}{2}} \approx 33{,}12$ es el único número crítico para A'. Si analizamos A', notamos que A' decrece cuando $0 < x < e^{\frac{7}{2}}$ y crece cuando $x > e^{\frac{7}{2}}$, por lo tanto $x \approx 33$ es el mínimo absoluto para A'.

Notamos que cuando $x = e^{\frac{7}{2}}$, entonces $A'(e^{\frac{7}{2}}) = -55e^{-7} < 0$ es decir, la capacidad aeróbica esta decreciendo en este instante a su máxima rapidez. ■

Ejercicio 1.35. Se estima que en t años, la población de cierto país será $P(t) = 50e^{0{,}02t}$ millones de habitantes.

1. ¿Cuál es la población actual del país?
2. ¿Cuál será la población en 20 años?
3. ¿A qué tasa está cambiando la población luego de t años?

Ejercicio 1.36. Se estima que luego de t semanas trabajando, un trabajador postal es capaz de despachar $Q(t) = 20 - 10e^{-3t}$ paquetes por día.

1. ¿Cuántos paquetes despacha un trabajador recién contratado?
2. ¿Cuántos paquetes despacha el trabajador luego de 1 mes trabajando?
3. ¿Cuántos paquetes puede aspirar a despachar un trabajador con mucha experiencia?

Ejercicio 1.37. Una epidemia se propaga en una comunidad de tal forma que después de t semanas después de su aparición, el número de individuos contagiados está dado por la función

$$f(t) = \frac{A}{1 + Ce^{-kt}},$$

donde A es la cantidad total de individuos susceptibles a la infección y C, k son constantes positivas. Determine el tiempo y la cantidad de individuos cuándo la epidemia se propaga a su mayor velocidad.

Ejercicio 1.38. Un estudio determina que luego de t horas de introducida una toxina a una colonia de bacterias, la población será de

$$P(t) = 10000\left(7 + 15e^{-0{,}05t} + te^{-0{,}05t}\right).$$

1. ¿Cuál es la población en el momento en que se introduce la toxina?

2. ¿En qué momento la población alcanza su máximo? ¿Cuál es la máxima población?

3. ¿Qué sucede eventualmente ($t \to +\infty$) con la colonia de bacterias?

Ejercicio 1.39. Una empresa de seguros estima que bajo ciertas condiciones, la probabilidad de que una persona fallezca conduciendo su vehículo a los x años es de

$$P(x) = xe^{-x}$$

1. Encuentre el máximo valor de $P(x)$ y la edad a la que esto ocurre.

2. Estime la probabilidad de morir manejando de un recién nacido y de un anciano.

3. Bosqueje el gráfico de $P(x)$.

Ejercicio 1.40. El encargado de un zoológico estima que la función

$$f(x) = \frac{4e^{-(\ln x)^2}}{x}, \quad x > 0.$$

entrega una buena estimación de la cantidad de animales en el zoológico que tienen x años de edad.

1. Bosqueje el gráfico de la función cuando $x > 0$. Hint: La función es siempre positiva y satisface

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

2. Determine cuál es la edad más común entre los animales. Hint: la edad más común es donde la cantidad de animales es mayor.

Ejercicio 1.41. Suponga que para un organismo de x años de edad, la tasa de reproducción per cápita está determinada por

$$R(x) = \frac{\ln\left(100x^2e^{-x}\right)}{x}$$

¿Cuál es la edad óptima para la reproducción? ¿Cuál es la tasa de reproducción a esa edad? Hint: La edad óptima para la reproducción se alcanza cuando la tasa de reproducción es máxima.

1.8. Ajuste de curvas

Hasta el momento hemos visto ciertos tipos de problemas de modelamiento en los cuales las funciones están previamente determinadas, sin embargo esto no suele ocurrir en problemas reales.

Lo que usualmente ocurre es que se realizan experimentos y mediciones para obtener información relativa a cierto sistema físico, económico o social, y luego se interpretan dichas mediciones en términos matemáticos. A continuación detallamos un ejemplo de aquello

Ejemplo 1.26. Un productor agrícola ha encontrado los siguientes datos respecto al precio de uno de sus productos

Producción: x	Precio de la demanda: p
6	743
10	539
17	308
22	207
28	128
35	73

¿Qué función $p = f(x)$ es la que "mejor" representa dichos datos?

Para resolver este tipo de problemas una de las herramientas mas útiles es graficar los datos y "ver" la función:

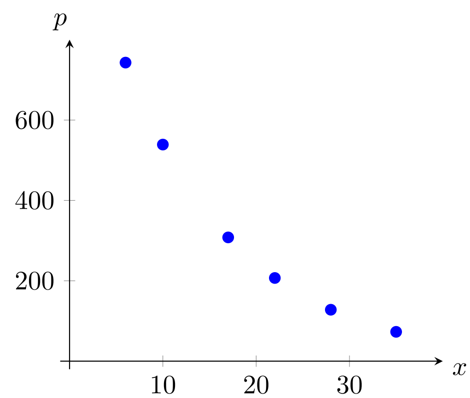


Figura 1.25: Datos del ejemplo 1.26.

Del gráfico podemos apreciar una suerte de comportamiento exponencial negativo, es decir, deberíamos tener que $p = Ae^{-kx}$, donde $k > 0$. Entonces la pregunta que surge es: ¿Cómo encontramos las constante A y k, de modo que la función resultante se "acerque" a los datos?

1.8.1. Ajuste de rectas: recta de mínimos cuadrados (RMC)

Para encontrar la solución del ejemplo anterior, primero debemos ser capaces de resolver un caso mas simple: El caso en que los datos se asemejan a una recta. Para ello necesitamos la siguiente definición

Definición 1.10 (Recta de mínimos cuadrados)**.** *Dados n pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, definimos la recta de mínimos cuadrados como la recta $y = mx + b$ donde*

$$m = \frac{n\sum(xy) - (\sum x)\cdot(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2},$$

y

$$b = \frac{(\sum x^2)\cdot(\sum y) - (\sum x)\cdot(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2},$$

donde

$$\sum x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$\sum y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$
$$\sum x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$
$$\sum xy = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$$

Esta recta tiene la particularidad de ser la recta que minimiza las distancias al cuadrado hacia los puntos. Siguiendo como ejemplo la figura 1.26, lo que queremos encontrar son m y b tales que

$$S(m,b) = d_1^2 + d_3^2 + d_3^2 = (mx_1 + b - y_1)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2$$

es mínima. El resultado de minimizar esta función cuando se hace para n puntos es lo que se obtiene para m y b en la definición 1.10.

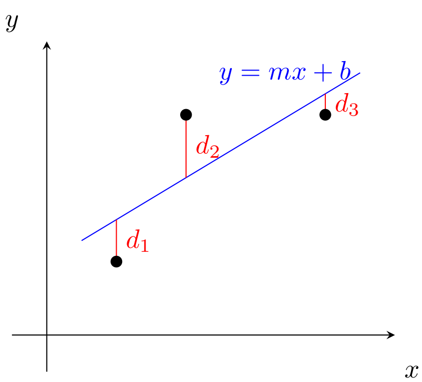


Figura 1.26: Recta de mínimos cuadrados.

Ejemplo 1.27. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los puntos: $(1,1),\ (2,3),\ (4,3)$.

Solución. El procedimiento para resolver este tipo de problemas es: Primero tabulamos los datos de la siguiente manera

	x	y	x^2	xy
	1	1	1	1
	2	3	4	6
	4	3	9	12
$\sum$	7	7	21	19

Luego usamos las fórmulas para la pendiente de la recta m y para el coeficiente de posición b dadas en la definición 1.10

$$m = \frac{n\sum(x \cdot y) - (\sum x) \cdot (\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{3 \cdot 19 - 7 \cdot 7}{3 \cdot 21 - 7^2} = \frac{4}{7},$$

y

$$b = \frac{(\sum x^2) \cdot (\sum y) - (\sum x) \cdot (\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{21 \cdot 7 - 7 \cdot 19}{3 \cdot 21 - 7^2} = 1.$$

Por lo tanto la RMC es:

$$y = \frac{4}{7}x + 1.$$

■

Ejemplo 1.28. Cierta universidad ha recopilado los siguientes datos respecto a las notas de los alumnos de primer año respecto a sus notas en la enseñanza media

Promedio de notas enseñanza media	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Promedio de notas primer año universidad	4,5	4,8	5,0	5,5	6,5

Encuentre la RMC que mejor representa a estos datos. ¿Cómo cambia la RMC si es que se agrega el dato extra: Nota enseñanza media=4, Nota primer año=2?

Solución. Si denotamos por x a las notas de la enseñanza media y por y a las notas del primer año en la universidad tenemos que nuestra tabla queda

	x	y	x^2	xy
	5	4,5	25	22,5
	5,5	4,8	30,25	26,4
	6	5	36	30
	6,5	5,5	42,25	35,75
	7	6,5	49	45,5
$\sum$	30	26,3	182,5	160,15

Lo que nos da

$$m = 0{,}94,$$

y

$$b = -0{,}38.$$

Por lo tanto la RMC es: $y = 0{,}94x - 0{,}38$.

Si agregamos el punto $(4, 2)$ nuestra tabla queda (notar que al agregar un dato extra, debemos solo preocuparnos de la fila del dato extra y la fila de las sumas, el resto de la tabla queda igual)

	x	y	x^2	xy
	4	2	16	8
	5	4,5	25	22,5
	5,5	4,8	30,25	26,4
	6	3	36	30
	6,5	5,5	42,25	35,75
	7	6,5	49	45,5
$\sum$	34	28,3	198,5	168,15

Lo que nos da

$$m = 1{,}334,$$

y

$$b = -2{,}844,$$

Es decir, la nueva recta de mínimos cuadrados es

$$y = 1{,}334x - 2{,}844.$$

En la figura 1.27 se pueden ver ambas rectas. ■

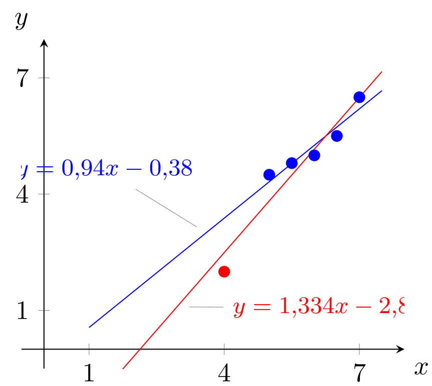


Figura 1.27: Recta de mínimos cuadrados.

1.8.2. Ajustes no lineales

Volvamos al ejemplo 1.26. Teníamos que nuestros datos asemejaban a una función exponencial $p = Ae^{kx}$ y queríamos encontrar A y k. Una manera de hacer esto es usando la recta de mínimos cuadrados. El problema es que nuestra función candidato NO ES LINEAL. ¿Cómo solucionamos esto?

La respuesta es usar el logaritmo natural para convertir la función original en una función lineal: Nuestra función candidato es $p = Ae^{kx}$, por lo que si aplicamos el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación nos queda

$$\ln p = kx + \ln A,$$

luego si denotamos $y = \ln p$, $m = k$ y $b = \ln A$ nos queda que nuestra función candidato es $y = mx + b$, una función lineal para la cual podemos usar la RMC. La tabla para encontrar esta RMC queda

	x	p	$y = \ln p$	x^2	xy
	6	743	6,61	36	39,66
	10	539	6,29	100	62,9
	17	308	5,73	289	97,41
	22	207	5,33	484	117,32
	28	128	4,85	784	135,86
	35	73	4,29	1225	150,17
$\sum$	118		33,11	2918	603,32

De donde obtenemos que

$$m = -0{,}08, \quad b = 7,09,$$

es decir la recta queda $y = -0{,}08x + 7{,}09$. Para concluir el problema, debemos retornar a la función exponencial, es decir debemos recordar que $k = m = -0{,}08$ y que $\ln A = b = 7{,}09$, de donde obtenemos que $A = e^{7{,}09} = 1199{,}91$. Por lo tanto nuestra función queda

$$p = 1199{,}91e^{-0{,}08x},$$

lo que gráficamente se ve como ■

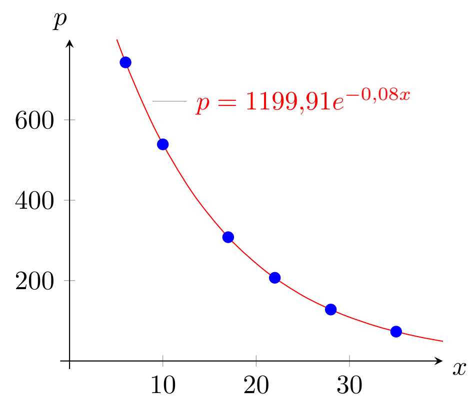


Figura 1.28: Función exponencial ajustada para el ejemplo 1.26.

Otro tipo de ajustes no lineales, son los ajustes polinomiales $y = ax^c$ como el que se ve a continuación.

Ejemplo 1.29. Suponga que se han recopilado los siguiente datos:

H	87,9	95,3	106,7	115,4	127,2	135,8
W	52,4	60,3	73,1	83,7	98,0	110,2

1. Grafique los puntos en el plano H-W.
2. Encuentre la RMC.
3. Asuma que los datos se ajustan a una curva de la forma $W = aH^c$. Encuentre a y c.
4. Grafique la RMC y la curva resultante $W = aH^c$ en un mismo gráfico.

Solución. 1. El gráfico de los puntos se puede ver en la figura 1.29.

2. Para la RMC encontramos que $W = 1{,}2H - 54{,}095$.

3. Para encontrar la función polinomial debemos transformar nuestra fórmula no lineal $W = aH^c$ en una lineal. Para ello nuevamente usamos el logaritmo natural y obtenemos que

$$\ln W = \ln a + c \ln H.$$

Luego si denotamos por $y = \ln W$, $x = \ln H$, $m = c$ y $b = \ln a$, llegamos a la recta $y = mx + b$. Para encontrar m y b usamos el método de los mínimos cuadrados y obtenemos la siguiente tabla

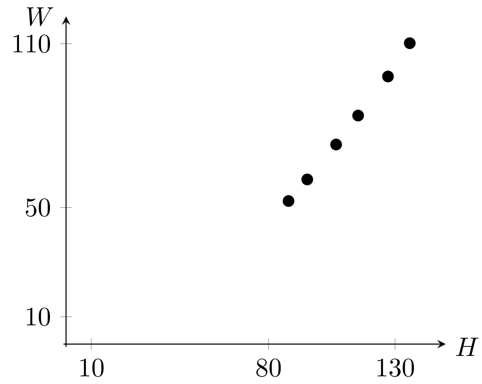


Figura 1.29: Gráfico para el ejemplo 1.29.

	$x = \ln H$	$y = \ln W$	x^2	xy
	4,4762	3,9589	20,0364	17,7209
	4,5570	4,0993	20,7665	18,6808
	4,6700	4,2918	21,8091	20,0429
	4,7484	4,4282	22,5473	21,0223
	4,8458	4,5850	23,4814	22,2177
	4,9112	4,7023	24,1197	23,0938
$\sum$	28,2086	26,0646	132,7604	122,7784

De donde encontramos que $m = 1{,}7016$ y $b = -3{,}6559$. Finalmente recordamos que $c = m = 1{,}7016$ y que $\ln a = b = -3{,}6559$, es decir $a = e^{-3{,}6559} = 0{,}0258$. Por lo tanto nuestra curva queda

$$W = 0{,}0258H^{1{,}7016}.$$

4. Ver la figura 1.30. Como se puede ver en el gráfico, ambas curvas se ajustan bastante bien a los puntos, por lo que la elección de cual es mejor, dependerá de que curva entregue mejores predicciones. Por ejemplo, si de las restricciones del problema (por ejemplo, H puede representar la altura de un individuo, y W su peso) determinamos que los valores de W deben ser siempre positivos, entonces la RMC no es una buena curva de ajuste, pues como se aprecia en la figura, para valores de H menores a 45, el valor resultante es negativo.

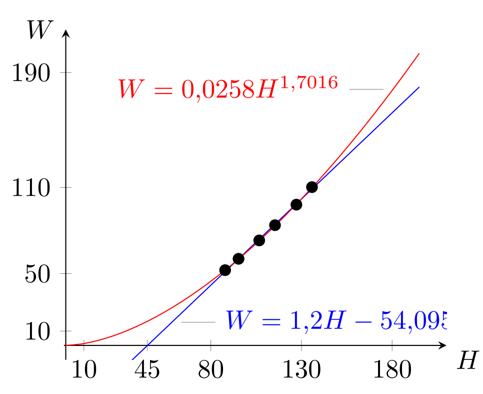


Figura 1.30: Gráfico con curvas ajustadas para el ejemplo 1.29.

1. Grafique los datos en el plano cartesiano.
2. Encuentre la RMC asociada a estos datos.
3. Para más preguntas, refiérase al ejercicio 1.49.

Solución. 1. El gráfico de los datos se puede ver en la figura 1.31.

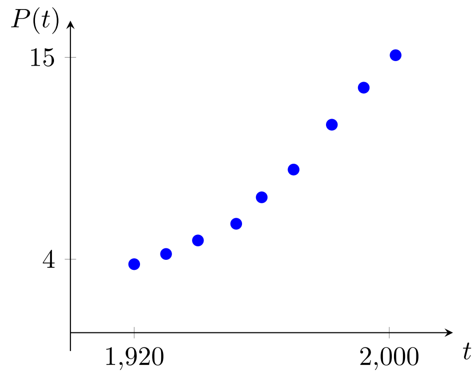


Figura 1.31: Datos de censos en Chile.

2. En primer lugar encontramos la RMC haciendo la tabla con los datos pertinentes:

	t	P	t^2	$t \cdot P$
	1920	3,730	3.686.400	7.161,60
	1930	4,287	3.724.900	8.273,91
	1940	5,024	3.763.600	9.746,56
	1952	5,933	3.810.304	11.581,22
	1960	7,374	3.841.600	14.453,04
	1970	8,885	3.880.900	17.503,45
	1982	11,330	3.928.324	22.456.06
	1992	13,348	3.968.064	26.589.22
	2002	15,116	4.008.004	30.262,23
$\sum$	17.648	75,027	34.612.096	148.027,284

De donde la RMC queda

$$P = 0{,}1434x - 272{,}8894$$

Una observación relevante es que en casos prácticos uno debe tener cuidado con las aproximaciones, en especial cuando se trabaja con números grandes. Por ejemplo si consideramos solo los primeros 2 lugares decimales, la recta quedaría $P = 0{,}14t - 272{,}89$ y el gráfico es como en la figura 1.32.

■

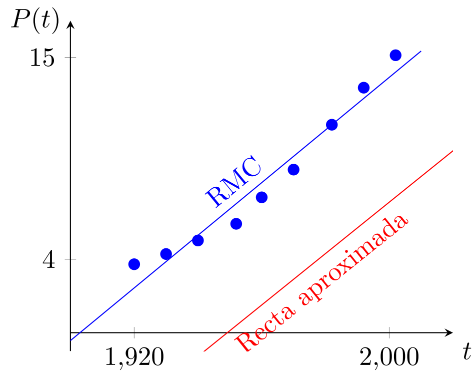


Figura 1.32: Recta mínimos cuadrados para el ejemplo 1.30. Hay que tener cuidado con la cantidad de decimales que se usan.

Ejercicio 1.42. En los siguientes casos, grafique los puntos y encuentre la RMC asociada.

1. $(0;1),\ (2;3),\ (4;2)$.
2. $(1;2),\ (2;4),\ (4;4),\ (5;2)$.
3. $(-2;5),\ (0;4),\ (2;3),\ (4;2),\ (6;1)$.
4. $(0;1),\ (1;1{,}6),\ (2{,}2;3),\ (3{,}1;3{,}9),\ (4;5)$.

Ejercicio 1.43. En los siguientes casos grafique los puntos y encuentre la curva exponencial ($y = Ae^{kx}$) que mejor se ajusta a los datos. (Hint: siga la solución del ejemplo 1.26).

1. $(1;15{,}6),\ (3;17),\ (5;18{,}3),\ (7;20),\ (10;22{,}4)$.
2. $(2;13{,}4),\ (4;9),\ (6;6),\ (8;4),\ (10;2{,}7)$.

Ejercicio 1.44. En los siguientes casos grafique los puntos y encuentre la curva polinomial ($y = ax^c$) que mejor se ajusta a los datos. (Hint: siga la solución del ejemplo 1.29).

1. $(1;0{,}5),\ (2,3),\ (3;10),\ (4,15),\ (5,24),\ (6;37)$.
2. $(57{,}6;5{,}3),\ (109{,}2;13{,}7),\ (199{,}7;38{,}3),\ (300{,}2;78{,}1),\ (355{,}2;104{,}5),\ (420{,}1;135{,}0),\ (535{,}7;195{,}6),\ (747{,}3;319{,}2)$.

Ejercicio 1.45. Encuentre la RMC asociada a los siguientes datos

x	2	2,5	3	3	3.5	3.5	4	4
y	1.5	2	2.5	3.5	2.5	3	3	3.5

y prediga el valor esperado cuando $x = 3{,}7$.

Ejercicio 1.46. Un productor recopila los siguientes datos

Producción en cientos: x	5	10	15	20	25	30	35
Precio de la demanda en miles de pesos: p	44	38	32	25	18	12	6

1. Grafique los datos.

2. Encuentre la RMC.

3. Use la RMC para predecir el precio cuando se producen 4.000 unidades.

Ejercicio 1.47. El jefe de marketing de una empresa ha recopilado los siguientes datos que relacionan los gastos en publicidad mensual y las ventas mensuales:

Gasto en publicidad (millones): P	3	4	7	9	10
Ventas (miles de unidades): V	78	86	138	145	156

1. Grafique estos datos.

2. Encuentre la RMC.

3. Use la RMC para predecir las ventas mensuales si es que se gastan \$5.000.000 en publicidad.

Ejercicio 1.48. Complete los detalles de la RMC del ejemplo 1.29, es decir, haga la tabla pertinente y encuentre la ecuación de la recta.

Ejercicio 1.49. Siguiendo con el ejemplo del censo: Ejemplo 1.30. Responda las siguientes preguntas:

1. Suponga ahora que la población crece de forma exponencial ($P(t) = Ae^{kt}$). Usando 4 lugares decimales, encuentre la curva que mejor se ajusta a los datos. ¿Qué sucede si es que solo se consideran 2 decimales? Grafique los datos y las funciones usando alguna herramienta computacional[2].

2. Suponga ahora que los datos siguen una función polinomial ($P(t) = at^c$). Usando 4 lugares decimales, encuentre la curva que mejor que ajusta a esos datos.

3. En todos los casos (RMC, exponencial y polinomial), prediga la población para el año 2012. Como referencia, según el censo recién pasado, la población de Chile es de[3] 16.342 millones de personas. ¿Qué modelo entrega la predicción mas cercana a la realidad?

4. ¿Cómo quedan los modelos si se agrega el dato del 2012 de la pregunta anterior? Es decir agregamos el par (2012;16,342) a los datos que ya teníamos. Según estos modelos ¿Cuál sería la población de Chile para el año 2022?

[2]Una herramienta gratuita para hacer dichos gráficos es LibreOffice, que es muy similar a Microsoft Office, pero de libre acceso. Si tienen alguna pregunta respecto a como utilizar esta herramienta, me pueden consultar vía e-mail.

[3]Al menos eso ha dicho el INE en su última actualización al 26 de Febrero del 2014: http://www.censo.cl/.

Capítulo 2

Cálculo integral

La idea principal de este capítulo es revertir el proceso de derivación visto en el capítulo anterior. A modo de ejemplo, nos interesa encontrar una función $F(x)$ tal que su derivada sea exactamente $f(x) = 3x^2$. De las reglas de derivación que aprendimos anteriormente, es fácil darse cuenta que la función $F(x) = x^3$ cumple con lo anterior.

La función $F(x) = x^3$ se conoce como una *antiderivada* de la función $f(x) = 3x^2$, y el propósito de este capítulo es desarrollar diversas técnicas para encontrar antiderivadas de funciones.

2.1. Antiderivadas, integral indefinida

Definición 2.1. *Diremos que una función $F(x)$ es una* antiderivada o primitiva *de la función $f(x)$ en un intervalo I si se cumple que*

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el intervalo } I.$$

Observación 2.1. Una función puede tener múltiples antiderivadas. Como vimos antes, la función $F(x) = x^3$ es una antiderivada de la función $f(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sin embargo la función $\tilde{F}(x) = x^3 + 1$ también lo es. En efecto, basta notar que

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

Es mas, en vista de que la derivada de cualquier constante C es idénticamente 0, podemos decir que $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ para *cualquier* constante C, es decir ¡hay infinitas antiderivadas!

Teorema 2.1. *Si F y G son antiderivadas de f en un intervalo $I = [a, b]$ entonces debe existir una constante C tal que*

$$F(x) = G(x) + C.$$

Esto quiere decir que todas las posibles antiderivadas se pueden encontrar conociendo una antiderivada particular.

Demostración. Sean F y G antiderivadas de f en el intervalo I, entonces la función $H(x) = F(x) - G(x)$ verifica

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \forall\, x \in I,$$

es decir, H tiene derivada nula en todo el intervalo I. Por otra parte, el teorema del valor medio nos dice que como H es una función continuamente diferenciable en I entonces para cada $x \in (a, b)$ existe un valor $c \in [a, x] \subseteq I$ tal que

$$\frac{H(x) - H(a)}{x - a} = H'(c) = 0,$$

es decir $H(x) = H(a)$ para cualquier valor de x, en otras palabras, la función H debe ser constante. ■

Ejemplo 2.1. De las reglas de derivación sabemos que la función x^2 tiene como derivada a la función $2x$. Por lo tanto podemos decir que $F(x) = x^2$ es una antiderivada de la función $f(x) = 2x$. Asimismo, todas las demás antiderivadas de la función $f(x)$ serán de la forma

$$x^2 + C$$

para alguna constante C.

Ejemplo 2.2 (Una ecuación diferencial). Vimos en la definición que para encontrar una antiderivada para la función $f(x)$ debemos encontrar una función $F(x)$ que cumpla

$$F'(x) = f(x). \tag{2.1}$$

Esto es, tenemos una ecuación donde la incógnita es una función $F(x)$ que además aparece derivada. Este tipo de ecuaciones se conoce como *ecuaciones diferenciales*. Por ejemplo, podemos encontrar soluciones de la ecuación diferencial

$$F'(x) = 1.$$

Recordando las reglas de derivación, deducimos que la función $F(x) = x$ satisface dicha ecuación, y en virtud del Teorema 2.1 obtenemos que cualquier solución de la ecuación debe ser de la forma

$$x + C$$

donde C es una constante arbitraria.

La notación de derivada $F'(x)$ también suele escribirse en la notación de Leibniz, es decir

$$F'(x) = \frac{dF}{dx},$$

de esta forma una ecuación diferencial de la forma (2.1) se puede escribir como

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Abusando de la notación y suponiendo que $\frac{dF}{dx}$ es una fracción, podemos escribir

$$\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

que, en conjunto con lo anterior, sugiere que para encontrar la función F debemos *revertir* lo que significa "dF". Sin ser muy precisos hasta ahora, lo que se quiere es *cancelar* la "d", y esto se realiza mediante una operación que se llama *integración* y que tiene como símbolo a "$\int$".

Veremos que de cierto modo se cumple que $\int$ es una inversa para d esto es

$$\int \mathrm{d}F = F \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}\int F = F,$$

es decir, si calculamos dF y luego calculamos $\int \mathrm{d}F$ obtenemos de vuelta F, y lo mismo ocurre si hacemos el proceso al revés, es decir, primero calculamos $\int F$ y luego $\mathrm{d}\int F$ entonces volvemos a obtener F. Esto de ninguna manera es una definición precisa, pero ayuda a entender que el símbolo de integración $\int$ revierte el proceso realizado por el símbolo de derivación d y viceversa.

Definición 2.2 (Integral indefinida)**.** *Dada una función $f(x)$ definida en algún intervalo I, diremos que $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ es la* integral indefinida *de $f(x)$ y con ello nos referiremos a la antiderivada mas general que tenga la función $f(x)$. Esto es, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en I, entonces*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria que se denomina constante de integración*.*

Observación 2.2. Notar que, gracias a la inclusión de la constante C, la integral indefinida de una función f contiene *todas* las posibles antiderivadas de la función.

***Ejemplo 2.3*.** En vista de lo anteriormente visto, tenemos que

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C$$

y

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C.$$

El valor de la constante C es arbitrario, salvo que uno desee que la antiderivada verifique alguna condición adicional. Una de las situaciones donde esto ocurre es cuando uno requiere que la antiderivada que estamos buscando tenga un valor conocido cuando x es cierto valor.

***Ejemplo 2.4*.** Consideremos el ejemplo anterior y busquemos una función F que verifique que $F'(x) = 3x^2$ pero que además satisfaga que $F(1) = 5$. Como vimos anteriormente, la función F debe ser de la forma

$$F(x) = x^3 + C$$

para cierta constante C. Sin embargo, de todas estas posibles funciones solo hay una que verifica $F(1) = 5$, esta es la función $F(x) = x^3 + 4$.

El ejemplo anterior ilustra una *ecuación diferencial* (la parte $F'(x) = 3x^2$) con *condiciones iniciales* (la parte $F(1) = 5$). Esta nomenclatura viene de las aplicaciones, por ejemplo a la Física, Química o Biología, en donde se utilizan ecuaciones diferenciales para modelar diversos fenómenos que varían en el tiempo en donde se conoce el *estado inicial* del fenómeno. Por ejemplo en Física se utilizan ecuaciones diferenciales para determinar la posición futura de un objeto en base la ubicación y velocidad con la que parte la medición.

2.2. Reglas básicas de integración

Lo primero que notamos es que se cumple que $\int$ es la "inversa" del proceso de derivación, es decir, se tiene que

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{2.2}$$

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x). \tag{2.3}$$

Lo anterior se cumple pues si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ entonces $F'(x) = f(x)$ y

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Con esto en mente, podemos deducir una serie de reglas elementales a partir de las reglas de derivación

Regla derivación	Regla Integración
$\frac{d}{dx}(C) = 0$	$\int 0 \, \mathrm{d}x = 0 + C$
$\frac{d}{dx}(kF(x)) = kF'(x)$	$\int kf(x) \, \mathrm{d}x = k \int f(x) \, \mathrm{d}x$
$\frac{d}{dx}(F(x) \pm G(x)) = F'(x) \pm G'(x)$	$\int (f(x) \pm g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$
$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1)x^n$	$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(\ln \lvert x \rvert) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = \cot x + C$
$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$	$\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \operatorname{senh} x + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen} x + C$
$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C$

Con esta serie de reglas elementales ya podemos calcular una gran variedad de integrales indefinidas.

Ejercicio 2.1. Calcular la integral indefinida de la función dada.

1. $f(x) = 3x$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $f(x) = 1$.
5. $f(x) = x + 2$.
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x$.
7. $f(x) = \dfrac{5x - 3\sqrt[5]{x}}{8\sqrt[3]{x}}$.
8. $f(x) = (x+2)(x^2+1)$.
9. $f(x) = 5e^x$.
10. $f(x) = 4\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)$.
11. $f(x) = \cos^2(2x) + \operatorname{sen}^2(2x)$.
12. $f(x) = \dfrac{5}{4 + 4x^2}$.
13. $f(x) = \cosh^2(4x^2+1) - \operatorname{senh}^2(4x^2+1)$.

Integración con condiciones iniciales

Como vimos anteriormente, una función tiene infinitas antiderivadas las cuales varían dependiendo de la constante C que se utilice. Una manera de encontrar una única antiderivada es fijando una condición adicional que queremos que cumple dicha antiderivada.

Por ejemplo, puede ser de interés encontrar una antiderivada $F(x)$ de la función x^2 que además verifique $F(x)$ valga 5 cuando $x = 1$. Utilizando la notación que ya hemos planteado, lo anterior se puede escribir como

$$F(x) = \int x^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad F(1) = 5.$$

Mirando nuestra tabla de integrales, obtenemos que $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ y luego si queremos que se cumpla que $F(1) = 5$ entonces $C = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$. Es decir, la función que cumple con lo pedido es

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{14}{3}.$$

Ejemplo 2.5. Recordemos de cálculo diferencial que si $f(x)$ es una función que depende de x, entonces su derivada $\frac{df}{dx}$ se puede interpretar como la tasa de cambio de la función f con respecto a la variable x.

En este ejemplo consideramos una función $P(t)$ que modela la población de ciertos individuos en un determinado tiempo t. En vista de lo comentado, $\frac{dP}{dt}$ se puede pensar que es la tasa de cambio de la población con respecto al tiempo, es decir, es la tasa de crecimiento de dicha población.

Supongamos ahora que una población tiene una tasa de crecimiento

$$\frac{dP}{dt} = 100 + 20e^t,$$

donde $P(t)$ es la población en miles de habitantes al tiempo t medido en años. Si la población cuando $t = 0$ es de 40 mil habitantes, determine la población al quinto año.

Para resolver este problema notemos que

$$P(t) = \int \frac{dP}{dt} \,\mathrm{d}t = \int (100 + 20e^t) \,\mathrm{d}t = 100t + 20e^t + C$$

y como $P(0) = 40$ entonces $40 = 100 \cdot 0 + 20e^0 + C \Rightarrow C = 40$, por lo tanto $P(t) = 100t + 20e^t + 40$. Finalmente obtenemos que la población al quinto año es $P(5) = 500 + 20e^5 + 40 \approx 3508{,}263$ mil habitantes.

Ejemplo 2.6. Otro fenómeno que se puede resolver es el de *caída libre*. Considere un objeto que se deja caer desde una altura de 100 metros. Usando el hecho de que la aceleración de gravedad es constante, podemos determinar el tiempo que le toma al objeto en llegar al suelo.

Si consideramos la dirección *hacia arriba* como la dirección positiva y recordando que la aceleración de gravedad es de 9,8 $\frac{m}{s^2}$ obtenemos que la aceleración del objeto está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = -9{,}8$$

en tanto que si el objeto se deja caer, su velocidad inicial sera de 0, es decir

$$v(0) = 0.$$

Integrando para obtener una fórmula para v tenemos que $v(t) = -9{,}8t + C$, pero si $v(0) = 0$ entonces se debe cumplir que $v(t) = -9{,}8t$. Ahora bien, la velocidad del objeto se obtiene mediante la variación en el tiempo de la altura del mismo, es decir

$$\frac{dh}{dt} = v(t) = -9{,}8t$$

y por lo tanto al integrar obtenemos que $h(t) = -4{,}9t^2 + C$, pero además sabemos que la altura inicial es de 100 metros, por lo tanto $h(0) = 100$ y obtenemos que $h(t) = -4{,}9t^2 + 100$. Finalmente, para obtener el tiempo que le toma al objeto llegar al suelo, imponemos la condición de llegada al suelo, es decir $h(t) = 0$ y concluimos que

$$t^2 = \frac{100}{4{,}9} \approx 20{,}41 \Rightarrow t \approx 4{,}52,$$

es decir, al objeto le toman aproximadamente 4,52 segundos llegar al suelo.

Ejercicio 2.2. Para cada una de las funciones del Ejercicio 2.1 determine una antiderivada F de la función f ahí señalada que además satisfaga $F(1) = 4$.

2.3. Métodos de integración

En la sección anterior vimos las reglas básicas para integrar, sin embargo hay bastantes funciones a las cuales aun no le podemos la integral indefinida, como por ejemplo $(x+1)^4$, $\ln x$, $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$, $\operatorname{sen}^2(x)$ etc.. Es por aquello que debemos desarrollar algunas técnicas para poder hacer dichos cálculos.

Un comentario importante de realizar es que la filosofía detrás de todas estás técnicas no es resolver de inmediato la integral, si no mas bien hacer algo para que la integral resultante sea mas simple que la original.

2.3.1. Sustitución o cambio de variables

Esta técnica es la inversa de la regla de la cadena.

Regla de la cadena	Cambio de variables
$\frac{d}{dx}(f(u(x)) = f'(u(x))u'(x)$	$\int f'(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = f(u(x)) + C$

Si bien la regla se puede aprender en esta forma, es bueno recordar la notación diferencial, esto es, la notación que dice $du = u'(x)dx$ de donde podemos escribir

$$\int f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u) + C$$

que no es mas que una versión de (2.2) escrita con otras variables. Con lo anterior en mente tenemos el siguiente

Teorema 2.2. *Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$, entonces*

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Para poder utilizar este teorema en ejemplos concretos es crucial ser capaces de identificar la función $u(x)$. Por ejemplo, si queremos calcular $\int (x+1)^4\,\mathrm{d}x$ utilizando este método, debemos primero notar que la función que queremos integrar, $(x+1)^4$ se puede escribir como una composición de dos funciones: la función $f(u) = u^4$ y la función $u(x) = x + 1$. Esto indica que la función $u(x)$ es lo que está “dentro” de otra función, sin embargo uno también debe verificar que aparezca el término $u'(x)dx$ en la expresión integral. En nuestro ejemplo $u'(x) = 1$ y podemos escribir la integral como

$$\int (x+1)^4\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^4 \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x = \int (u(x))^4 u'(x)\,\mathrm{d}x = \int u^4\,\mathrm{d}u$$

y finalmente como $\frac{u^5}{5}$ es una antiderivada de u^4 obtenemos que

$$\int (x+1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{(u(x))^5}{5} + C = \frac{(x+1)^5}{5} + C.$$

Lo anterior se puede sistematizar de la siguiente manera:

1. Elegir la función $u(x)$. Usualmente es una función que está "dentro" de otra (entre paréntesis, en un denominador, en un exponente, etc.).
2. Encontrar el diferencial $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Escribir la integral solo en términos de u y calcularla usando reglas ya conocidas.
4. Sustituir u por $u(x)$.

Ejercicio 2.3. Use una sustitución para calcular las integrales indefinidas siguientes.

1. $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int (x+2)^{100}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^2+2}.$
7. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3+10}\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int 5xe^{4x^2-1}\,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x}{2x^3+3x^2}\,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int \frac{6}{\left(4x^2+2x+\frac{1}{4}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$
12. $\displaystyle\int b^x\,\mathrm{d}x$ con $b>0$.
13. $\displaystyle\int 3^{4x+1}\,\mathrm{d}x.$
14. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)\,\mathrm{d}x.$
15. $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x.$
16. $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x.$
17. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$
18. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$ *Ayuda: Usar* $u(x)=\operatorname{sen} x$.
19. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
20. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$

2.3.2. Integración por partes

La técnica del cambio de variables es útil en diversos ejemplos, sin embargo aún no somos capaces de integrar funciones relativamente simples de escribir, como por ejemplo xe^x o $\ln x$. Notar que si se intenta una sustitución en $\int xe^x\,\mathrm{d}x$, la única posibilidad razonable es decir $u(x)=x$, sin embargo al hacer dicha sustitución llegamos a $\int ue^u\,\mathrm{d}u$ que es la misma integral escrita con otra variable. Es decir, no simplificamos en nada el problema.

La idea detrás de la técnica de integración por partes es revertir la regla del producto de derivadas

Regla del producto	integración por partes
$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$\int(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)+C$

La expresión $\displaystyle\int(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)+C$ es poco práctica en aplicaciones, por lo que escribimos

Teorema 2.3. *Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones diferenciables, entonces*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

o escrito en notación diferencial (recordando que $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$ *y* $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}v$*) mas compacta*

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Notar que le teorema de integración por partes no entrega la respuesta a una integral $\int u\,\mathrm{d}v$, si no que transforma la integral en otra distinta $\int v\,\mathrm{d}u$. Al igual que con la sustitución, la clave para poder utilizar este método es hacer una buena elección de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ dada la integral que deseamos calcular de modo que la integral $\int v\,\mathrm{d}u$ sea mas simple que $\int u\,\mathrm{d}v$.

Para ilustrar el uso de este teorema lo haremos calculando $\int xe^x\,\mathrm{d}x$. Para ello tenemos que identificar que función cumplirá el rol de $u = u(x)$ y cual el rol de $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$. Si bien no hay una regla general para hacer esta elección se puede hacer lo siguiente

1. Elegir $\mathrm{d}v$ como la parte de la función a integrar (incluyendo el $\mathrm{d}x$) que se puede integrar si no estuviera el resto.

2. Elegir u como la parte de la función a integrar que al momento de derivarla quede mas sencilla que la función u original.

¿Cómo se ilustra esto en el ejemplo $\int xe^x\,\mathrm{d}x$? Notar que hay dos posibles elecciones razonables

- $u = e^x$ y $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, ó
- $u = x$ y $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$.

En el caso de la primera alternativa se tiene que $\mathrm{d}v$ es fácil de integrar pues $\int\,\mathrm{d}v = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$, sin embargo al derivar la función $u = e^x$ obtenemos $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$, es decir no se volvió mas sencilla. Si usamos esta elección en el teorema de integración por partes, la integral resultante $\int u\,\mathrm{d}v$ será tan o más compleja que la inicial pues la fórmula queda

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,\mathrm{d}x.$$

Por otra parte, si tomamos la segunda alternativa, tenemos que $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$ por lo tanto $\int\,\mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$ es decir se puede integrar fácilmente, en tanto que si $u = x$ entonces $\mathrm{d}u = 1\cdot\,\mathrm{d}x$, es decir pasamos de x a 1 lo que en este contexto es mas simple. Si usamos esta segunda alternativa, tenemos que

$$u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = e^x,$$

de donde la fórmula de integración por partes nos dice que

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

que en nuestro caso se escribe

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x,$$

pero esta última integral es una de las fórmulas básicas de integración, $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$ y concluimos que

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

Ejercicio 2.4. Use integración por partes para calcular las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 2.7. 1. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$. Si escogemos $u=x$ y $\mathrm{d}v=\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$ tenemos que $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ y $v=-\cos x$ luego

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x &= -x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos x+\operatorname{sen}x+C\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$. Si escogemos $u=\operatorname{sen}x$ y $\mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x$ tenemos que $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$ y $v=e^x$ así

$$\int e^x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=e^x\operatorname{sen}x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Usamos nuevamente integración por partes para la segunda integral con $u=\cos x$ y $\mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x$ para obtener

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=e^x\cos x+\int e^x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x,$$

de donde si llamamos $I=\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$ hemos obtenido lo siguiente

$$I=e^x\operatorname{sen}x-\int e^x\cos dx=e^x\operatorname{sen}x-\left(e^x\cos x+I\right)\Rightarrow I=\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen}x-\cos x\right).$$

Notar que como consecuencia obtuvimos también que

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right),$$

3. $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$. Si escogemos $u=\arctan x$ y $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ tenemos que $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ y $v=x$ luego

$$\begin{aligned}\int\arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int\operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2}x\,\mathrm{d}x$

2.3.3. Fracciones parciales

¿Cómo calcular la integral $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$?

Esta integral se puede calcular de distintas formas, siendo quizás la mas simple de todas mediante una sustitución. Si $u = x^2 - 1$ entonces $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ por lo tanto tenemos que

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln\left|x^2-1\right| + C.$$

Sin embargo, al intentar calcular una integral muy similar como $\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ notamos que la sustitución anterior no funcionará pues el término $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ no aparece. Sin embargo, al notar que

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \tag{2.4}$$

entonces podemos usar la aditividad de la integral indefinida para escribir

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

y transformar el problema de calcular la integral $\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ en el cálculo de dos integrales mas simples, esto pues podemos hacer sustituciones para obtener

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x-1| + C\\ \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \ln|v| + C = \ln|x+1| + C,\end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

La clave en este cálculo es lo realizado en (2.4), donde escribimos la función $\dfrac{2}{x^2-1}$ como una suma/resta de fracciones mas simples o *parciales*. Este proceso se puede generalizar a *funciones racionales* del tipo $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ donde N, D son polinomios.

La idea fundamental detrás de este método está basada en el Teorema Fundamental del Álgebra que nos dice que cualquier polinomio real se puede factorizar en factores lineales $(ax+b)$ y factores cuadráticos irreducibles[1] (ax^2+bx+c).

Ejemplo 2.8. El polinomio $D(x) = x^5 + x^4 - x - 1$ se puede factorizar como

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - x - 1 &= x^4(x+1) - (x+1)\\ &= (x^4-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

es decir, tenemos un factor cuadrático irreducible (x^2+1) y dos factores lineales $(x-1)$ y $(x+1)$, este último elevado al cuadrado.

El método general es como sigue: Si $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ es una función racional donde el grado del polinomio $N(x)$ es n y el grado del polinomio $D(x)$ es d entonces

[1] Que no tiene raíces reales.

1. Si $n \geq d$ entonces haga la división de polinomios, obteniendo la siguiente escritura
$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{N_0(x)}{D(x)},$$
donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n-d$ y N_0 es un polinomio de grado $n_0 < d$. En lo que sigue se trabajará con la fracción $\dfrac{N_0(x)}{D(x)}$.

   Si $n < d$ entonces en lo que sigue pensar que $N(x) = N_0(x)$.

2. Factorice el polinomio $D(x)$ hasta obtener la factorización irreducible.

3. Por cada factor lineal $(ax+b)^m$ que aparezca en la factorización de $D(x)$ escribir
$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{(ax+b)^{m-1}} + \frac{A_m}{(ax+b)^m},$$
donde $A_1, \ldots, A_m$ son constantes a determinar.

4. Por cada factor cuadrático irreducible $(ax^2+bx+c)^k$ que aparezca en la factorización de $D(x)$ escribir
$$\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_{k-1}x+C_{k-1}}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$
donde $B_1, \ldots, B_k$ y $C_1, \ldots, C_k$ son constantes a determinar.

5. Escriba la igualdad
$$\frac{N_0(x)}{D(x)} = \text{suma de todos los términos anteriores}$$
y determine las constantes A_j, B_j y C_j haciendo la suma de fracciones e igualando los términos.

Partamos por ver como actúa el método con $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$. En este caso tenemos que $N(x) = 2$ que es de grado 0 y $D(x) = x^2 - 1$ que es de grado 2. Como $0 < 2$ pasamos directamente al paso 2 del método, es decir, factorizamos el polinomio $D(x)$, en este caso
$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$
es decir contamos con dos factores lineales $(x+1)$ y $(x-1)$. El paso 3 del método nos dice que por cada factor lineal debemos considerar una suma de términos, cuya cantidad de términos depende de la potencia que tenga dicho factor lineal. En este ejemplo tenemos que ambos factores lineales están elevados a la potencia 1, es decir debemos considerar un término por cada factor, es decir
$$\begin{aligned}(x+1) &\longrightarrow \frac{A}{x+1}\\ (x-1) &\longrightarrow \frac{B}{x-1}.\end{aligned}$$

Como no hay factores cuadráticos irreducibles, saltamos al paso final y escribimos $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ como la suma de todos los términos anteriores, es decir
$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Finalmente determinamos las constantes, para ello lo que tenemos que hacer es la suma de las fracciones del lado derecho e igualar los numeradores, esto es, usando el denominador común

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow 2 = A(x-1)+B(x+1),$$

es decir se debe cumplir que $A(x-1)+B(x+1) = (A+B)x+(B-A) = 2$ para cualquier valor de x. La única posibilidad es que $A+B=0$ y $B-A=2$ de donde resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que $A=-1$ y $B=1$, es decir

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

que es lo que escribimos anteriormente.

Ejercicio 2.5. Escriba las fracciones parciales para las funciones dadas.

1. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)^3}$.
2. $\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$.
3. $\dfrac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}$.
4. $\dfrac{x^2+1}{x^3+3x-4}$.
5. $\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}$.
6. $\dfrac{2x-1}{x^2-9}$.
7. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$.
8. $\dfrac{x^3+x}{x-1}$.

Ejemplo 2.9. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+9}}{x}\,\mathrm{d}x$. Si hacemos la sustitución $u=\sqrt{2x+9}$ entonces $x=\dfrac{u^2-9}{2}$ y $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$ de donde podemos escribir la nueva integral como

$$\int \frac{\sqrt{2x+9}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{\frac{u^2-9}{2}} u\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = 2\int \left(1+\frac{9}{(u-3)(u+3)}\right)\mathrm{d}u.$$

2.3.4. Integrales trigonométricas y sustituciones trigonométricas

Ejemplo 2.10. Sea $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ entonces

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

y

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Por otra parte $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ y por lo tanto podemos usar esta sustitución para calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 2.11. Calcular $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$. Para ello escribimos $\cos^3 x = \cos^2 x\cdot\cos x = (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x$ y si hacemos la sustitución $u=\operatorname{sen} x$ entonces

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int (1-u^2)\,\mathrm{d}u \\
&= u - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.12. Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Para ello escribimos

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \operatorname{sen} x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

así hacemos la sustitución $u = \cos x$ obtenemos que $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ y

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int (1-u^2)^2 u^2\,\mathrm{d}u$$

Ejemplo 2.13. Calcular $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Acá usamos la identidad trigonométrica

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Ejemplo 2.14. Calcular $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

En general podemos desarrollar una estrategia para integrar funciones del tipo

$$\operatorname{sen}^m x \cos^n x$$

donde dependiendo de la paridad de n y m usamos las ideas anteriores. En general tenemos que

- $\operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x = \operatorname{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x = \operatorname{sen}^m x (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x$ y usamos la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.
- $\operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x = (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x$ y usamos la sustitución $u = \cos x$
- $\operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2l} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos^2 x)^l = \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^k \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^k$ o bien usar que

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

La misma idea aplica a funciones de la forma $\tan^m x \sec^n x$ pues tenemos las identidades

$$
\begin{aligned}
\sec^2 x &= 1 + \tan^2 x \\
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.15. $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x$ y usamos la sustitución $u = \sec x + \tan x$ así $\mathrm{d}u = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,\mathrm{d}x$

Ejemplo 2.16. $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \sec x$ e integramos por partes con $u = \sec x$ y $\mathrm{d}v = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ así

$$
\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x + \int \sec x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.17. Tenemos las siguientes identidades trigonométricas

- $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\right)$
- $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \operatorname{sen}(a+b)\right)$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

lo que nos permite calcular integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.18. Calcular $\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ donde $R > 0$ y $x \in [-R, R]$. Notar que cuando $x \in [-R, R]$ la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ describe una semi-circunferencia de radio R. Otra manera de describir dicha semi-circunferencia es mediante coordenadas polares, esto es, considerar la función $g(\theta) = R \operatorname{sen} \theta$ para $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esto da pie para considerar una sustitución de la forma

$$x = R \operatorname{sen} \theta,$$

de donde obtenemos que $\mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ y como $R^2 = R^2\cos^2\theta + R^2\operatorname{sen}^2\theta$ obtenemos que

$$R^2 - x^2 = R^2 - R^2\operatorname{sen}^2\theta = R^2\cos^2\theta$$

por lo que la integral se transforma a

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{R^2\cos^2\theta} R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int R^2 \left|\cos\theta\right| \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

como estamos en el intervalo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entonces $\cos\theta \geq 0$ por lo que debemos calcular

$$R^2 \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{2}\int (1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) + C.$$

Finalmente, volvemos a la variable $x = R\operatorname{sen}\theta$ de donde $\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R}$ y obtenemos

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{R^2}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R}\right)\right) + C = \frac{R^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R} + \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + C$$

Esta idea aplica a integrales que cuenten con términos de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ donde se utilizan $x = a\operatorname{sen}\theta$, $x = a\tan\theta$ ($\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) y $x = a\sec\theta$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ó $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$) respectivamente.

Ejercicio 2.6. Calcular las siguientes integrales usando la sustitución sugerida.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $x = 3\cos\theta$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,\mathrm{d}x$, $x = 2\tan\theta$.
3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$, $x = 2\tan\theta$.
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x$, $x = a\operatorname{sen}\theta$.
5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}$, $x = \frac{3}{2}\tan\theta$.

2.4. Sumatorias

Antes de pasar a la siguiente sección, primero debemos hacer un breve repaso de sumatorias y de notación. Dado que utilizaremos a menudo expresiones como

$$1+2+3+4+\ldots+50+51+\ldots$$

o cosas como

$$a_1+a_2+\ldots+a_i+\ldots+a_n$$

es que debemos hacer mas preciso lo que significan los puntos suspensivos. Para ello es que introducimos la notación *sigma* dada por la letra griega Σ de la siguiente forma: La suma de n términos de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe como

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

y denota el resultado de sumar los n términos antes señalados.

Ejemplo 2.19.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i=1+2+3+4+5=16$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i=1+2+3+4+\ldots+98+99+100=5050$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(2i+1)=(2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1)=3+5+7+9=24$
4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} j^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55$
5. $\sum_{j=1}^{50} j^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+49^2+50^2=128775$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(k^2+1\right)=\frac{1}{n}\left(1^2+1\right)+\frac{1}{n}\left(2^2+1\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(n^2+1\right)$

Algunas propiedades y fórmulas importantes son las siguientes

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ka_i=k\sum_{i=1}^{n} a_i.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i\pm\sum_{i=1}^{n} b_i.$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k=kn.$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}.$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$
7. Si $a\neq 1$ entonces $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ o bien $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i=\frac{a^{n+1}-a}{a-1}$. A este tipo de sumas se le llama sumas *geométricas*.
8. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_0$. A este tipo de sumas se le llama sumas *telescópicas*.

Ejemplo 2.20.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}1\\ &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot n\\ &= \frac{n+3}{2n}\end{aligned}$$

Notar además que a medida que n crece la suma parece tener un límite pues

n	$\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2}$
10	0,65
100	0,515
1000	0,5015
10000	0,50015

en efecto, si calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.7. Encuentre el valor de las siguientes sumatorias.

1. $\sum_{i=1}^{2022} i$.
2. $\sum_{i=50}^{2022} i$.
3. $\sum_{i=1}^{20} 5i$.
4. $\sum_{i=0}^{50}(2i+1)$.
5. $\sum_{k=0}^{100} 3k^2$.
6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n}$.
7. $\sum_{i=1}^{25}(1-5i)^2$.
8. $\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2+1}{n}$.

2.5. Integral definida

2.5.1. Aproximando áreas

Nos interesa calcular el área acotada por una función en el plano. Por ejemplo podríamos calcular el área encerrada bajo la curva $y = x$ y el eje x en el intervalo $[0, 2]$ como muestra la Figura 2.1.

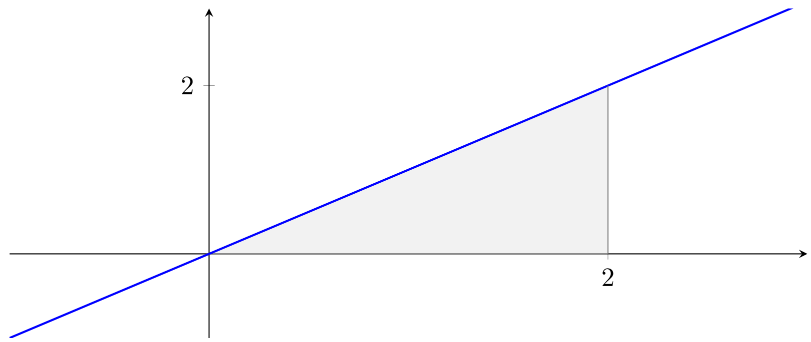
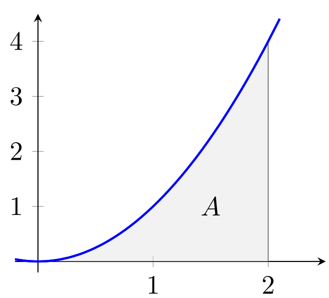
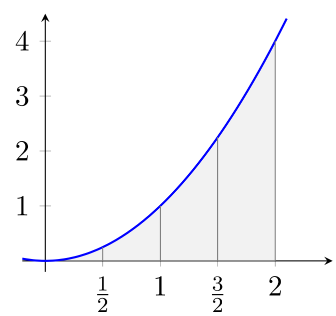


Figura 2.1: Área a calcular

Debido a que la región es un triángulo de base 2 y altura 2, es fácil determinar que el área encerrada es exactamente igual a 2. Pero ¿qué sucede si cambiamos la función por una donde la geometría no sea tan simple? Por ejemplo, calcular el área bajo la curva $y = x^2$ y el eje x en el intervalo $[0, 2]$ como muestra la figura Figura 2.2



(a) Área a calcular.



(b) Subdivisión del intervalo.

Figura 2.2: Área encerrada bajo $y = x^2$ en $[0, 2]$.

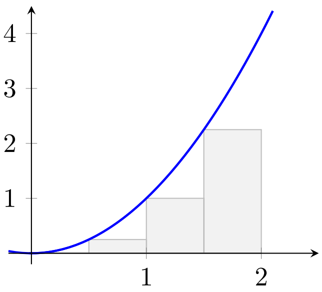
Un método para esto es primero calcular una aproximación del área para luego ver si mediante un proceso de límites podemos obtener el área real. La idea es dividir el área en secciones mas pequeñas (ver Figura 2.2) y luego aproximar dichas secciones por rectángulos.

En nuestro ejemplo podemos dividir el intervalo $[0, 2]$ en intervalos mas pequeños y aproximar el área mediante una suma de áreas de rectángulos (ver Figura 2.3). En la Figura 2.3 se ven tres posibles aproximaciones del área encerrada por la curva x^2 y el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Como se aprecia en (a), (d) y (g) vemos que está es una aproximación donde el área descrita por los rectángulos es *inferior* al área que buscamos, mientras que en las aproximaciones (c), (f) e (i) vemos que el área de los rectángulos es *superior* al área buscada. Esto cobrará relevancia mas adelante. Además tenemos las aproximaciones de punto medio dadas en (b), (e) y (h).

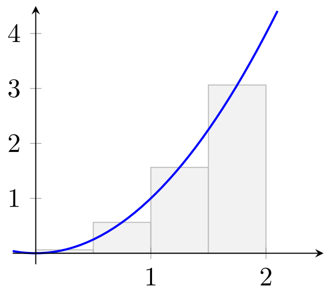
Otra cosa que se puede apreciar en Figura 2.3 es que a medida que aumentamos la cantidad de subdivisiones del intervalo $[0, 2]$, la aproximación vía rectángulos se parece cada vez mas al área que queremos calcular.

Si hacemos el cálculo para los casos de 4 rectángulos obtenemos que

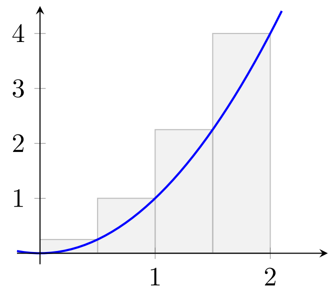
$$S_{izq} = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = 1{,}75$$



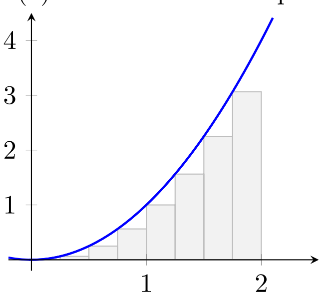
(a) Usando vértices izquierdos



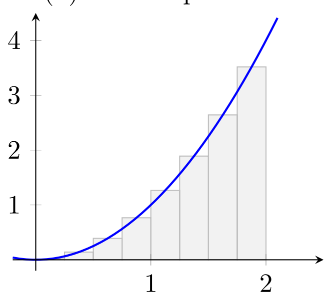
(b) Usando puntos medios



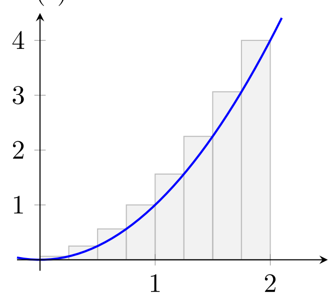
(c) Usando vértices derechos



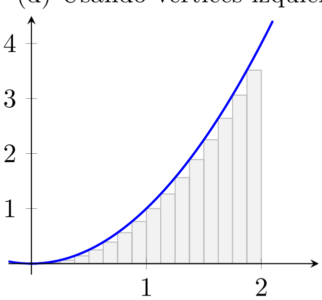
(d) Usando vértices izquierdos



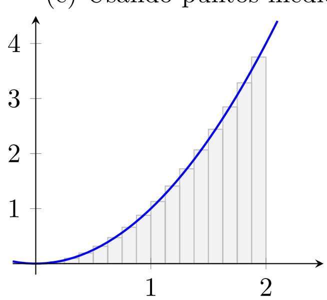
(e) Usando puntos medios



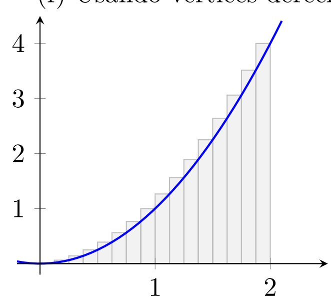
(f) Usando vértices derechos



(g) Usando vértices izquierdos



(h) Usando puntos medios



(i) Usando vértices derechos

Figura 2.3: Aproximación del área a calcular mediante 4, 8 y 16 rectángulos

$$S_{med} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{21}{8} = 2{,}625$$
$$S_{der} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 = \frac{15}{4} = 3{,}75,$$

de donde, al ver el dibujo obtenemos que

$$1{,}75 = S_{izq} < A < S_{der} = 3{,}75 \quad \text{y} \quad A \approx S_{med} = 2{,}625.$$

Si hacemos el cálculo para los 8 rectángulos obtenemos

$$\begin{aligned} S_{izq} &= \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \frac{35}{16} = 2{,}1875 \\ S_{med} &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{11}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{13}{8}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{15}{8}\right)^2 \\ &= \frac{85}{32} = 2{,}65625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{der} &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot 1^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot 2^2\\ &= \frac{51}{16} = 3{,}1875\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$2{,}1875 = S_{izq} < A < S_{der} = 3{,}1875 \quad \text{y} \quad A \approx 2{,}65625.$$

Veremos un poco mas adelante que a medida que se aumenta el número de rectángulos, las distintas sumas se empiezan a parecer mas y mas al valor $\frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$ lo que nos sugiere decir que el área que queremos calcular es exactamente $\frac{8}{3}$.

Usemos esta idea en un caso general. Sea f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Queremos calcular el área encerrada bajo la curva y el eje x, para ello la idea es dividir el intervalo $[a, b]$ en intervalos mas pequeños y repetir lo hecho anteriormente. Consideraremos una división mediante n sub-intervalos del mismo tamaño, es decir, cada sub-intervalo tendrá largo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{2.5}$$

como muestra la Figura 2.4. Los valores en el eje x entonces se pueden escribir como

$$\begin{aligned}x_0 &= a\\ x_1 &= x_0 + \Delta x = a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}\\ x_2 &= x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x = a + 2\frac{b-a}{n}\\ &\vdots\\ x_i &= x_{i-1} + \Delta x = a + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}\\ &\vdots\\ x_n &= x_{n-1} + \Delta x = a + n\Delta x = b\end{aligned}$$

Esto nos dará el largo de la base de cada rectángulo a considerar. Además, si para cada rectángulo tomamos

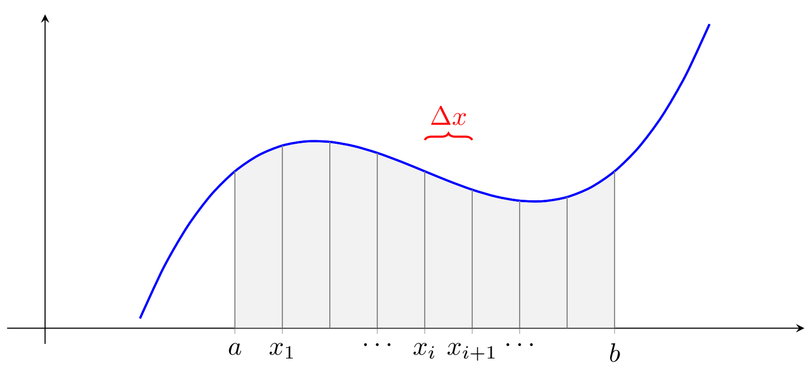


Figura 2.4: Sub-división del intervalo $[a, b]$.

como altura del rectángulo i-ésimo al valor de la función en el extremo derecho de cada intervalo tenemos que la altura será $f(x_i)$ (ver Figura 2.5), por lo tanto, el área del rectángulo i-ésimo será

$$A_{R_i} = f(x_i)\Delta x$$

y la suma completa será la aproximación del área definida por los extremos derechos de cada intervalo, esto es, como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned}
S_{der}(n) &= A_{R_1} + A_{R_2} + \ldots + A_{R_i} + A_{R_i+1} + \ldots + A_{R_n} \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_i)\Delta x + f(x_{i+1})\Delta x + \ldots f(x_n)\Delta x \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \ldots f(x_n)).
\end{aligned}$$

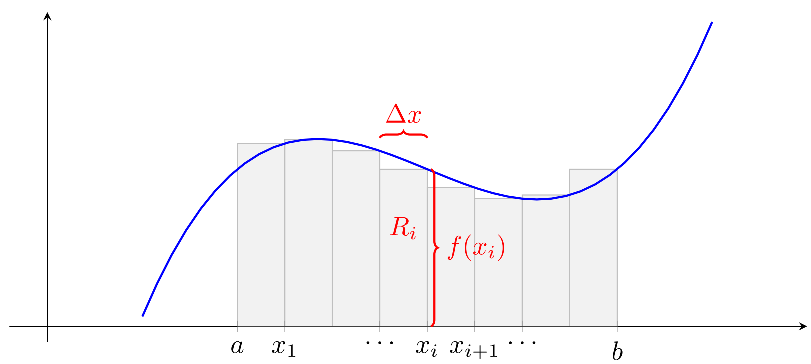


Figura 2.5: Rectángulos con altura asociada al extremo derecho.

Como dijimos en el ejemplo del comienzo, a medida que aumenta el valor de n, el valor de la suma debería parecerse cada vez mas al área encerrada entre la curva y el eje x, es por esto que hacemos la siguiente

Definición 2.3. *Si f es una función continua y no-negativa en un intervalo I que contiene a $[a, b]$, entonces definimos el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$ como*

$$\begin{aligned}
A(f) &= \lim_{n\to\infty} S_{der}(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \ldots f(x_n)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).
\end{aligned}$$

Una cosa importante en la definición es asegurarnos que el límite existe, para ello tenemos

Teorema 2.4. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces el límite $\lim_{n\to\infty} S_{der}(n)$ existe. Además si definimos*

$$\begin{aligned}
S_{izq}(n) = S_{izq}(f, n) &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_i)\Delta x + f(x_{i+1})\Delta x + \ldots f(x_{n-1})\Delta x \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \ldots f(x_{n-1})),
\end{aligned}$$

es decir, si utilizamos los extremos izquierdos de cada sub-intervalo para determinar la altura de nuestros rectángulos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_{der}(n) = \lim_{n\to\infty} S_{izq}(n). \tag{2.6}$$

Demostración. Que los límites existen lo veremos mas adelante cuando veamos sumas de Riemann. Ahora solo demostraremos que de existir, ambos límites coinciden. En efecto

$$S_{izq}(n) = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \ldots f(x_{n-1}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \ldots f(x_{n-1}) + f(x_n)) - \frac{(b-a)}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= S_{der}(n) - \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

y como f es una función continua en $[a, b]$ tenemos que $(b-a)(f(b) - f(a))$ es una cantidad finita, por lo tanto

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} = 0,
$$

y se concluye la demostración. ■

Ejemplo 2.21. Veamos que sucede con $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$ (el triángulo que vimos al comienzo y que sabemos que área encerrada es 2). Tenemos que en este caso $\Delta x = \frac{2}{n}$, luego si dividimos el intervalo $[0, 2]$ en n sub-intervalos iguales, obtenemos que

$$
x_i = a + i\Delta x = 0 + i \cdot \frac{2}{n} = \frac{2i}{n},
$$

de donde la suma derecha queda

$$
S_{der}(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i,
$$

pero si recordamos la fórmula para la suma de los primeros n enteros

$$
\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}
$$

obtenemos que

$$
S_{der}(n) = \frac{2n(n+1)}{n^2} = 2 + \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2,
$$

que era el valor que esperábamos.

Adicionalmente, en vez de tomar los extremos derechos o izquierdos como puntos de referencia para la altura de los rectángulos, se puede tomar cualquier punto x_i^* en el sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (como por ejemplo el punto medio $x_i^* = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$) y se obtiene una suma de la forma

$$
S^*(n) = (f(x_1^*) + f(x_2^*) + \ldots + f(x_i^*) + f(x_{i+1}^*) + \ldots f(x_{n-1}^*))\Delta x,
$$

y el límite será el mismo. Veremos esto mas adelante en la sección de sumas de Riemann.

Ejemplo 2.22. Escriba las sumas izquierda y derecha.

1. $f(x) = x^2$, $[0, 2]$.

2. $f(x) = x^3$, $[0, 2]$.

3. $f(x) = e^x$, $[-1, 1]$.

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$.

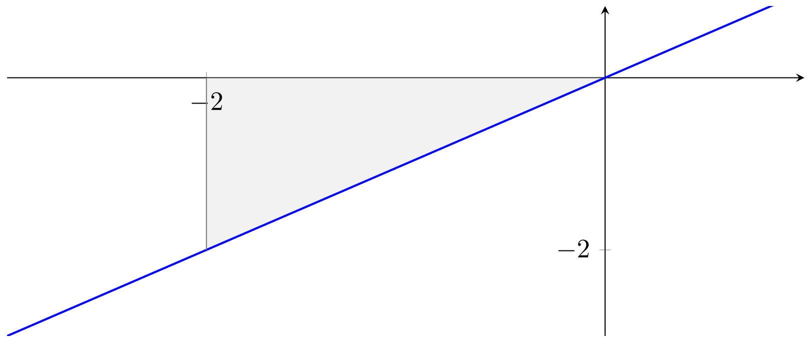


Figura 2.6: Función $f(x) = x$ en el intervalo $[-2, 0]$.

¿Áreas negativas?

Hasta ahora hemos trabajado con funciones que tienen valores no-negativos en el intervalo de interés, pero al ver la fórmula en la definición de $A(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ tenemos que el cálculo se puede hacer incluso si la función f toma algunos valores negativos.

Veamos por ejemplo la función $f(x) = x$ pero ahora en el intervalo $[-2, 0]$. Como observamos en la Figura 2.6, la región de interés sigue siendo un área (al igual que antes, es un triángulo de área 2). Sin embargo, si usamos nuestro esquema de aproximación dado por la fórmula $A(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}, \\
x_i &= -2 + \frac{2i}{n},
\end{aligned}$$

lo que nos da

$$\begin{aligned}
S_{der}(n) &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(-2 + \frac{2i}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{2i}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (-2) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n} \\
&= -4 + 2 \\
&= -2,
\end{aligned}$$

es decir, obtuvimos un número negativo (por lo tanto ¡no puede ser interpretado como un área!). Sin embargo, el valor -2 es exactamente el negativo del valor 2 que si es el área encerrada entre función y el eje x. Esto no es casualidad pues se tiene que

Teorema 2.5. *Si f es una función continua y no-positiva en un intervalo I que contiene a $[a, b]$, entonces el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$ está dada por*

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

donde $A(f)$ está definido en la Definición 2.3.

Demostración. Basta notar que si f es no-positiva, entonces $g(x) = -f(x)$ es no-negativa y el área encerrada es entre el gráfico de g y el eje x es la misma que la encerrada por el gráfico de f y el eje x. ■

Este resultado nos dice que nuestra definición de "área" es solo un área cuando la función está por sobre el eje x, en tanto que es el negativo de un "área" cuando la función está bajo el eje x. En general, para una función $f(x)$ que cambia de signo en un intervalo $[a, b]$ tenemos que la cantidad $A(f)$ *no es* el área encerrada entre la curva y el eje x si no mas bien un *área neta* que se calcula sumando las áreas encerradas en por la parte positiva y restando áreas encerradas por la parte negativa.

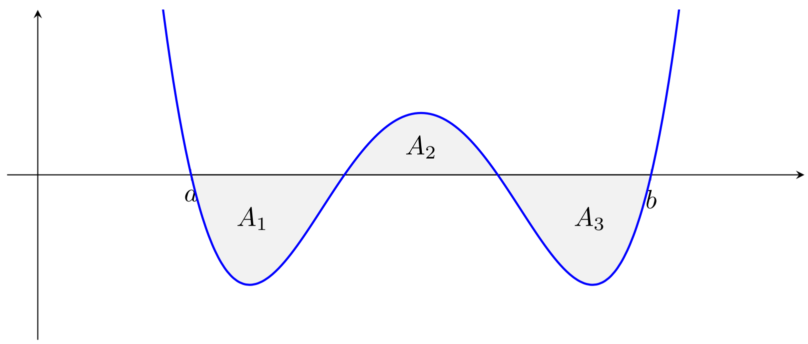


Figura 2.7: Función que cambia de signo en el intervalo $[a, b]$.

En el caso de la Figura 2.7 tenemos la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ cambia de signo, y si tuviéramos a disposición el valor de las áreas A_1, A_2 y A_3 entonces

$$A(f) = -A_1 + A_2 - A_3,$$

donde aparentemente vemos del dibujo que $A(f) < 0$ pues el área A_2 se ve mas pequeña que la suma de las áreas A_1 y A_2. Aprovechamos la instancia para volver a enfatizar que $A(f)$ no es un área si la función cambia de signo, pero si se puede utilizar para calcular el área si es que se tienen en cuenta las observaciones antes dadas.

2.5.2. La integral definida

El objeto $A(f)$ que definimos anteriormente no es bueno llamarlo $A(f)$ pues llama al error de pensar que es un área. Es por esto que definimos

Definición 2.4 (Integral definida, primera definición)**.** *Para una función f continua en un intervalo I que contiene a $[a, b]$ definimos la* integral definida *de f en $[a, b]$ como*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta x),$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Observación 2.3. Notar que a pesar de usar el mismo símbolo de integral que la integral indefinida, ahora se agregan los extremos del intervalo donde se está trabajando. Además, en esta definición no se usa en ninguna parte el concepto de antiderivada. Volveremos a esto mas adelante.

De esta definición y de las propiedades del área podemos deducir algunas propiedades importantes

Proposición 2.1. *Sea f una función continua en un intervalo I que contiene a $[a,b]$.*

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$
3. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
5. *Si* $f(x)\leq g(x)$ *entonces* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
6. *Si* $c\in[a,b]$ *entonces*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pseudo demostración.
1. No hay área.
2. Es el área del rectángulo.
3. $S_{der}^{kf(x)}(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n kf(x_i) = k\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) = S_{der}^{f(x)}(n)$.
4. $S_{der}^{f(x)\pm g(x)}(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n (f(x_i)\pm g(x_i)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) \pm \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i)) = S_{der}^{f(x)}(n) \pm S_{der}^{g(x)}(n)$.
5. Evidente.

■

Definición 2.5. *Si $a\leq b$ entonces definimos*

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.8. Calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 5\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^3 (x+2)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_1^3 4x\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-1}^2 (3x-1)\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 2.9. Calcular $\int_0^5 5f(x)\,\mathrm{d}x$ suponiendo que

1. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ y $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
2. $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$ y $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.
3. $\displaystyle\int_0^2 (4f(x)+2)\,\mathrm{d}x = 5$ y $\displaystyle\int_2^5 (9f(x)-5)\,\mathrm{d}x = 1$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$, $\displaystyle\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, y $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x = -10$.

2.6. Sumas de Riemann

Vimos en las secciones anteriores la idea de dividir el área encerrada entre el gráfico de una función f y el eje x usando rectángulos para poder así calcular dicha área mediante un proceso límite. Hicimos esto usando una partición uniforme del intervalo $[a, b]$, es decir, dividimos el intervalo en n sub-intervalos, cada uno de longitud $\frac{b-a}{n}$. Luego usamos el valor de f en algún valor x_i^* de cada sub-intervalo.

Dicha idea se puede generalizar un poco si es que consideramos una función no necesariamente no-negativa f, *cualquier* partición del intervalo $[a, b]$ que consista de n sub-intervalos. Por ejemplo, podemos considerar el intervalo $[0, 4]$ y dividirlo en 4 sub-intervalos uniformemente, esto es

$$0 = x_0 < 1 = x_1 < 2 = x_2 < 3 = x_3 < 4 = x_4,$$

pero también podríamos tomar la partición

$$0 = x_0 < 0{,}5 = x_1 < 1{,}75 = x_2 < 3{,}1 = x_3 < 4 = x_4,$$

donde observamos que las longitudes de cada sub-intervalos son distintas. Asociada a esta partición podemos definir, al igual que antes, una suma de áreas de rectángulos para la función $f(x)$, por ejemplo, escogiendo el extremo derecho de cada sub-intervalo como valor de referencia, así tendríamos una suma (ver Figura 2.8)

$$S = f(0{,}5)(0{,}5 - 0) + f(1{,}75)(1{,}75 - 0{,}5) + f(3{,}1)(3{,}1 - 1{,}75) + f(4)(4 - 3{,}1).$$

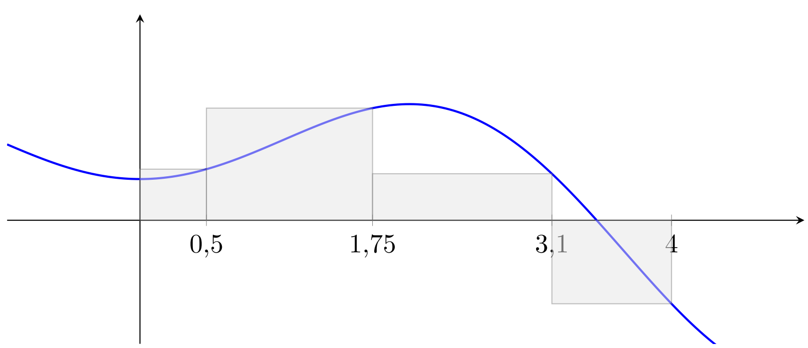


Figura 2.8: Suma de Riemman con partición no uniforme.

Para hacer esto mas general debemos primero hacer algunas definiciones.

Definición 2.6. *Dado un intervalo $[a, b]$, una* partición $\mathcal{P}$ *del intervalo es un conjunto finito de valores $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tales que*

1. *$x_0 = 1$, $x_n = b$,*
2. *$x_{i-1} < x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Definimos también la cantidad $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que es la longitud del intervalo i-ésimo.

Definición 2.7. *Dada una partición $\mathcal{P}$, definimos la* norma *de la partición como*

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \Delta x_i.$$

Definición 2.8. *Dada un partición* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$*, una función continua* f *en un intervalo* I *que contenga a* $[a, b]$*, y una lista de valores* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ *tales que*

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \textit{para } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

definimos la Suma de Riemann *asociada a la partición* $\mathcal{P}$*, la función* f *y al conjunto de puntos de evaluación* $\mathcal{C}$ *como*

$$S_R(\mathcal{P}, f, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Ejemplo 2.23. Consideremos la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Vimos anteriormente las sumas izquierdas, derechas y de punto medio en particiones uniformes. Todos esos ejemplos son ejemplos de sumas de Riemann.

También es una suma de Riemann la siguiente: Consideremos la partición $\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ y los puntos $\mathcal{C} = \{0, 1, 2\}$ entonces la suma de Riemann asociada es

$$S_R = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Por otra parte si consideramos $\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ y la colección de puntos $\mathcal{C} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2\right\}$ (ver Figura 2.9) entonces la suma de Riemann asociada es

$$S_R = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{93}{32} = 2{,}90625.$$

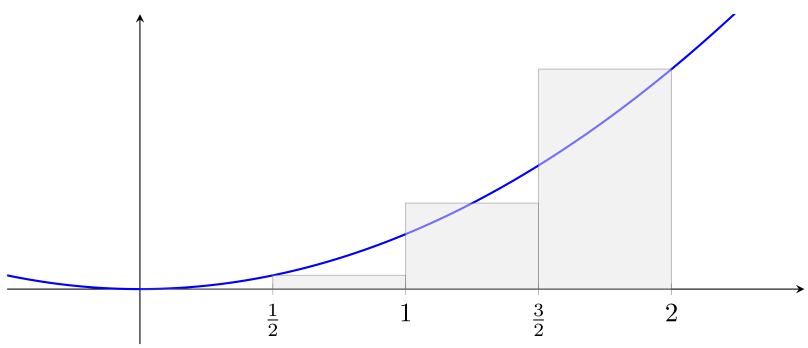


Figura 2.9: Suma de Riemman con partición uniforme y puntos arbitrarios.

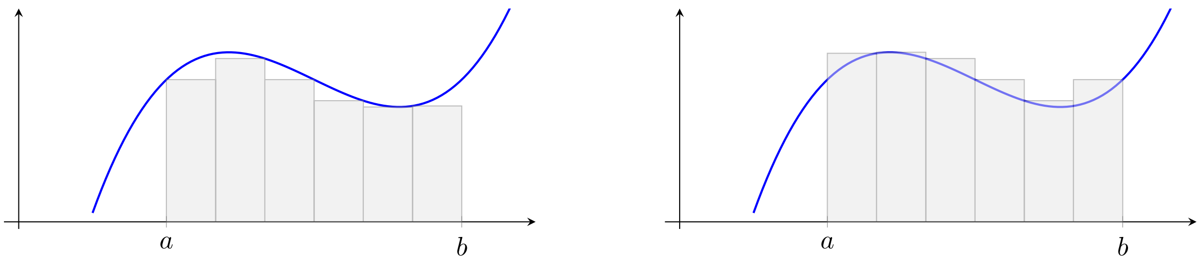
Dentro de las diversas elecciones que tenemos para las sumas de Riemman, hay dos elecciones que son muy importantes: la suma inferior y la suma superior (ver Figura 2.10).

Definición 2.9 (Sumas inferiores y superiores)**.** *Dada un partición* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$ *y una función continua* f *en un intervalo* I *que contenga a* $[a, b]$*, consideramos la lista de valores* $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ *tales que* $M_i = M_i(f)$ *satisface*

$$f(M_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \textit{para } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

definimos la Suma de Riemann superior *asociada a la partición* $\mathcal{P}$ *y la función* f *como*

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$



(a) Suma inferior (b) Suma superior

Figura 2.10: Sumas de Riemann

Similarmente se define la Suma de Riemann inferior *como*

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i,$$

donde $m_i = m_i(f)$ *verifica*

$$f(m_i) = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \textit{para } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Con la definición de las sumas inferiores y superiores de Riemann podemos al fin definir la integral definida para cualquier función f

Definición 2.10. *Diremos que una función f definida sobre el intervalo $[a, b]$ es Riemann integrable si se cumple que*

$$L = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f) = \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f),$$

en cuyo caso definimos la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L$$

y decimos que la función f es Riemann integrable.

Esta definición la es apropiada, pues la existencia e igualdad de ambos límites garantiza que cualquier otra suma de Riemann para la función (otra partición y otra elección de puntos $\mathcal{C}$) entregue el mismo resultado. La razón detrás de esto es que si $S_R(\mathcal{P}, f, \mathcal{C})$ es cualquier suma de Riemann para la función f, entonces

$$s(\mathcal{P}, f) \leq S_R(\mathcal{P}, f, \mathcal{C}) \leq S(\mathcal{P}, f)$$

puesto que en cada sub-intervalo se tiene que

$$f(m_i) \leq f(c_i) \leq f(M_i),$$

luego gracias al teorema del encaje (o del sándwich) se puede concluir.

Teorema 2.6. *Si una función f es continua en un intervalo I o si tiene solo discontinuidades de salto en I, entonces f es una función Riemann-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Teorema 2.7. *Si f es una función continua en un intervalo I que contiene al intervalo $[a, b]$, entonces la función f es Riemann integrable.*

En la práctica utilizar la definición vía sumas de Riemann es poco práctico en aplicaciones. Es por esto que en la próxima sección veremos una de las herramientas mas poderosas del cálculo.

2.7. El teorema fundamental del cálculo

Teorema 2.8. *Sea f una función continua en un intervalo I que contiene al intervalo $[a, b]$, y sea F una antiderivada de f en I. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Idea de la demostración. Dada una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ de la forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + \\ &\quad \ldots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Por otra parte, del teorema del valor medio, tenemos que para cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe un número $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = F(c_i)\Delta x_i,$$

pero como F es una antiderivada de f tenemos que $F'(c_i) = f(c_i)$ por lo tanto tenemos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

y de la definición de la integral definida mediante sumas de Riemann, tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

lo que concluye la demostración. ∎

El gran mérito de este teorema es que conecta dos conceptos que en principio no tienen motivo para estar relacionados: antiderivadas y área bajo curvas.

Ejercicio 2.10.

1. $\displaystyle\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{-2}^2 (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int_0^2 |2x-1| \, \mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_1^4 e^x \, \mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, \mathrm{d}x.$

Ejercicio 2.11.

1. Calcular el área encerrada por $y = 2x^2 - 3x + 2$ y el eje x en el intervalo $[0, 2]$.
2. Calcular el área encerrada por $y = \tan x$ y el eje x en el intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

El teorema fundamental del cálculo se puede escribir de la siguiente forma.

Corolario 2.1 (Teorema del cambio neto)**.**

$$\int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Una de las virtudes de esta escritura es que permite entender algunas aplicaciones[2]. Por ejemplo, si la tasa instantánea de crecimiento de una población está dada por $\frac{dP}{dt}$ entonces el teorema del cambio neto aplicado a la función $P(t)$ dice

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dP}{dt} \, \mathrm{d}t = P(t_1) - P(t_0)$$

que si miramos el lado derecho vemos que es exactamente ΔP, la variación neta de la población en el periodo de t_0 a t_1.

Otro ejemplo puede ser cuando $C(x)$ representa el costo de producir x unidades de cierto producto. En este caso $C'(x)$ es el costo marginal asociado y el teorema del cambio neto nos dice

$$\int_{x_0}^{x_1} C'(x) \, \mathrm{d}x = C(x_1) - C(x_0)$$

que no es otra cosa que el costo adicional en que se incurre al cambiar la producción de x_0 unidades a x_1 unidades.

Sustituciones

Cuando tenemos una integral definida, podemos realizar una sustitución antes de realizar la integración. Por ejemplo, si queremos calcular

$$\int_1^2 (x+1)^4 \, \mathrm{d}x$$

podemos realizar la sustitución $u = x + 1$, sin embargo los límites de integración también deben ser modificados, pues en la integral original, la variables x recorre el intervalo $[1, 2]$ pero cuando escribimos la integral en la variable u debemos identificar donde vive dicha variable. En este caso particular, basta notar que $u = x + 1$ lo que significa que la variable u vive 1 unidad a la derecha de la variable x, es decir, en el intervalo $[2, 3]$. Además como $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, la integral definida queda

$$\int_2^3 u^4 \, \mathrm{d}u$$

[2]Recordar que si $f(x)$ es una función, entonces $f'(x)$ representa la tasa o razón de cambio instantánea de la función con respecto de la variable x.

y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que $\int_2^3 u^4 \, \mathrm{d}x = \frac{u^5}{5}\Big|_{u=2}^{u=3} = \frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5}$. Esto se puede sistematizar a casos mas generales mediante el siguiente

Teorema 2.9. *Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $u'(x)\,\mathrm{d}x$ es continua y si f es continua en el rango de u entonces*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

***Ejercicio 2.12*.**

1. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{3x+4}.$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2-6x)^{15}}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_0^5 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{10} x(1+3x^2)^5\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Proposición 2.2.

- *Si f es par, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
- *Si f es impar, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

***Ejemplo 2.24*.**

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^6+1)^5\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 (x^6+1)^5.$
3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x = 2\int_0^{\pi} \cos x.$
4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x = 0.$
5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x = 0.$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x = 0.$

Integración por partes

El teorema de integración por partes aplicado a integrales definidas queda como

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u,$$

donde la notación $uv\Big|_a^b$ significa

$$uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

***Ejercicio 2.13*.** Calcule las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^{2t}}\,\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x.$

Teorema 2.10. *Sea f una función continua en el intervalo I, y sea $a \in I$. Si definimos la función $F : I \to \mathbb{R}$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

entonces

$$F'(x) = f(x)$$

y $F(a) = 0$

Corolario 2.2. *Sea f una función continua en el intervalo I y considere funciones diferenciables $a, b : \mathbb{R} \to I$ tales que $a(x) \leq b(x)$ para todo x. Si definimos la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

entonces F es diferenciable y

$$F'(x) = f(a(x))a'(x) - f(b(x))b'(x)$$

Demostración. Si consideramos $c \in I$ y la función $G(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, entonces podemos escribir $F(x) = G(a(x)) - G(b(x))$, y por lo tanto la regla de la cadena nos dice que

$$F'(x) = G'(a(x))a'(x) - G'(b(x))b'(x)$$

de donde el resultado se obtiene al notar que $G'(x) = f(x)$. ■

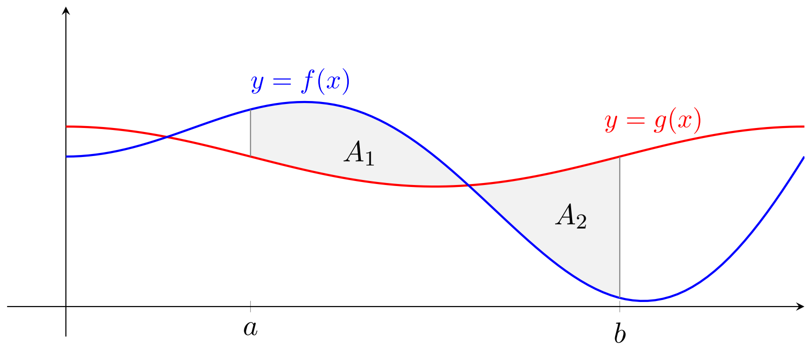
Ejercicio 2.14. Encuentre la derivada de la función

1. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$
2. $g(x) = \int_0^x e^{-t} \ln t\,\mathrm{d}t.$
3. Si $s > 0$, $\gamma(x) = \int_0^x t^{s-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t.$
4. $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$
5. $\int_0^{2x} t^2\,\mathrm{d}t.$
6. $\int_0^{e^x} t^2\,\mathrm{d}t.$
7. $\int_1^{x^4} \sec t\,\mathrm{d}t.$
8. $\int_{\cos x}^{e^x} e^{-t} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t.$

Teorema 2.11 (Teorema del valor medio integral)**.** *Si f es continua en un intervalo I que contiene al intervalo $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

2.8. Área entre curvas



Unificando un poco lo que vimos en las secciones anteriores tenemos la siguiente relación entre integral definida y área:

Definición 2.11. *Sea f una función continua en un intervalo I que contiene a $[a, b]$. El área encerrada por el gráfico de la función y el eje x en el intervalo $[a, b]$ está dada por*

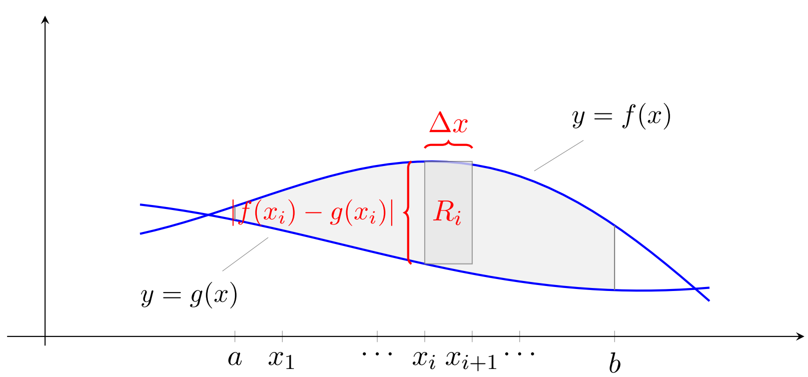
$$A(f) = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

esta fórmula se puede reescribir de la siguiente manera

$$A(f) = \int_a^b |f(x) - 0| \, \mathrm{d}x,$$

donde el "0" representa el a la función $g(x) = 0$ que tiene como gráfico al eje x. Recordando que obtuvimos esta fórmula mediante un proceso de aproximación usando rectángulos podemos verificar que el 0 tiene sentido pues lo que usamos como altura de nuestros rectángulos era el valor $f(x_i)$ que corresponde precisamente al largo de ese lado. Sin embargo, si usamos la misma idea para calcular el área encerrada por dos curvas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, notamos que la altura del rectángulo i-ésimo está dada por $|f(x_i) - g(x_i)|$, donde se cumple que

$$|f(x_i) - g(x_i)| = \begin{cases} f(x_i) - g(x_i) & \text{si } f(x_i) \geq g(x_i) \\ g(x_i) - f(x_i) & \text{si } f(x_i) \leq g(x_i). \end{cases}$$

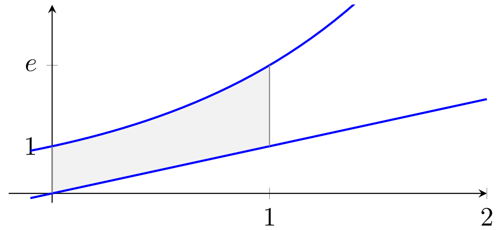


En vista de esta observación tenemos el siguiente

Teorema 2.12. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I que contiene a $[a, b]$. El área encerrada entre los gráficos de las dos funciones en el intervalo $[a, b]$ está dada por*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.25. Área entre $y = e^x$ e $y = x$ en el intervalo $[0, 1]$.

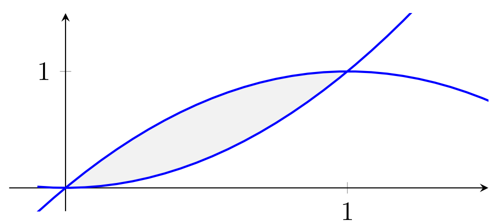


En este caso el área es

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,\mathrm{d}x = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - \frac{3}{2}.$$

Hay situaciones donde no se especifica el intervalo $[a, b]$ pero que se pueden determinar mirando el gráfico de las funciones.

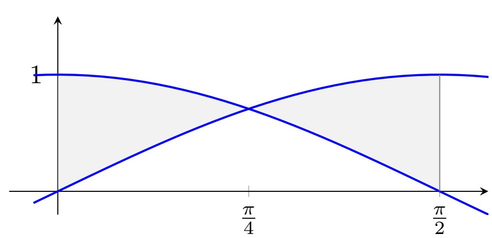
Ejemplo 2.26. Área entre $y = x^2$ e $y = 2x - x^2 = x(2 - x)$.



En este caso primero debemos determina la intersección de las curvas: $x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 = x$ de donde se deduce que $x = 0$ o $x = 1$. Así el área se puede calcular como

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 2.27. Área entre $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.



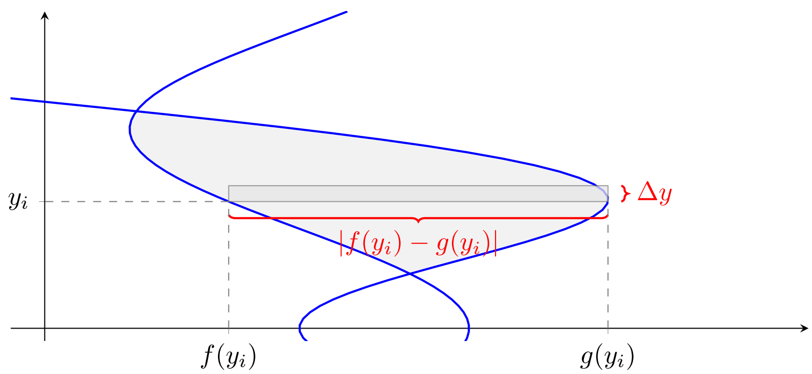
Nuevamente hay que calcular las intersecciones, en este caso $\cos(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ pero solo $\frac{\pi}{4}$ está en el intervalo, así

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \operatorname{sen} x|\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\ \mathrm{d}x \\
&= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

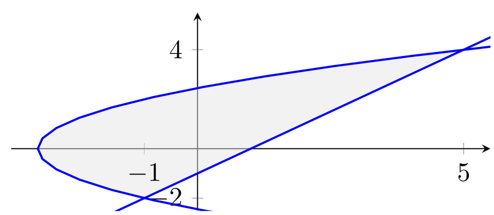
$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\operatorname{sen}0+\cos 0)\right]+\left[\left(-\cos\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right]+\left[-1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right]\\
&= \frac{4}{\sqrt{2}}-2\\
&= 2(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}
$$

Hay situaciones donde se tienen funciones $x = f(y)$ y donde es conveniente utilizar rectángulos horizontales en vez de verticales, esto permite calcular áreas como

$$\int_c^d |f(y)-g(y)|\ \mathrm{d}y.$$



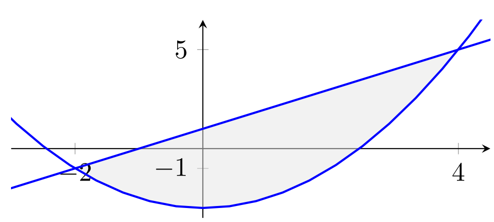
Ejemplo 2.28. Área entre $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$.



Usando lo anterior, tenemos que el área encerrada es

$$\int_{-2}^{4}\left|(y+1)-\left(\frac{y^2-6}{3}\right)\right|\ \mathrm{d}y=\int_{-2}^{4}\left(y-\frac{y^2}{3}+3\right)\ \mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{9}+3y\right)\Big|_{-2}^{4}.$$

Otra manera de pensar esto es que el área es la misma que entre las funciones $y = x + 1$ e $y = \frac{x^2-6}{3}$

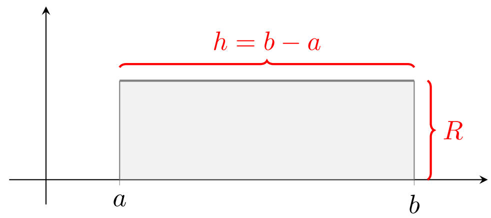


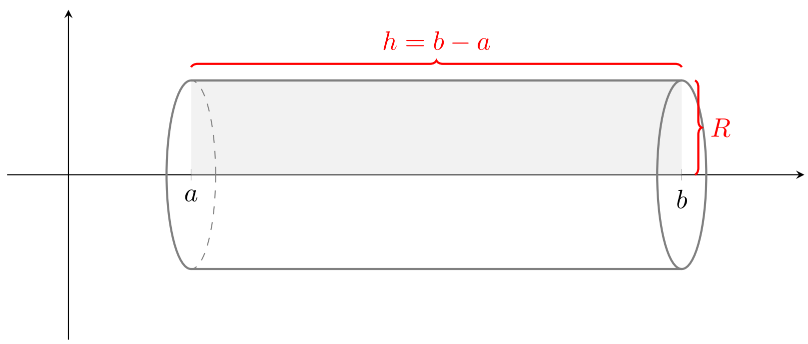
2.9. Volúmenes

Vimos que la integral definida se puede utilizar para el cálculo de áreas en el plano. Usando el mismo razonamiento, podemos utilizar integrales definidas para calcular volúmenes tridimensionales, esto es, mediante la división de la región de interés en “pequeños” volúmenes que sean mas simples de calcular.

2.9.1. Sólidos de revolución

Estos son cuerpos tridimensionales que resultan de hacer girar una región plana en torno a un eje de rotación. El ejemplo mas simple de esto es el cilindro circular, que se obtiene de girar un rectángulo en torno a uno de sus lados.





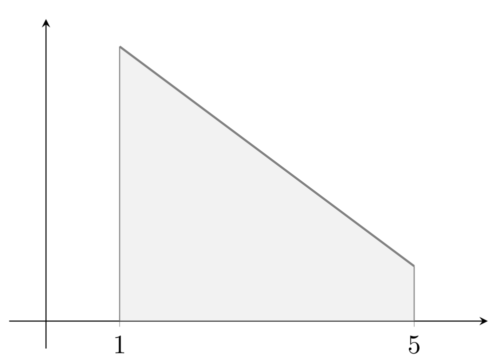
El volumen del cilindro se puede calcular mediante la fórmula $V_{cil} = \pi R^2 h$, donde R denota el radio de la base circular y h es la altura del cilindro. Una manera de entender esta fórmula es observando que el área del círculo de la base del cilindro es $A = \pi R^2$ y dicho circulo se va "moviendo" a lo largo del cilindro por h unidades, esto es, el volumen se obtiene al multiplicar el área de la base por la "altura[3]" del cilindro.

Usando que conocemos el volumen de un cilindro circular recto (o *disco*), y la idea desarrollada en la definición de la integral definida podremos calcular el volumen de *sólidos de revolución*.

Definición 2.12. *Un sólido de revolución, es un objeto tridimensional que se obtiene de rotar una región plana en el cuadrante positivo del plano cartesiano en torno al eje x o al eje y (o en general respecto a cualquier eje en el plano que no atraviese el sólido).*

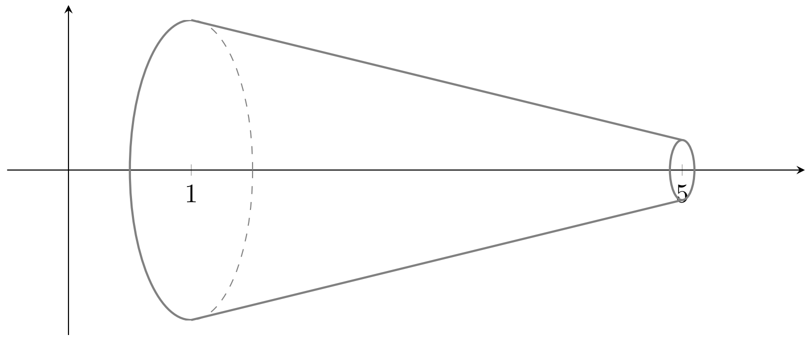
Usualmente utilizaremos regiones planas que están delimitadas por gráficos de funciones en un determinado intervalo. Partamos con un ejemplo.

Ejemplo 2.29. Consideremos la función $f(x) = 6 - x$ y la región delimitada por esta función y el eje x en el intervalo $[1, 5]$

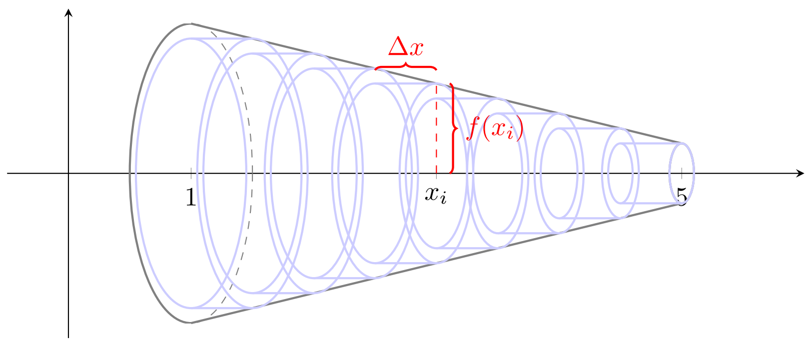


[3]En este caso el cilindro se dibuja acostado por razones técnicas. Ya veremos que pasa con el cilindro vertical.

Si rotamos esta porción del plano en torno al eje x obtenemos un cono circular truncado



Entonces la pregunta que surge es como calcular el volumen del cuerpo construido a partir de una revolución. Una estrategia para hacer esto es aproximar el volumen como una suma de volúmenes mas pequeños conformados por discos como muestra



Por ejemplo, podemos dividir el intervalo $[1,5]$ en n sub-intervalos iguales de largo $\Delta x = \frac{5-1}{n}$ y en cada sub-intervalo aproximar el volumen del sólido por el volumen de un cilindro de base circular con radio $R_i = f(x_i)$ donde x_i es algún valor en el sub-intervalo, por ejemplo, el extremo derecho del intervalo: $x_i = a + i\Delta x$ y la "altura" del cilindro es Δx. Con esto podemos decir que el volumen del sólido de revolución es aproximadamente la suma de todos los volúmenes de los cilindros circulares, es decir

$$\text{Volumen aproximado} = \sum_{i=1}^{n} \pi R_i^2 \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi (f(x_i))^2 \Delta x,$$

pero esta última suma corresponde a una suma de Riemann usando extremos derechos para la función $\pi f(x)^2$, por lo que si nos vamos al límite cuando $n \to \infty$, por una parte obtendríamos el volumen del sólido y por la otra obtendríamos una integral definida, esto es

$$\text{Volumen} = \int_1^5 \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x, \tag{2.7}$$

en nuestro caso la función es $f(x) = 6 - x$ por lo que obtenemos que el volumen de nuestro sólido de revolución es

$$\int_1^5 \pi(6-x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{(x-6)^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=5} = \pi \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5^3}{3}\right)$$

Observación 2.4. Notar que si hacemos la integración en el intervalo $[1,6]$

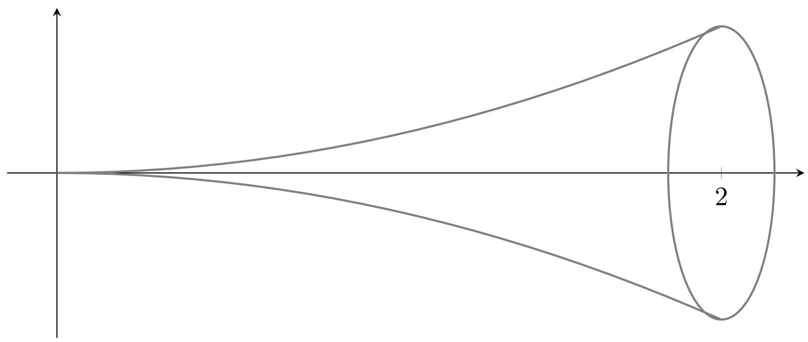
$$\int_1^6 \pi(6-x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{(x-6)^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=6} = \pi \left(0 + \frac{5^3}{3}\right) = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 5}{3},$$

que coincide con la fórmula $V_{\text{cono}} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Teorema 2.13. *Para el sólido de revolución generado a partir de la rotación de la región plana delimitada por la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a,b]$ se cumple que el volumen del sólido resultante es*

$$\pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

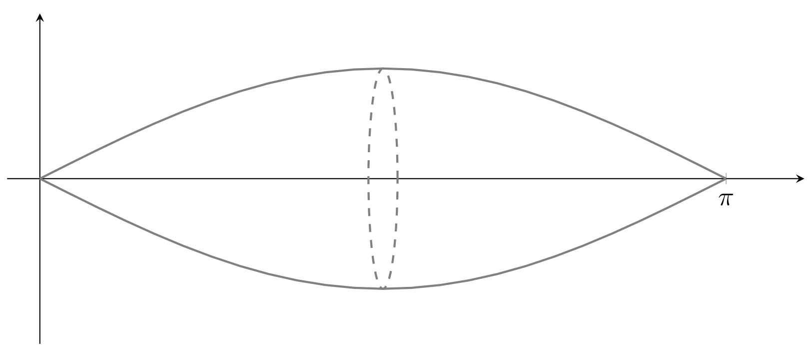
Ejemplo 2.30. Rotar la región encerrada entre $f(x) = x^2$ y el eje x para $x \in [0,2]$ en torno al eje x y calcular el volumen del sólido resultante.



El volumen de este sólido es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

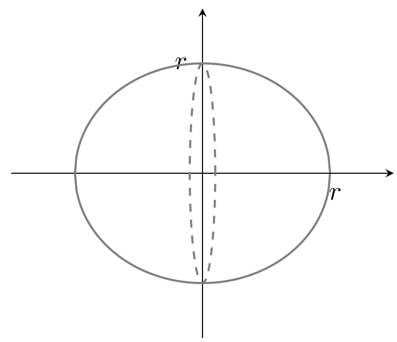
Ejemplo 2.31. Rotar la región encerrada entre $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y el eje x para $x \in [0,\pi]$ en torno al eje x y calcular el volumen del sólido resultante.



El volumen de este sólido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_0^\pi \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\pi)\right) - \pi\left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot 0)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.32. Rotar la región encerrada entre $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x para $x \in [-r,r]$ en torno al eje x y calcular el volumen del sólido resultante.



El volumen de este sólido es

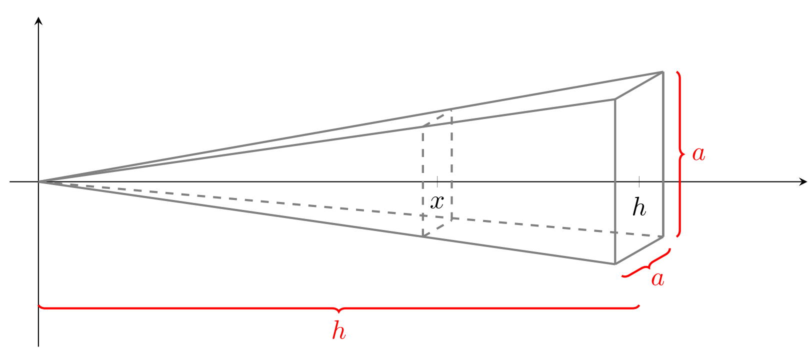
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{r} \\
&= \pi \left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \\
&= \frac{4\pi r^3}{3}.
\end{aligned}
$$

La idea de dividir el sólido en pequeños cilindros no aplica si el sólido no tiene la simetría de revolución. La idea consiste nuevamente en dividir la región, pero ahora no en discos circulares, si no mediante secciones transversales al sólido y formando discos que tienen una base cuya área podamos calcular.

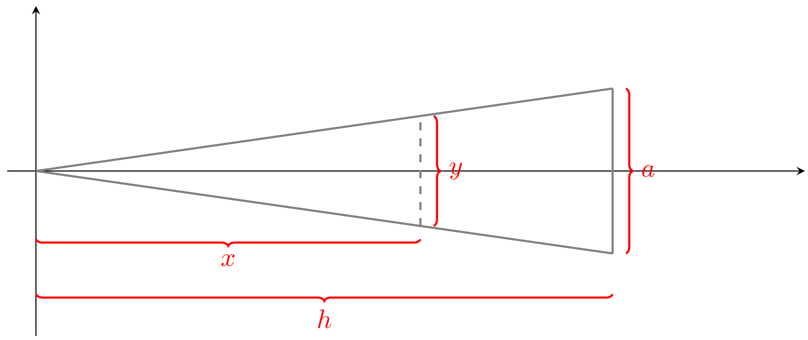
Definición 2.13. *El volumen de un sólido que tiene secciones transversales de área $A(x)$ al nivel x acotado en la región $a \leq x \leq b$ se puede calcular como*

$$\int_a^b A(x) \,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 2.33. Use una integral definida para calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada que tiene una altura h.



En este caso el área de la sección transversal al nivel x se puede obtener mediante la relación de triángulos semejantes:



Es decir $\dfrac{x}{y} = \dfrac{h}{a}$, de donde obtenemos que $y = \dfrac{ax}{h}$ y

$$A(x) = y^2 = \frac{a^2x^2}{h^2},$$

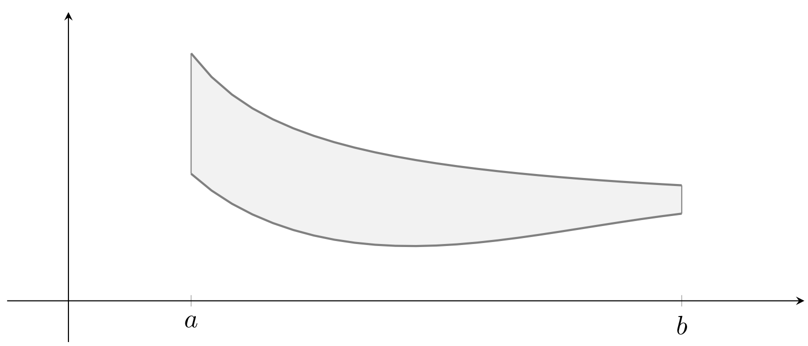
por lo tanto el volumen de esta pirámide se puede calcular como

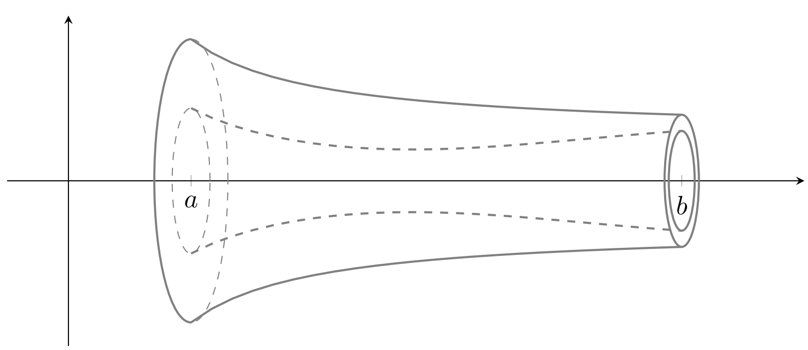
$$V_{\text{pirámide}} = \int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{a^2h}{3}$$

Ejercicio 2.15. Usar una integral definida para encontrar el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero de lado a y cuya altura es h.

Regiones acotadas por arriba y por abajo

La misma idea aplica para calcular el volumen de regiones que son el resultado de encerrar una región entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como se ve en las figuras siguientes

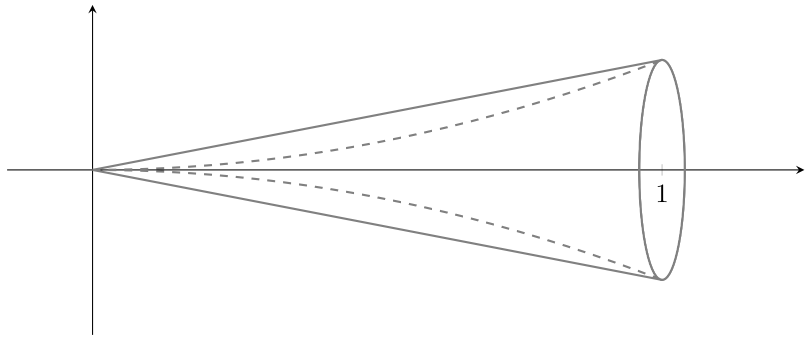




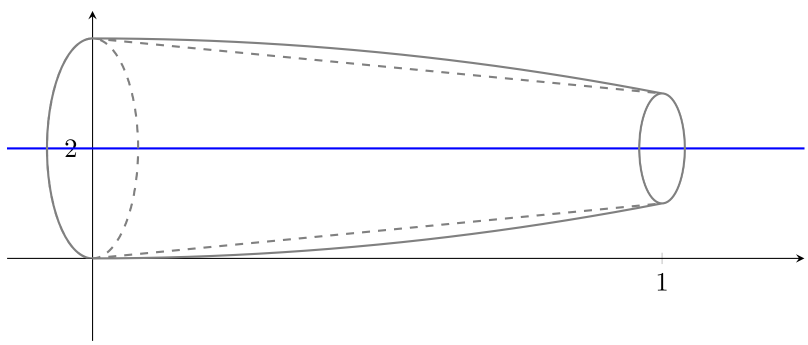
Teorema 2.14. *Para el sólido de revolución generado a partir de la rotación de la región plana delimitada por los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje x, donde $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, se cumple que el volumen del sólido resultante es*

$$\pi \int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.34. La región encerrada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$ se gira en torno al eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.



Ejemplo 2.35. También se puede hacer una rotación en torno a otro eje paralelo al eje x. Por ejemplo, se puede calcular el volumen del solido resultante al rotar el área encerrada entre $y = x$ e $y = x^2$ en torno al eje $y = 2$.



En este caso el área de la sección transversal se puede calcular como

$$A(x) = \pi \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right],$$

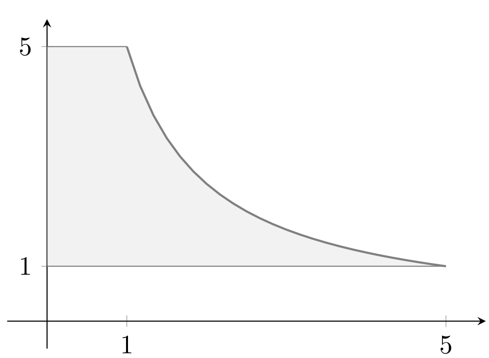
por lo tanto el volumen del sólido se puede calcular como

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right] \mathrm{d}x$$

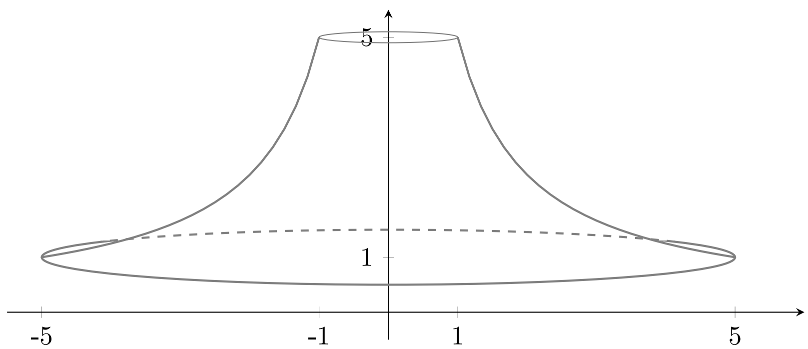
2.9.2. Rotación en torno al eje y

También se pueden generar sólidos de revolución haciendo girar la figura plana en torno al eje y en cuyo caso la idea de los discos para dividir el sólido sigue funcionando, solo que debemos tener cuidado de como calcular dichos volúmenes.

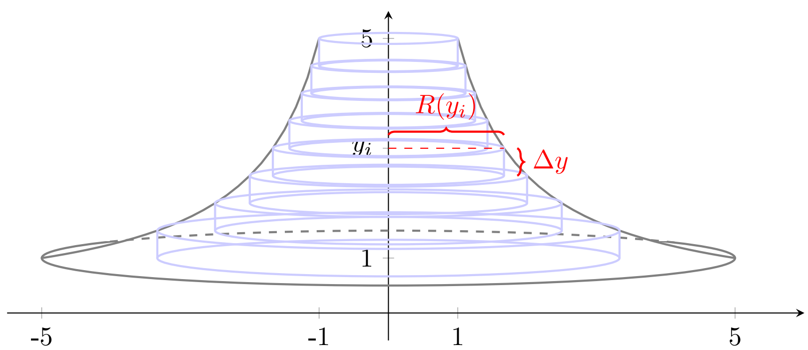
Ejemplo 2.36. Considere la función $f(x) = \frac{5}{x}$ y la región delimitada por la función $f(x)$ y el eje y cuando los valores de y están entre 1 y 5 como en



Al rotar esta región en torno al eje y nuevamente se obtiene el sólido de revolución



Que se puede aproximar mediante una suma de volúmenes de discos se ve en



para obtener que

$$\text{Volumen aproximado} = \sum_{i=1}^{n} \pi R(y_i)^2 \Delta y,$$

donde en este caso $R(y)$ es la función inversa de $f(x) = \frac{5}{x}$ es decir $R(y) = \frac{5}{y}$.

Si generalizamos el ejemplo anterior y pasamos al límite obtenemos el siguiente

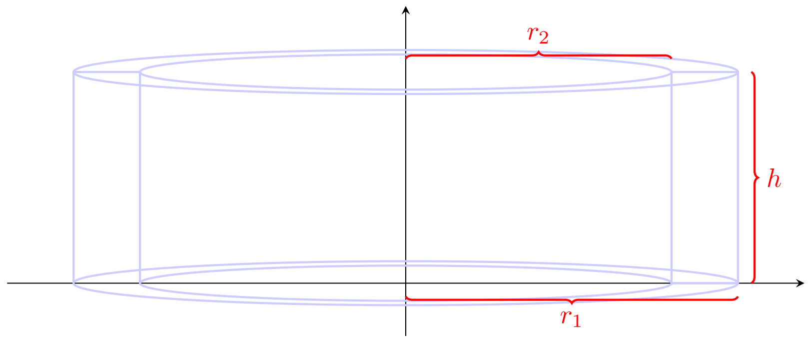
Teorema 2.15. *Para el sólido de revolución generado a partir de la rotación de la región plana delimitada por la función $f(x)$ y el eje y para valores de $y \in [c, d]$ se cumple que el volumen del sólido resultante tiene un volumen dado por*

$$\pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 \,\mathrm{d}y,$$

donde $f^{-1}(y)$ es la función inversa de $f(x)$.

Cascarones

Otra manera de hacer la rotación en torno al eje y de una región plana acotada por una función $f(x)$ es mediante el método de los cascarones cilíndricos (o arandelas). El método consiste en considerar cascarones de cilindros para aproximar el volumen.



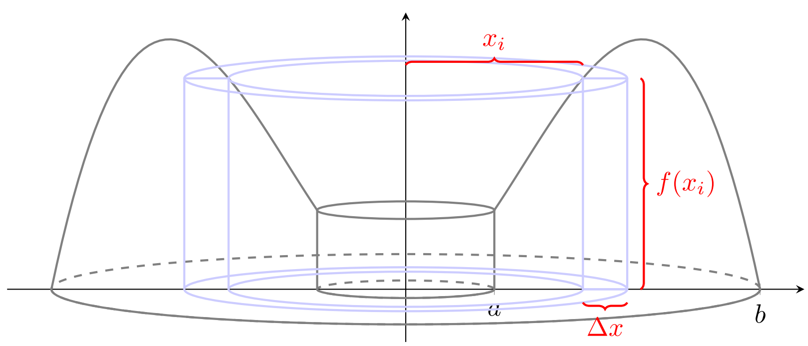
Si observamos que el volumen de un cascaron se puede calcular como

$$\begin{aligned}
V_{\text{cascarón}} &= V_{\text{cilindro exterior}} - V_{\text{cilindro exterior}} \\
&= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \\
&= \pi(r_1^2 - r_2^2)h \\
&= 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} h(r_1 - r_2) \\
&= 2\pi \bar{r} h \Delta r,
\end{aligned}$$

donde $\bar{r} = \frac{r_1+r_2}{2}$ y $\Delta r = r_1 - r_2$. La fórmula que dice esencialmente que el volumen del cascarón está dada por

$$V_{\text{cascarón}} = [\text{circunferencia}] \cdot [\text{altura}] \cdot [\text{espesor}]$$

entonces para el volumen de la figura



tenemos que

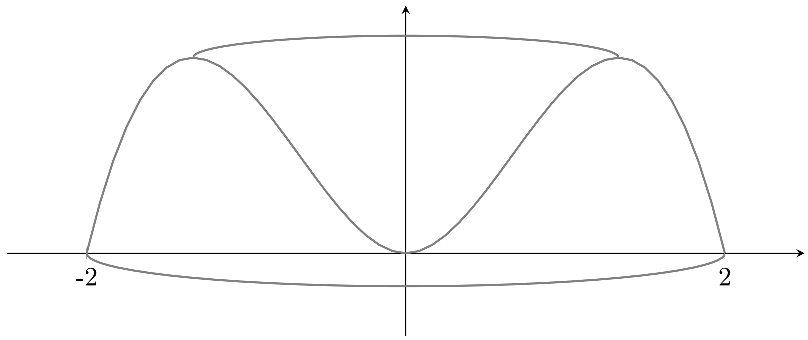
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i) \Delta x,$$

pero esta aproximación no es mas que una suma de Riemann para la función $2\pi x f(x)$, es decir tenemos que

Teorema 2.16. *El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b desde a hasta b es*

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

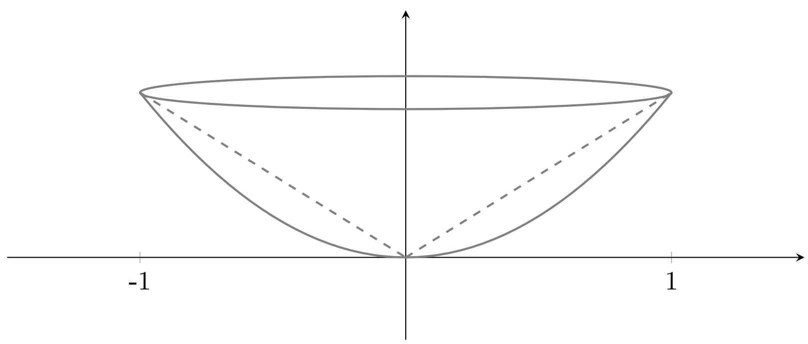
Ejemplo 2.37. Determine el volumen del sólido que se obtiene al rotar en torno al eje y la región acotada por la función $f(x) = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.



En este caso tenemos que

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{5}.$$

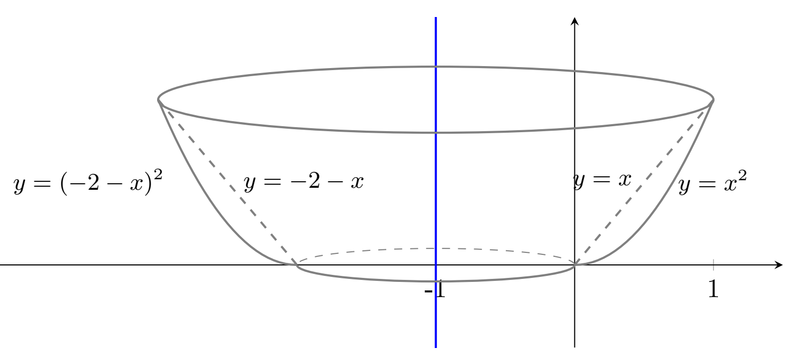
Ejemplo 2.38. Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje y la región encerrada entre $y = x$ e $y = x^2$.



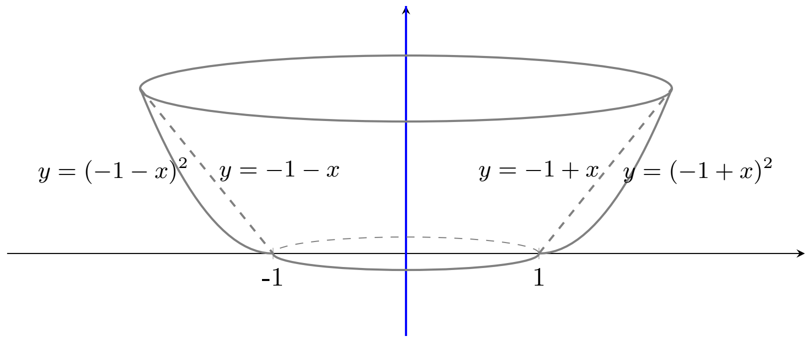
En este caso, la altura de cada cascarón cilíndrico es de la forma $h = f(x_i) - g(x_i)$ donde $f(x) \geq g(x)$, de donde obtenemos que

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Ejemplo 2.39. También se puede hacer una rotación en torno a otro eje vertical que no sea el eje y, por ejemplo se puede girar la región anterior en torno al eje $x = -1$.



En este caso es lo mismo que rotar el área encerrada entre las funciones $f(x + (-1))$ y $g(x + (-1))$,



por lo tanto el volumen es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_1^2 x\left[(-1+x)-((-1+x)^2)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_1^2\left[-2x+3x^2-x^3\right]\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left[-x^2+x^3-\frac{x^4}{4}\right]\Big|_1^2 \\ &= 2\pi\left[\left(-2^2+2^3-\frac{2^4}{4}\right)-\left(-1^2+1^3-\frac{1^4}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.16. Hacer el cálculo usando rodajas e integrando en el eje y.

2.10. Promedio de una función y el teorema del valor medio integral

Cuando tenemos una serie de datos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ el promedio de dichos datos se puede calcular como

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Esta idea se puede generalizar para el caso en que los datos y_k sean los valores de cierta función, es decir $y_k = f(x_k)$, en cuyo caso el promedio sería

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

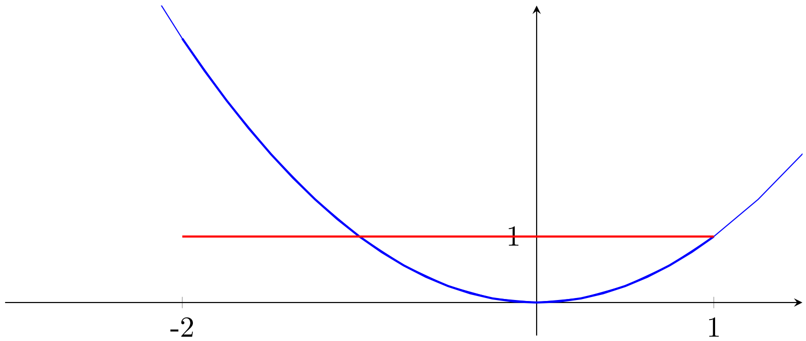
Este caso puede ocurrir, por ejemplo, cuando $f(x)$ es una función que modela algún fenómeno de la naturaleza. Un caso simple de presentar es cuando $f(x)$ representa la presión atmosférica medida a una elevación de x metros sobre el nivel del mar. Si con un barómetro medimos la presión a distintas altitudes, entonces el promedio de esos valores es una aproximación a la presión atmosférica *promedio* de la región en donde se hicieron las mediciones. Si hacemos cada vez mas mediciones a altitudes cada vez mas cercanas entre si, entonces mejoramos la aproximación y esperamos que cuando el número de mediciones tienda a infinito, entonces tengamos efectivamente *la presión atmosférica promedio* de la región.

En general, si $f(x)$ es una función en un intervalo $[a,b]$ entonces podemos definir el promedio de dicha función como

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

***Ejemplo 2.40*.** El valor promedio de la función $y = x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$ se puede calcular como

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 1$$



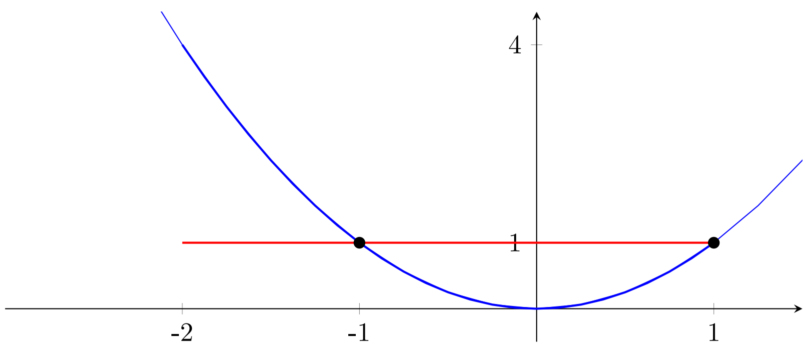
Una de las propiedades del promedio es que, si la función tiene solo valores no-negativos, entonces el promedio $\bar{f}$ multiplicado por el largo del intervalo $b - a$ corresponderá exactamente al área encerrada entre el gráfico de la función y el eje x, esto es evidente al escribir la fórmula

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 2.17. *Si la función f es continua en $[a, b]$ entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Este teorema se aprecia en el ejemplo anterior para $c = 1$ y $c = -1$ pues



$f(1) = f(-1) = 1 = \bar{f}$.

***Ejemplo 2.41*.** La velocidad promedio entre dos tiempos $t_1 < t_2$ de un vehículo que tiene una ubicación $s(t)$ al tiempo t se puede calcular como

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Si consideramos la función velocidad $v(t)$ entonces se sabe que $v(t) = s'(t)$ y si calculamos el valor promedio de la función velocidad en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$es

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,\mathrm{d}t == \frac{1}{t_2 - t_1}s(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

2.11. Integrales impropias

Cuando definimos la integral definida siempre trabajamos en intervalos finitos de la forma $[a, b]$ y además el teorema fundamental del cálculo requería que la función fuese continua (o solo con discontinuidades de salto) en dicho intervalo. Sin embargo hay situaciones donde algunas esas condiciones no ocurre.

Definición 2.14. *Una integral definida* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *se dice* impropia *si*

- *El intervalo de integración es infinito, esto es $a = -\infty$ o $b = +\infty$, o ambos simultáneamente.*
- *Si la función $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$.*

Si la integral definida es impropia y el resultado de la integración es un número finito, diremos que la integral es convergente*, en caso contrario diremos que la integral es* divergente.

Ejercicio 2.17. 1. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

2. $\int_0^{\infty} e^{-x}$
3. $\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

Para poder calcular estas integrales, primero debemos entender que es lo que significan. Para ello estudiamos tres posibles casos que determinan si una integral es impropia: intervalo infinito o bien una función que se vuelve infinita.

2.11.1. Intervalos infinitos

Intervalos de la forma $[a, \infty)$

Una integral de la forma $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ se entenderá como un límite de integrales cada vez realizadas sobre intervalos de la forma $[a, b]$ donde b es cada vez mas grande, esto es

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.18. 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ recordando que $\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$.
5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente si $p > 1$ y $a > 0$, y es divergente si $p \leq 1$.

Intervalos de la forma $(-\infty, b]$

Una integral de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ se entenderá como un límite de integrales cada vez realizadas sobre intervalos de la forma $[a,b]$ donde a es cada vez mas negativo, esto es

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.19.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\cos x\,\mathrm{d}x$ recordando que $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Intervalo de la forma $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Una integral de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ se entenderá como un doble límite, esto es, utilizando los casos anteriores

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde c es un número real arbitrario.

Ejercicio 2.20.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ donde
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x|\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$
4. $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

2.11.2. Función infinita en un intervalo finito

Integrales de la forma $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **donde** $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Si la función es continua en (a,b) pero $f(x)$ se vuelve infinita al acercarse a $x=a$ entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio 2.21.

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^e \ln x\,\mathrm{d}x.$

Integrales de la forma $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donde $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Si la función es continua en (a,b) pero $f(x)$ se vuelve infinita al acercarse a $x=b$ entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio 2.22. 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln|x|\,\mathrm{d}x$.

Integrales de la forma $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donde $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ para $c\in(a,b)$

Si la función es continua en (a,b) pero $f(x)$ se vuelve infinita al acercarse a $x=c$ entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

usando los casos anteriores.

Ejercicio 2.23. 1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Integrales de la forma $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donde $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Si la función es continua en (a,b) pero $f(x)$ se vuelve infinita al acercarse tanto a $x=a$ como a $x=b$ entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^{b-h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 2.42. Para calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ notamos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{-(x^2-x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac14-(x^2-x+\frac14)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2}{\sqrt{1-4u^2}}\,\mathrm{d}u && u = x-\frac12,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, u\in[-\frac12,\frac12] \\
&= \int \frac{1}{\cos v}\cos v\,\mathrm{d}v && u = \frac12\operatorname{sen} v,\ \mathrm{d}u = \frac12\cos v\,\mathrm{d}v, v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\
&= v + C \\
&= \operatorname{arc\,sen}(2u) + C
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{arc\,sen}(2x-1)+C$$

por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen}(1) - \operatorname{arc\,sen}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ejemplo 2.43. 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^\infty = 2.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_0^\infty = +\infty.$

Hay veces en que queremos saber si una integral impropia es convergente o divergente antes de encontrar una antiderivada, o incluso en casos en que no se pueda encontrar dicha antiderivada. Por ejemplo nos interesa saber si

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

es convergente o divergente. Para ello tenemos el siguiente

Teorema 2.18 (Criterio de comparación)**.** *Sea I un intervalo infinito y sean f y g dos funciones continuas en I tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in I$, entonces*

1. *Si $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ entonces $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.*
2. *Si $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ entonces $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.*

Demostración. Eso es una simple consecuencia de que $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ por la monotonía de la integral. ■

Ejemplo 2.44. Estudiamos la convergencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Para ello notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\infty}^{0} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x && u=-x,\ \ \mathrm{d}u=-\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

luego tenemos que estudiar dos integrales, la primera es *propia* pero podemos decir que $e^{-x^2} \le 1$ si $x \in [0,1]$ por lo tanto

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,$$

y por otra parte $e^{-x^2} \le e^{-x}$ si $x \ge 1$ luego

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e},$$

de donde concluimos que la integral original es convergente, y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

De hecho usando herramientas de cálculo en varias variables se puede obtener que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 2.45. La integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente pues

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

Ejemplo 2.46. La integral $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ es divergente pues

$$\frac{1}{x - e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Ejemplo 2.47. La integral $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x + e^{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente pues

$$\frac{1}{x + e^{x}} > \frac{1}{e^{x}} = e^{-x}$$

y

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}.$$

Capítulo 3

Series y series de potencias

3.1. Sucesiones

Una sucesión es una lista ordenada de números, un ejemplo de aquello es la lista de números naturales

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

o la lista de números pares de menor a mayor

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots.$$

En general, una sucesión será una lista $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ donde a_1 será el primer término, a_2 el segundo y así sucesivamente. El n-ésimo término de la lista se denotará a_n y su sucesor será a_{n+1}, el cuál siempre estará en la lista.

Denotaremos una sucesión de distintas formas, por ejemplo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$, etc.

Las sucesiones pueden ser dadas en distintas formas, como mostramos al principio, se puede entregar la lista ordenada de números, como por ejemplo

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\},$$

a veces se entrega una fórmula para el término n-ésimo

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{donde } a_n = (-1)^{n+1},$$

o a veces se dan fórmulas de recurrencia para ir calculando los diferentes términos de la sucesión

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{donde } a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n.$$

Es importante señalar que en diversos casos no hay una fórmula que ilustre el comportamiento de la sucesión, por ejemplo, podemos considerar la sucesión de los dígitos en la expansión decimal de π, es decir,

$$\{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 9, \ldots\}$$

pero sin la ayuda de un computador no podemos conocer el elemento 10.000 de esta sucesión.

Una pregunta natural que se puede hacer cuando se trabaja con sucesiones es ¿qué ocurre con el término n-ésimo a medida que n se hace cada vez mas grande? Para responder esta pregunta utilizamos el concepto de *límite*.

Definición 3.1. *Una sucesión* (a_n) *tiene un límite* L *y lo expresamos como*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ó} \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

si podemos hacer que los términos a_n *se aproximen a* L *tanto como se quiera tomando* n *lo suficientemente grande. Si límite de* a_n *existe, se dice que la sucesión converge (o que es convergente). De lo contrario, se dice que la sucesión diverge (o es divergente).*

Por ejemplo, si consideramos la sucesión cuyo término n-ésimo está dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$ notamos que a medida que n se hace cada vez mas grande, entonces el valor de a_n se va acercando cada vez mas a 0. Esta idea intuitiva es lo que nos lleva a decir que el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es 0.

Para hacer mas rigurosa esta definición necesitamos lo siguiente

Definición 3.2. *Una sucesión* (a_n) *tiene un límite* L *y lo expresamos como*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ó} \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

si se cumple lo siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces*

$$|a_n - L| \leq \varepsilon.$$

La intuición detrás de esta definición es que si tomamos una lupa con cualquier coeficiente de "magnificación" (esto sería el rol del $\varepsilon > 0$) y miramos L con esta lupa, entonces veremos a todos los elementos de la sucesión que tienen n suficientemente grande muy cerca de L.

***Ejemplo 3.1*.** Suponga que $f(x)$ es una función sobre la cual sabemos de antemano que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces la sucesión dada por $a_n = f(n)$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

***Ejemplo 3.2*.** La sucesión dada por $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ es convergente para todo $p > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,$$

esto pues $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ converge a 0 cuando $x \to \infty$.

Definición 3.3. *Diremos que la sucesión* a_n *diverge a* ∞ *si para cualquier* $M > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$a_n \geq M \qquad \textit{para todo } n \geq n_0.$$

En otras palabras, esto dice que los términos de la sucesión se hacen cada vez mas y mas grandes a medida que n va creciendo. Para nosotros, ese será el concepto de diverger a infinito.

***Ejemplo 3.3*.** La sucesión $a_n = n$ es una sucesión que diverge a ∞. Notar que se puede escribir

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{n}}$$

Proposición 3.1. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones convergentes, y sea* k *una constante. Entonces*

- $\lim_{n\to\infty} k = k$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ $\quad$ *si* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p$ $\quad$ *si* $p > 0$ *y* $a_n > 0$

Teorema 3.1 (Sandwich)**.** *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones tales que* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ *y* $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. *Suponga que* (c_n) *es otra sucesión tal que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* n *suficientemente grande. Entonces* (c_n) *es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Ejemplo 3.4. Notar que $a_n = e^{-n}\cos(n)$ satisface que $-e^{-n} \leq a_n \leq e^{-n}$ y como $e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Corolario 3.1. *Sea* (a_n) *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ejemplo 3.5. Calculemos algunos límites de sucesiones.

1. $a_n = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
2. $a_n = \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
3. $a_n = \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Recordar L'Hospital.
4. $a_n = ne^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. L'Hospital.
5. $a_n = (-1)^n$ es divergente.
6. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
7. $a_n = r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } r < -1 \end{cases}$

Teorema 3.2. *Sea* f *una función continua y sea* (a_n) *una sucesión tal que* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$*, entonces* $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(L)$.

Ejemplo 3.6. $a_n = \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ejemplo 3.7. $0 \leq a_n = \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Definición 3.4. *Una sucesión* (a_n) *es*

- *Creciente si* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* n.

- *Decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.*

Una sucesión se dice monótona si es creciente o decreciente.

Ejemplo 3.8. La sucesión $\dfrac{1}{n}$ es decreciente, mientras que la sucesión $1 - e^{-n}$ es creciente. La sucesión $(-1)^n$ no es ni creciente ni decreciente.

Definición 3.5. *Una sucesión (a_n) se dice*

- *acotada por arriba si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo n.*
- *acotada por abajo si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$ para todo n.*

Si la sucesión es acotada por arriba y por abajo simultáneamente, entonces simplemente diremos que la sucesión es acotada.

Ejemplo 3.9. $\ln n$ es acotada por abajo pero no por arriba, $-\dfrac{n^2}{n+3}$ es acotada por arriba pero no por abajo, $\operatorname{sen} n$ es acotada, en tanto que $(-n)^n$ no es acotada ni por arriba ni por abajo.

Teorema 3.3. *Toda sucesión creciente y acotada por arriba es convergente. Similarmente, toda sucesión decreciente y acotada por abajo es convergente.*

Ejemplo 3.10. La sucesión definida como $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$ y $a_1 = 2$. Notemos primero que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo n, en efecto, por inducción notamos que $2 \geq a_1 = 2 \geq \sqrt{2}$ y si $2 \geq a_n \geq \sqrt{2}$ entonces

$$2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \geq a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{2}$$

además es decreciente pues

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \leq a_n \Leftrightarrow 2 \leq a_n^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq a_n,$$

por lo tanto esta sucesión es convergente. Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ entonces $\sqrt{2} \leq L \leq 2$ y se debe cumplir que

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \sqrt{2}.$$

3.2. Series

Definición 3.6. *Dada una sucesión infinita (a_n), una serie infinita es la suma de todos los términos de la sucesión, esto es*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Esta suma infinita se denota por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lo anterior no siempre puede tener sentido, pues por ejemplo si consideramos la sucesión de los enteros positivos $\{n\}$ entonces la suma sería

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + \ldots$$

que claramente no lleva a ningún valor. Esto se puede ver al considerar la suma de los primeros n términos, esto es

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

de donde si denotamos por $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$ a esta *suma parcial*, vemos que si $n \to \infty$ (de modo de sumar *todos* los términos) entonces está sucesión que diverge a ∞.

Sin embargo hay situaciones donde la suma infinita cobra sentido, por ejemplo, si consideramos la sucesión $a_n = 2^{-n}$ entonces tenemos que la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1,$$

esto nuevamente se puede ver mediante un estudio de que es lo que sucede la sumar los primeros n términos y luego hacer tender n a infinito. En este caso

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} - 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 1 \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2^n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

Este análisis nos lleva a la siguiente

Definición 3.7. *Dada una serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$*, definimos la* n*-ésima suma parcial como*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Además, diremos que la serie es convergente (resp. divergente) si la sucesión de sumas parciales s_n *es convergente (resp. divergente).*

Ejemplo 3.11 (Serie geométrica). Sabemos que si $r \neq 1$ entonces la suma geométrica

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

esto no es mas que la n-ésima suma parcial para la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$. Acá notamos que si $|r| < 1$ entonces

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1 - r}$$

pues $r^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Como además r^{n+1} es divergente para $|r| > 1$ o si $r = -1$ entonces la serie geométrica también lo es para dichos r. En el caso de que $r = 1$ la suma parcial será entonces

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1,$$

que también es divergente.

Notar que el análisis anterior también aplica a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ pues en este caso la sucesión de sumas parciales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} ar^k = \sum_{k=0}^{n} ar^k - a = a\frac{r-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{ar}{1-r},$$

cuando $|r|<1$.

Ejemplo 3.12. Para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{2n-8}6^{2-3n}$ es convergente o divergente vemos que

$$5^{2n-8}6^{2-3n} = \frac{5^{2n-8}}{6^{3n+2}} = \frac{1}{5^8 6^2}\frac{5^{2n}}{6^{3n}} = \frac{1}{5^8 6^2}\frac{\left(5^2\right)^n}{\left(6^3\right)^n} = \frac{1}{5^8 6^2}\left(\frac{5^2}{6^3}\right)^n,$$

es decir la serie que nos interesa es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^8 6^2}\left(\frac{5^2}{6^3}\right)^n$$

pero notamos que esta serie es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n,$$

donde $a = \frac{1}{5^8 6^2}$ y $r = \frac{5^2}{6^3}$, y como $|r|<1$ entonces esta serie es convergente. Más aún tenemos que el valor de la serie se puede calcular como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^8 6^2}\left(\frac{5^2}{6^3}\right)^n = \frac{1}{5^6 6^2\left(6^3-5^2\right)}.$$

Ejemplo 3.13. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es convergente. Para ello notemos que usando fracciones parciales podemos escribir

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

con lo que las sumas parciales quedan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

La serie del ejemplo anterior es un caso de las llamadas series *telescópicas* que en general son de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+1},$$

en cuyo caso la suma parcial es

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1} = (a_1 - a_{1+1}) + (a_2 - a_{2+1}) + (a_3 - a_{3+1}) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

por lo que para que la serie telescópica será convergente si y solo si la sucesión a_n es convergente.

Ejemplo 3.14 (La serie armónica). La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

se denota como la serie armónica y es un ejemplo de serie divergente. Esto se puede ver pues las sumas parciales satisfacen lo siguiente

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

si continuamos de esta manera, notaremos que

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

y como la sucesión $\frac{n}{2}$ diverge a ∞, entonces lo mismo ocurre con la sucesión s_{2^n} (y por lo tanto para s_n).

En lo que sigue, denotaremos por $\sum a_k$ a cualquier serie de la forma $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ para $m \geq 0$ natural arbitrario (usualmente $m = 0$ o $m = 1$).

Teorema 3.4. *Si $\sum a_k$ es convergente, entonces $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.*

Observación 3.1. Como muestra el ejemplo de la serie armónica, si la sucesión $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ nada garantiza que la serie sea convergente.

Demostración. Notar que $a_k = s_k - s_{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. ∎

Teorema 3.5. *Si a_k es divergente, o bien si a_k converge a algo que es distinto de 0 entonces*

$$\sum a_k$$

es divergente.

Ejemplo 3.15. La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n^3}{4-5n^3}$ es divergente pues $\frac{n^3}{4-5n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{5}$.

Proposición 3.2. *Si las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ son convergentes y si c es una constante, entonces*

- $\sum a_k \pm b_k = \sum a_k \pm \sum b_k$
- $\sum c a_k = c \sum a_k$

Observación 3.2. Un comentario relevante es que una serie $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_n$ es convergente (resp. divergente) si y solo si la serie $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_n$ es convergente (resp. divergente) para cierto $N > m$.

Esto se puede justificar pues para $N > m$ podemos escribir

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_n = \sum_{k=m}^{N-1} a_n + \sum_{k=N}^{\infty} a_n,$$

y la primera suma de la derecha siempre se puede evaluar por ser una suma de una cantidad *finita* de términos.

3.2.1. Criterio de la integral

Una serie que puede ser relevante de calcular es la siguiente

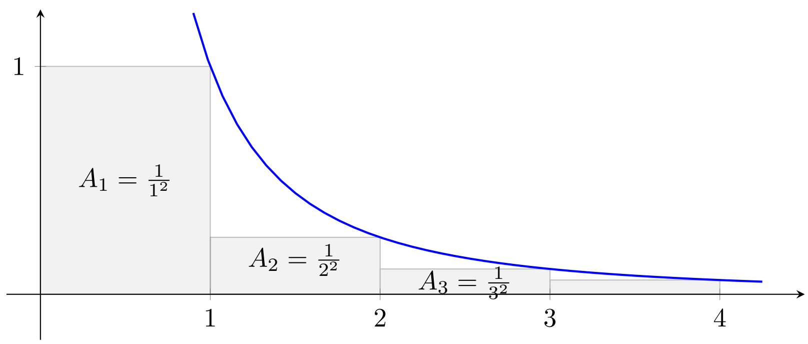
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

pero lamentablemente cuando intentamos calcular las sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

no se puede encontrar una fórmula sencilla para poder calcular el límite. Sin embargo, podemos determinar que la serie es convergente, y mas aun, dar una estimación de su valor utilizando integrales y sumas de Riemann.

Notar que la suma parcial $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ coincide con la suma de Riemann de con extremo derecho para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ con n divisiones del intervalo $[0, n]$



Como se puede apreciar en el dibujo, y si sacamos el primer rectángulo (o el primer término de la serie) tenemos que la sucesión de sumas parciales satisface

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{n} \leq 2,$$

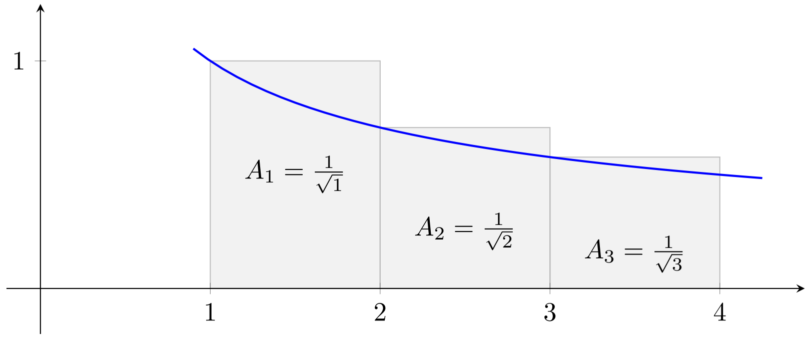
y como s_n es una sucesión creciente (pues cada vez le agregamos un término positivo adicional) y acotada superiormente, entonces debe ser convergente, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = L.$$

Usando matemáticas mas avanzadas, se puede demostrar que $L = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Un análisis similar se puede realizar para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$



En este caso observamos que al usar extremos izquierdos en las sumas de Riemann para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ obtenemos que

$$s_n \geq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = 2\sqrt{n} - 2$$

pero esto nos dice que la sucesión s_n es divergente a $+\infty$.

Las ideas anteriores se puede resumir en el siguiente

Teorema 3.6. *Considere la sucesión $a_n = f(n)$ donde f es una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[M, \infty)$ para cierto $M \geq 1$. Entonces*

- *Si $\displaystyle\int_M^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ es convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también es convergente.*
- *Si $\displaystyle\int_M^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ es divergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también es divergente.*

Ejemplo 3.16. Para verificar que la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ es convergente, notamos que la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$

es continua, positiva y decreciente (notar que $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} < 0$ cuando $x > 3$), y además verifica

$$\int_3^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_3^\infty \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln \frac{x-1}{x+1}\Big|_3^b = \lim_{b\to\infty} \ln \frac{b-1}{b+1} + \ln 2 = \ln 2,$$

pues

$$\lim_{b\to\infty} \ln \frac{b-1}{b+1} = \ln \lim_{b\to\infty} \frac{b-1}{b+1} = \ln 1 = 0.$$

Ejemplo 3.17. Para $p > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$, esto pues cuando $p > 0$ entonces $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es continua y decreciente y

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Ejemplo 3.18. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es divergente pues la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ satisface $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ si $x > e$ y

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x = \int_1^\infty u\, \mathrm{d}u = \infty.$$

3.2.2. Error

Una serie convergente $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se puede escribir como

$$s = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

por lo tanto si pensamos en estimar la serie s por una de sus sumas parciales tendremos que

$$s \approx s_n$$

donde el error de aproximación está dado por $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Siguiendo la idea del criterio de la integral, tenemos que cuando $a_n = f(n)$ para cierta función f, que es continua, positiva y decreciente, este error de aproximación se puede estimar mediante integrales, es decir, se puede obtener que

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq r_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por lo tanto si queremos saber que tan precisa es una aproximación de una serie podemos utilizar integrales. Por ejemplo, si queremos calculamos

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

podemos decir que $s \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$ y además podemos decir que tan buena es dicha aproximación si calculamos

$$\int_{4}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad \int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

es decir

$$\frac{49}{36} + \frac{1}{4} = \frac{58}{36} \leq s \leq \frac{61}{36} = \frac{49}{36} + \frac{1}{3}$$

Esta idea también se puede utilizar para determinar cuántos términos necesito para encontrar una buena aproximación. Por ejemplo, si queremos que el error de aproximación $|r_n| = |s - s_n|$ sea menor que $0{,}0001 = 10^{-4}$ entonces debemos imponer que se cumpla que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x \leq 10^{-4},$$

o sea debemos pedir que $n \geq 10^4$.

3.2.3. Criterios de comparación

Nos interesa estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 4k - 9},$$

para ello, notemos que $4k - 9 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{9}{4}$, por lo tanto si $k \geq 3$ entonces

$$0 \leq \frac{1}{k^2 + 4k - 9} \leq \frac{1}{k^2}$$

es decir, tenemos que la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k - 9} &= \frac{1}{1^2 + 4 \cdot 1 - 9} + \frac{1}{2^2 + 4 \cdot 2 - 9} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k - 9} \\ &\leq \frac{1}{1^2 + 4 \cdot 1 - 9} + \frac{1}{2^2 + 4 \cdot 2 - 9} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

pero sabemos que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2}$ corresponde a la sucesión de sumas parciales de $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ que es convergente, luego se debe cumplir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k - 9}$ también es convergente

Teorema 3.7 (Criterio de comparación I). *Considere las sucesiones a_n y b_n que verifican $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces*

- *Si $\sum b_k$ es convergente, entonces la serie $\sum a_k$ también es convergente.*
- *Si $\sum a_k$ es divergente, entonces la serie $\sum b_k$ también es divergente.*

Ejemplo 3.19. Se sabe que $x + 1 \leq e^x$ para todo $x \geq 0$, lo que nos permite estudiar la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ke^k}$$

pues si $k \geq 1$ entonces $ke^k \geq k(k+1) \Rightarrow \dfrac{1}{ke^k} \leq \dfrac{1}{k(k+1)}$, y como vimos anteriormente, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ es convergente, de donde concluimos que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ke^k}$ también debe ser convergente.

Observar que el criterio de la integral no aplica directamente a este ejemplo pues para estudiar $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{xe^x}\,\mathrm{d}x$ no se puede encontrar una antiderivada de forma explícita, sin embargo el criterio de comparación de integrales nos dice que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{xe^x}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \ln 2$

Teorema 3.8 (Criterio de Comparación II). *Suponga que $\sum a_k$ y $\sum b_k$ son series tales que $a_k > 0$ y $b_k > 0$. Si se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \text{ existe y es } > 0$$

entonces ambas series convergen o ambas divergen simultáneamente.

Ejemplo 3.20. La serie $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{5k+9}$ es divergente, pues si consideramos la serie armónica $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$, que sabemos es divergente, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{5k+9}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k}{5k+9} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 3.21. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k^7+9k^5}$ es convergente, pues si consideramos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, que sabemos es convergente, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^4}{k^7+9k^5}}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^7}{k^7+9k^5} = 1$$

Observación 3.3. Si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ no existe o bien si existe y es igual a 0, entonces el criterio no aplica de la forma señalad. Esto se puede ver al comparar por ejemplo las series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Teorema 3.9 (Criterio del cociente)**.** *Suponga que a_k es una sucesión tal que $a_k > 0$ para todo $k \geq k_0$. Si*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = c$$

entonces

- *Si $c < 1$ entonces la serie $\sum a_k$ es convergente.*
- *Si $c > 1$ entonces la serie $\sum a_k$ es divergente.*

Si $c = 1$ entonces el criterio no es concluyente.

Ejemplo 3.22. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ es convergente para cualquier valor de $a > 0$, esto pues

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a}{k+1} = 0 < 1.$$

Por otra parte, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ es divergente pues

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1.$$

Teorema 3.10 (Criterio de la raíz)**.** *Suponga que a_k es una sucesión tal que $a_k > 0$ para todo $k \geq k_0$. Si*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = c$$

entonces

- *Si $c < 1$ entonces la serie $\sum a_k$ es convergente.*
- *Si $c > 1$ entonces la serie $\sum a_k$ es divergente.*

Si $c = 1$ entonces el criterio no es concluyente.

Ejemplo 3.23. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ es convergente pues

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0 < 1.$$

Por otra parte, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k+8}{4k-1}\right)^k$ es divergente pues

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{5k+8}{4k-1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{5k+8}{4k-1}=\frac{5}{4}>1.$$

Otro ejemplo relevante es $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k-1}}{5^{3k-5}}$, donde tenemos que

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{3^{2k-1}}{5^{3k-5}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{2-\frac{1}{k}}}{5^{3-\frac{5}{k}}}=\frac{3^2}{5^3}<1,$$

Teorema 3.11 (Criterio para series alternantes)**.** *Suponga que b_k es una sucesión tal que $b_k>0$ para todo $k\geq k_0$. Si se cumple que*

- *$b_{k+1}\leq b_K$ para todo k.*
- *$\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$.*

Entonces la serie $\sum(-1)^k b_k$ es convergente.

Ejemplo 3.24. Las series $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4k^3}{6k^4+5}$ son convergentes, mientras que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{5k-1}$ es divergente.

Definición 3.8. *Diremos que una serie $\sum a_k$ es* absolutamente convergente *si se cumple que la serie*

$$\sum|a_k|$$

es convergente

Teorema 3.12. *Si la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente , entonces es convergente*

Demostración. Notar que si consideramos $b_k=a_k+|a_k|$, entonces $0\leq b_k\leq 2|a_k|$, luego por el criterio de comparación se tiene que la serie $\sum b_k$ es convergente. Como además

$$a_k=a_k+|a_k|-|a_k|=b_k+|a_k|$$

y la series $\sum b_k$ y $\sum|a_k|$ son convergentes, entonces la serie $\sum a_k$ también debe ser convergente. ∎

Ejemplo 3.25. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k^2+k)}{k^2}$ es absolutamente convergente pues $\left|\dfrac{\operatorname{sen}(k^2+k)}{k^2}\right|\leq\dfrac{1}{k^2}$ y $\sum\dfrac{1}{k^2}$ es convergente.

Ejemplo 3.26. Vimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, pero como $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$, entonce la serie no es absolutamente convergente.

Ejemplo 3.27. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n!}$ es absolutamente convergente pues $\left|\frac{(-4)^n}{n!}\right| = \frac{4^n}{n!}$ y la serie $\displaystyle\sum\frac{4^n}{n!}$ pues cumple el criterio del cociente

$$\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}} = 4\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Observación 3.4. Para ver que una serie es absolutamente convergente, se suelen utilizar todos los criterios antes vistos, pues $|a_k| \geq 0$.

Definición 3.9. *Una serie que es convergente, pero no absolutamente convergente se dice* condicionalmente convergente*.*

Mas ejemplos

Ejemplo 3.28. Estudie la convergencia de las siguientes series

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n-1}$. Diverge.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^4+5}}{3k^4+5k^2+1}$. Converge pues para valores de k suficientemente grandes se cumple que $\dfrac{\sqrt{k^4+5}}{3k^4+5k^2+1} \approx \dfrac{1}{3k^2}$.

3. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k^3}$ se puede estudiar analizando la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty}x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x < \infty$.

4. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^4}{n^5+n}$ es alternante.

5. La serie $\displaystyle\sum_{k=10}^{\infty}\frac{4^k}{(2k+1)!}$ se puede estudiar usando el criterio del cociente, pues

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{4^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}}{\frac{4^k}{(2k+1)!}} = \frac{4(2k+1)!}{(2k+3)!} = \frac{4}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

6. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{5^{2n}+5}$ se puede comparar con la serie geométrica $\displaystyle\sum\frac{4^n}{5^{2n}}$ pues

$$\frac{4^n}{5^{2n}+5} \leq \frac{4^n}{5^{2n}} = \left(\frac{4}{25}\right)^n.$$

7. La serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ se puede estudiar con el criterio de la raíz pues

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

3.3. Series de potencias

Una serie de potencias se puede considerar como un *polinomio infinito*, esto es, una función $f(x)$ en la que a cada valor de x se le asocia la cantidad

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots .$$

Dependiendo del valor de x, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo en el caso en que $c_k = 1$ para todos los valores de k tenemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

es una serie geométrica, la cual sabemos es convergente cuando $-1 < x < 1$ y divergente cuando $|x| \geq 1$, mas aún, sabemos que si $|x| < 1$ entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

En general, una serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ o bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ será convergente para ciertos valores de x y divergente para otros.

Ejemplo 3.29. Si consideramos por ejemplo la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ podemos usar el criterio del cociente para determinar si converge o no:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$, es decir, a serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.

Por otra parte, si estudiamos la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{|x|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x|^k}{k}} = |x| \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} |x| ,$$

luego, si $|x| < 1$ entonces la serie es convergente, en tanto que si $|x| > 1$ la serie es divergente. Además, si $x = 1$ entonces la serie es la serie armónica, que es divergente, mientras que si $x = -1$, la serie es la serie armónica alternante, que es convergente.

La sucesión (c_k) se denota como la sucesión de coeficientes de la serie de potencias, en tanto que cuando se escribe la serie como $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ se dice que la serie esta *centrada en* a.

Ejemplo 3.30. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ está centrada en $a = 5$, y notamos que si usamos criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{|x-5|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x-5|^k}{k}} = |x-5| \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} |x-5| ,$$

luego, si $|x-5| < 1$ entonces la serie es convergente, en tanto que si $|x-5| > 1$ la serie es divergente.

Ejemplo 3.31. De acuerdo al criterio del cociente la serie $\sum k! x^k$ satisface

$$\frac{(k+1)!\,|x|^{k+1}}{k!\,|x|^k} = (k+1)\,|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

En otras palabras, la serie solo converge para $x = 0$ y es divergente para todos los demás valores de x.

Los ejemplos anteriores muestran que hay 3 posibilidades cuando uno estudia series de potencias, lo que resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 3.13. *Dada una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ entonces hay tres posibilidades.*

(i) La serie converge para $x = a$ y diverge para $x \neq a$.

(ii) La serie converge para todo posible valor de x.

(iii) Existe un número $R > 0$ tal que la serie converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$.

El número R que se indica en el teorema se denomina *radio de convergencia* de la serie, y se suele convenir que $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii).

Ejemplo 3.32. Para encontrar el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$ utilizamos el criterio del cociente

$$\frac{\frac{\left|(-5)^{n+1}x^{n+1}\right|}{\sqrt{2n+3}}}{\frac{|(-5)^n x^n|}{\sqrt{2n+1}}} = 5\,|x|\,\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 5\,|x|\,,$$

luego si $|x| < \frac{1}{5}$ entonces la serie es convergente, es decir $R = \frac{1}{5}$.

En general, los criterios de convergencia no nos dicen que ocurre cuando $x = a + R$ o $x = a - R$ por lo que se deben estudiar esos casos por separado. En el ejemplo anterior tenemos que si $x = R = \frac{1}{5}$ la serie se convierte en $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ que de acuerdo al criterio para series alternantes es convergente. En tanto si $x = -R = -\frac{1}{5}$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ que es divergente de acuerdo al criterio de comparación, pues

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} > 0,$$

y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Ejemplo 3.33. El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ lo podemos encontrar con el criterio de la raíz pues

$$\sqrt[n]{\frac{n\,|x+2|^n}{3^{n+1}}} = \frac{\sqrt[n]{n}\,|x+2|}{3^{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x+2|}{3},$$

con esto si $\frac{|x+2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 3$ entonces la serie es convergente. Con esto vemos que la serie está centrada en $a = -2$ y tiene radio de convergencia $R = 3$. Para el caso $x + 2 = 3$ tenemos que la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3}$$

que es una serie divergente. Si $x+2=-3$ entonces la serie queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3}$$

que también es una serie divergente.

3.4. Funciones que se expresan como series de potencias

Vimos anteriormente que la serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

cada vez que $|x|<1$. Esto nos dice que la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ coincide con la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. ¿Se puede hacer esto con otras funciones y otra series?

Por ejemplo, podemos ver que la función $\frac{1}{1+x}$ se puede escribir como

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = f(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

y esta igualdad ocurre cuando $|-x|<1 \Leftrightarrow |x|<1$.

Ejemplo 3.34. La función $\frac{1}{x^2+4}$ se puede escribir como

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{4} f\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{4^{k+1}},$$

que es convergente si $\left(\frac{|x|}{2}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$.

Ejemplo 3.35. La función $\frac{3x^5}{x-5}$ se puede escribir como

$$\frac{3x^5}{x-5} = 3x^5 \frac{1}{x-5} = 3x^5 \frac{1}{-5(1-\frac{x}{5})} = -\frac{3x^5}{5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = -\frac{3x^5}{5} f(\frac{x}{5}) = -\frac{3x^5}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -3\frac{x^{k+5}}{5^{k+1}},$$

que es convergente si $\dfrac{|x|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x| < 5$.

Las series de potencias, como cualquier función *razonable*, se pueden derivar e integrar dentro del radio de convergencia.

Teorema 3.14. *Sea $f(x) = \sum c_k (x-a)^k$ una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$, entonces, si $|x-a|<R$ se cumple que*

- $f'(x) = \left(\sum c_k (x-a)^k\right)' = \sum \left(c_k (x-a)^k\right)' = \sum k c_k (x-a)^{k-1}$.
- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\sum c_k (x-a)^k\right)\,\mathrm{d}x = \sum \int c_k (x-a)^k\,\mathrm{d}x = \sum c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + C$

Ejemplo 3.36. Consideremos la serie $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ que sabemos tiene de radio de convergencia $R = \infty$. Si calculamos la derivada obtenemos que

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = g(x).$$

Es decir, esta función cumple que $g'(x) = g(x)$.

Ejemplo 3.37. Sabemos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ cada vez que $|x| < 1$, luego si derivamos a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Ejemplo 3.38. Sabemos también que la derivada de $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y además

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k,$$

cada vez que $|1-x| < 1$, por lo tanto en ese intervalo podemos escribir

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int (1-x)^k\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(1-x)^k}{k} + C,$$

y como $\ln 1 = 0$, si usamos $x = 1$ en la igualdad de arriba, obtenemos que $C = 0$.

Notar que si escribimos $x = 1 + t$ entonces lo anterior se puede escribir como

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k}$$

cada vez que $|t| < 1$.

Además, si estudiamos el caso $t = 1$ obtenemos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

es una serie alternante que satisface el criterio de convergencia, de lo que deducimos que la serie converge, y por la igualdad de arriba se debe obtener que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Ejemplo 3.39. También sabemos que $\int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \arctan x + C$, de donde podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-(-x^2)}\, \mathrm{d}x \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) \mathrm{d}x \qquad\qquad \text{si } |x| < 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + C
\end{aligned}
$$

y como $\arctan 0 = 0$ entonces se cumple que $C = 0$.

3.5. Series de Taylor

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que se puede representar por una serie de potencias, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots$$

que tiene un radio de convergencia $R > 0$. De lo visto anteriormente, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \\
f''(x) &= 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \dots \\
f'''(x) &= 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + \dots
\end{aligned}
$$

con lo que si consideramos $x = a$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f(a) \\
c_1 &= f'(a) \\
c_2 &= \frac{f''(a)}{2} \\
c_3 &= \frac{f'''(a)}{3\cdot 2}.
\end{aligned}
$$

En general, si seguimos derivando y evaluando en $x = a$ obtendremos que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

y el siguiente

Teorema 3.15. *Si sabemos de antemano que $f(x)$ tiene una representación en series de potencias $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ entonces*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

El teorema anterior se puede usar para buscar el candidato a ser una representación en series de potencias centradas en a para funciones que tengan *infinitas* derivadas, pues se puede escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

que se conoce como la *Serie de Taylor* de la función $f(x)$ centrada en a. En el caso particular en que $a = 0$, la serie resultante

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

se conoce como *Serie de Maclaurin*.

Sin embargo, existen funciones que, a pesar de tener infinitas derivadas, y por lo tanto a las que se les puede calcular su serie de Taylor, esta serie puede no representar a la función. Sin embargo, para una gran cantidad de funciones de uso frecuente, la serie de Taylor si resulta ser una representación en series de potencias para la función. Veremos algunos casos.

Ejemplo 3.40. Encontremos la serie de Maclaurin para la función $f(x) = e^x$. Tenemos que $f'(x) = e^x$, de donde deducimos que

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

por lo tanto, como $e^0 = 1$ la serie de Maclaurin es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

serie que sabemos tiene un radio de convergencia $R = +\infty$, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

está definida para todo x. Con un poco de trabajo adicional, se puede verificar que $e^x = f(x)$.

En general, una función $f(x)$ no tiene que ser igual a su serie de Tayler para valores de $x \neq a$, sin embargo, para la mayoría de las funciones tradicionales, la serie de Taylor es igual a la función.

Veamos algunos ejemplos donde esto ocurre

Ejemplo 3.41 (Serie de $\operatorname{sen} x$). Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{sen} x &\Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x &\Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x &\Rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(iv)}(x) = f(0) = \operatorname{sen} x &\Rightarrow f^{(iv)}(0) = 0, \end{aligned}$$

de donde deducimos que la serie de Maclaurin debe ser de la forma

$$\begin{aligned} 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \ldots &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Se puede ver que el radio de convergencia para esta serie es $R = \infty$ y que además

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

para todo x.

Ejemplo 3.42 (Serie de $\cos x$). Si $f(x) = \cos x$, tenemos que

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0) = 0 \\
f^{(iv)}(x) = f(0) = \cos x \Rightarrow f^{(iv)}(0) = 1,
\end{aligned}
$$

de donde deducimos que la serie de Maclaurin debe ser de la forma

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \ldots &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.
\end{aligned}
$$

Se puede ver que el radio de convergencia para esta serie es $R = \infty$ y que además

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

para todo x.

Ejemplo 3.43. La serie de Maclaurin para $f(x) = \sqrt{1+x}$ se puede calcular como sigue

$$
\begin{aligned}
f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) = -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{2^2} \\
f'''(x) = \frac{3}{2^3}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{2^3} \\
f^{(iv)}(x) = -\frac{5\cdot 3}{2^4}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = -\frac{5\cdot 3}{2^4} \\
f^{(v)}(x) = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^5}(1+x)^{-\frac{9}{2}} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^5}.
\end{aligned}
$$

Si notamos que

$$3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots (2k-3) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-4)\cdot (2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-4)} = \frac{(2k-1)!}{2\cdot (2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2))} = \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}$$

entonces para $k \geq 2$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\frac{(2k-3)\cdot (2k-5)\cdot \ldots 5\cdot 3}{2^k} = (-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}.$$

Ejemplo 3.44. Encontremos la serie de Maclaurin para $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Para hacer esto, notamos que

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

como esta serie tiene un radio de convergencia $R = +\infty$ tenemos que

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}\,\mathrm{d}x = C + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Ejemplo 3.45. Las series de potencias también son útiles para calcular algunos límites, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-\dots\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}x-\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{6!}x^5-\dots\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notar que el mismo resultado se obtiene mediante la regla de L'Hospital pues

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1} = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Ejemplo 3.46. Otro límite que se puede calcular es

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen} x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots\right)-1}{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\dots}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots}{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\dots}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\dots}{1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\dots}\\
&= \lim_{x\to 0}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\dots}{1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\dots}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

En general no siempre es cierto que $f(x)$ coincida con su serie de Taylor para valores de $x \neq a$. Para que esto ocurra, la función debe satisfacer ciertas condiciones. Para estudiar esto necesitamos algunos conceptos

Definición 3.10 (Polinomios de Taylor)**.** *Para $n \geq 0$ consideramos el polinomio*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

y los llamaremos Polinomio de Taylor de orden *n.*

Proposición 3.3. *Dada una función $f(x)$, entonces $f(x)$ coincide con su serie de Taylor en x si se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty}|T_n(x)-f(x)| = 0.$$

Teorema 3.16. *Si $f(x)$ es una función para la cual existe $M > 0$ tal que*

$$\left|f^{n+1}(x)\right| \leq M$$

para todo $|x-a| \leq r$, entonces

$$|f(x)-T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Observación 3.5. El teorema anterior nos dice que si se cumplen que $\left|f^{n+1}(x)\right| \leq M$ para todo n suficientemente grande, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |T_n(x) - f(x)| = 0, \qquad \forall\ |x-a| < r$$

pues se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0.$$

Teorema 3.17 (Teorema de Taylor)**.** *Sea $k \geq 1$ un entero y f una función k veces diferenciable para $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe una función h_k tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k,$$

y

$$\lim_{x\to a} h_k(x) = 0.$$

Observación 3.6. Este teorema dice que si x está lo suficientemente cerca de a, entonces el polinomio de Taylor

$$T_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

es una buena aproximación de la función $f(x)$.

II
Cálculo diferencial e integral en varias variables

Capítulo 4

Cálculo diferencial en varias variables

4.1. Funciones de dos variables

Usualmente en aplicaciones nos encontramos con modelos que involucran mas de una variable independiente. A modo de ejemplo recordamos el problema de la cerca desarrollado en el Ejemplo 1.20: en dicho caso teníamos las variables x e y que representaban el ancho y el largo de la cerca, por lo que la función que modela la cantidad de cerca puede ser escrita como

$$L(x, y) = 2x + y.$$

Esta es una típica función de dos variables. A continuación tenemos la definición de tales funciones:

Definición 4.1. *Una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en un dominio D, un único valor real $f(x, y)$.*

Es importante remarcar que en aplicaciones lo que usualmente se entrega es una fórmula para $f(x, y)$ donde el dominio está "implícitamente" definido como el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales la función esta bien definida.

En el ejemplo de la cerca, debe quedar claro que el dominio de la función $L(x, y)$ son todos los pares (x, y) tales que $x > 0$ e $y > 0$, esto pues ambas cantidades representan la longitud de un segmento. Esto suele ocurrir cuando las variables tienen alguna connotación relativa a un problema real, en el caso del ejemplo, las distancias son siempre positivas.

Por otra parte, hay situaciones en las que no hay una interpretación clara del significado de las variables. En tales casos la misma fórmula nos permite encontrar el dominio de la función. Dicha situación se muestra en los siguiente ejemplos,

Ejemplo 4.1.

1. Sea $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 5y}{x - y}$. Determine el dominio de f y calcule $f(2, 3)$.

   Solución. Para que f esté bien definida, nos debemos preocupar de no dividir por 0. Es decir, $x - y \neq 0$ o equivalentemente $x \neq y$.

   De lo anterior tenemos que el punto $(2, 3)$ pertenece al dominio, por lo que podemos calcular

$$f(2, 3) = \frac{3(2)^2 + 5(3)}{2 - 3} = -27.$$

2. Sea $g(x,y) = xe^y + \ln x$. Determine el dominio de g y calcule $g(e^2, e)$.

   Solución. Aquí la función está indefinida cuando $x \leq 0$, puesto que el logaritmo natural solo esta definido para valores positivos, de donde concluimos que el dominio son todos los pares ordenados (x, y) tales que $x > 0$.

   Como $e^2 > 0$ tenemos que el par (e^2, e) pertenece al dominio, luego calculamos

$$g(e^2, e) = e^2 \cdot e^e + \ln e^2 = e^{2+e} + 2.$$

3. Sea $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Determine el dominio de h y calcule $h(1, 2)$.

   Solución. En este caso nos debemos preocupar que lo que se encuentra dentro de la raíz cuadrada sea mayor que 0, es decir: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, o equivalentemente $x^2 + y^2 \leq 9$.

   Vale la pena recordar que la ecuación en el plano cartesiano de una circunferencia de radio R centrado en las coordenadas (x_0, y_0) está dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

   Además, el conjunto de los pares (x, y) tales que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$ corresponde a los pares que se encuentran dentro de la circunferencia.

   Finalmente notamos que $(1, 2)$ está en el domino de la función, por lo que calculamos

$$h(1, 1) = \sqrt{9 - 1^2 - 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

4. Sea $f(x,y) = \log_2(x + y - 4)$. Determine el dominio de f.

   Solución. Ahora la condición es que $x + y - 4 > 0$, es decir el domino es el conjunto de todos los pares (x, y) tales que $x + y > 4$. Un buen ejercicio es determinar como se puede graficar este dominio.

Ejemplo 4.2. Suponga que en cierta fábrica se estima que la producción de cierto producto está dada por

$$Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} \quad \text{unidades},$$

donde K es el capital invertido (en millones de pesos) y L es la cantidad de trabajadores.

1. Encuentre la producción si el capital es de \$512 millones y de 1.000 trabajadores.

   Solución. Debemos calcular $Q(512, 1000)$, es decir

$$Q(512, 1000) = 60 \cdot (512)^{\frac{1}{3}} \cdot (1000)^{\frac{2}{3}} = 60 \cdot 8 \cdot 100 = 48{,}000.$$

2. ¿Qué sucede si se duplican el capital y la cantidad de trabajadores?

   Solución. Si el capital inicial es K y la cantidad de trabajadores es L, entonces debemos calcular $Q(2K, 2L)$.

$$Q(2K, 2L) = 60(2K)^{\frac{1}{3}}(2L)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = 2Q(K, L),$$

   en otras palabras, la producción se duplica.

Ejemplo 4.3. Una población de 5 millones de habitantes crece exponencialmente como

$$P(k,t) = 5e^{kt},$$

donde k es la tasa de crecimiento (per cápita) anual y t es la cantidad de años transcurridos. ¿Cuál será la población dentro de 7 años si es que la población crece a un $3\,\%$ anual?

Solución. Tenemos que $k = 0{,}03$ y $t = 7$, de donde la población dentro de 7 años será $P(0{,}03, 7) = 5e^{0{,}03\cdot 7} \approx 6{,}16839$ millones de habitantes.

Ejercicio 4.1. Calcule el valor de la función en los valores dados:

1. $f(x,y,z) = xe^y + ye^x$; $f(1,1)$, $f(\ln 2, \ln 3)$.
2. $g(x,y) = \log_2(x+y^2)$; $g(1,1)$, $g(7,5)$.
3. $h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; $h(-1,0)$, $h(10,-5)$.

Ejercicio 4.2. Encuentre el domino de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = \dfrac{5x+4y}{3x-5y}$.
2. $g(x,y) = \dfrac{x}{\ln(x+y)}$.
3. $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{1+x^2}$.
4. $j(x,y) = \dfrac{\log_2(1-x^2)}{x-y^2}$.

Ejercicio 4.3. El coeficiente intelectual de una persona se mide mediante la siguiente fórmula

$$C(a,m) = \frac{100m}{a},$$

donde a es la edad fisiológica de la persona, y m es la *edad mental* de la persona.

1. Encuentre el domino de la función C.
2. ¿Cuál es el coeficiente intelectual de una persona de 20 años de edad con una edad mental de 18 años?
3. ¿Cuál es el coeficiente intelectual de una persona que tiene la misma edad mental que su edad fisiológica?

Ejercicio 4.4. La ley de Poiseuille dice que la velocidad de la sangre V en cm/s que fluye a r cms. del eje central del vaso sanguíneo de radio R cms. y largo L cms. está dada por

$$V(r,R,L,P) = \frac{9{,}3P}{L}\left(R^2 - r^2\right)$$

donde P es la presión del vaso en dinas/cm^2. Suponga que para un vaso sanguíneo en particular, se determina que su radio es de 0,0075 cms. y es de 1,675 cms. de largo.

1. Escriba la función V como una función solo de R y P. Determine su dominio.
2. ¿Qué tan rápido fluye la sangre a 0,004 cms. del eje si la presión es de 3,875 dinas/cm^2.?

Nota: “dina” es una medida de fuerza tal que 100000 dinas equivalen a 1 Newton.

4.1.1. Propiedades

1. $f \pm g(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$
2. $f \cdot g(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$
3. $\frac{f}{g}(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces $f \circ g(x,y) = f(g(x,y))$ pero no se puede hacer $g \circ f$.
5. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces $g \circ (x,y) = g(f(x,y))$ pero no se puede hacer $f \circ g$.

Definición 4.2. *Decimos que f es una función polinomial en las variables x, y si $f(x,y)$ se puede escribir como una suma de términos de la forma*

$$cx^n y^n,$$

donde c es alguna constante, y $m, n \geq 0$ son enteros.

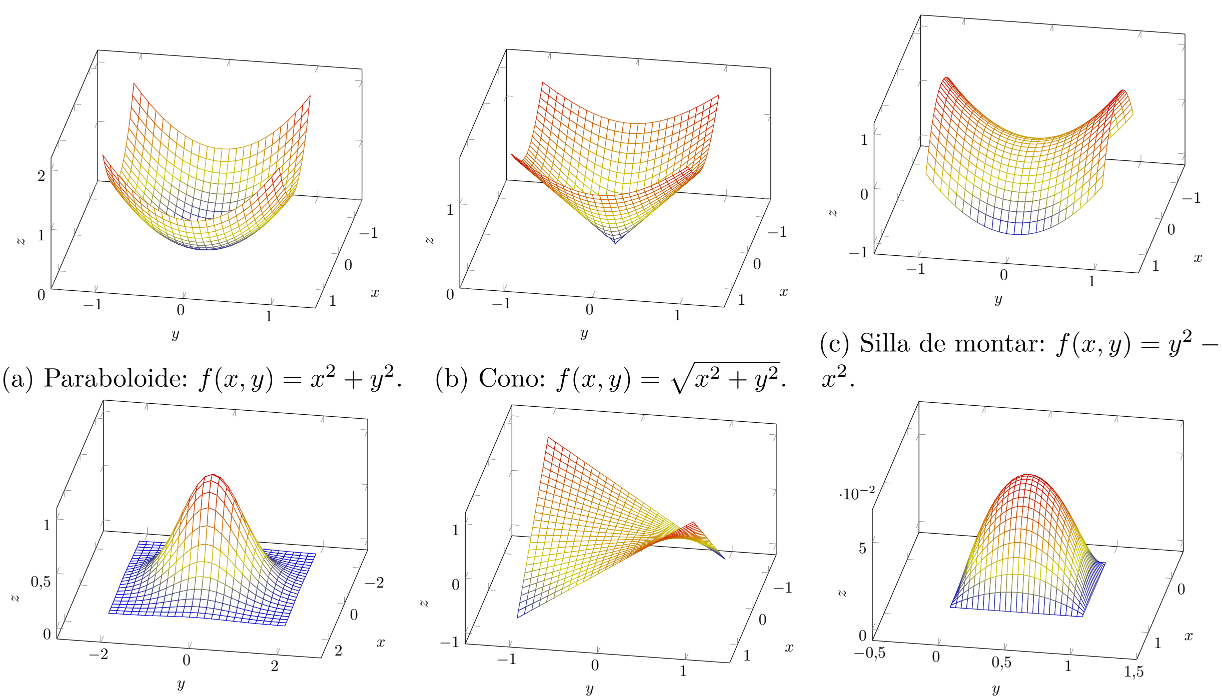
Definición 4.3. *Decimos que R es una función racional en las variables x, y si se puede escribir como*

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales.

4.1.2. Gráficos de funciones

A diferencia de las funciones de una variable, las funciones de dos variables deben ser graficadas en el espacio tridimensional. A continuación observaremos algunos gráficos de dichas funciones.



(a) Paraboloide: $f(x,y) = x^2 + y^2$. (b) Cono: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. (c) Silla de montar: $f(x,y) = y^2 - x^2$.

(d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. (e) $f(x,y) = xy$. (f) $f(x,y) = x(1-x)y(1-y)$.

Figura 4.1: Gráficos de algunas funciones de dos variables.

Ejercicio 4.5. Investigar sobre como graficar funciones de dos variables usando herramientas computacionales. Una manera simple de hacer esto es utilizar Google:

`http://www.google.cl/search?q=x^2%2By^2+from+-2+to+2`

Curvas de nivel

Definición 4.4. *Si f es una función de dos variables x, y, decimos que $\mathcal{C}$ es una curva de nivel para f al nivel c si se cumple que*

$$\mathcal{C} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\Big\}.$$

Ejemplo 4.4. Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ son circulos de radio $\sqrt{c}$, pues satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = c.$$

Ejemplo 4.5. Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y$ son parábolas que satisfacen la ecuación

$$y = x^2 + c.$$

Ejemplo 4.6. Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ son hipérbolas que satisfacen la ecuación

$$y^2 = x^2 + c.$$

4.2. Derivadas parciales

Como vimos en los problemas de una variable, conocer las derivadas de una función es de gran utilidad, por ejemplo para obtener puntos críticos, lo que en aplicaciones nos permite resolver problemas de optimización.

Es por ello que debemos generalizar el concepto de derivada para el caso en que tratamos con funciones de dos variables:

Definición 4.5. *Suponga que $z = f(x, y)$ es una función de dos variables. La derivada parcial de f con respecto a x es la función que resulta de derivar con respecto a x la $f(x, y)$ asumiendo que y es constante. Denotamos dicha derivada parcial como*

$$f_x(x, y) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Similarmente, la derivada parcial de f con respecto a y es la función que resulta de derivar con respecto a y la $f(x, y)$ asumiendo que x es constante, y la denotamos como

$$f_y(x, y) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Si ambas derivadas existen, decimos que la función es diferenciable.

Ejemplo 4.7. Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   Solución.
   - $f_x(x, y) = 2x$.
   - $f_y(x, y) = 2y$.

2. $f(x,y) = x\ln(x+y)$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = \ln(x+y) + \dfrac{x}{x+y}$.
   - $f_y(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$.

3. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xe^y)$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = e^y\cos(xe^y)$.
   - $f_y(x,y) = xe^y\cos(xe^y)$.

4.2.1. Aplicaciones

Costo Marginal

4.2.2. Derivadas de orden superior

Así como tenemos el concepto de derivada parcial, también podemos hablar de las derivadas de segundo orden. Una observación importante es que a diferencia del caso de una variable, para funciones de dos variables hay mas de una segunda derivada:

Definición 4.6. *Suponga que $z = f(x,y)$ es una función de dos variables. Tenemos cuatro derivadas de segundo orden, las que se obtienen de la siguiente manera:*

- $f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a x de la derivada parcial respecto a x,*
- $f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a y de la derivada parcial respecto a y,*
- $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a y de la derivada parcial respecto a x, y*
- $f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a x de la derivada parcial respecto a y.*

Si todas las derivadas de segundo orden existen, decimos que la función es dos veces diferenciable.

Ejemplo 4.8. Encuentre las derivadas de segundo orden de las siguiente funciones:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = 3x^2$.
   - $f_y(x,y) = 3y^2$.
   - $f_{xx}(x,y) = 6x$.
   - $f_{yy}(x,y) = 6y$.
   - $f_{xy}(x,y) = 0$.
   - $f_{yx}(x,y) = 0$.

2. $f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$.

   Solución.
   - $f_x(x, y) = y^3 + 5y + 2$.
   - $f_y(x, y) = 3xy^2 + 5x$.
   - $f_{xx}(x, y) = 0$.
   - $f_{yy}(x, y) = 6xy$.
   - $f_{xy}(x, y) = 3y^2 + 5$.
   - $f_{yx}(x, y) = 3y^2 + 5$.

3. $f(x, y) = e^{xy+2x^2}$.

   Solución.
   - $f_x(x, y) = (y + 4x)e^{xy+2x^2}$.
   - $f_y(x, y) = xe^{xy+2x^2}$.
   - $f_{xx}(x, y) = \left(4 + (y + 4x)^2\right) e^{xy+2x^2}$.
   - $f_{yy}(x, y) = x^2 e^{xy+2x^2}$.
   - $f_{xy}(x, y) = (1 + x(y + 4x))\, e^{xy+2x^2}$.
   - $f_{yx}(x, y) = (1 + x(y + 4x))\, e^{xy+2x^2}$.

Como observamos en todos los ejemplos anteriores, las funciones $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son iguales. Esto no es casualidad, de hecho para (casi[1]) todas las funciones se tiene que $f_{xy} = f_{yx}$. Es por esto que en los ejercicios solo necesitamos calcular tres derivadas de segundo orden.

4.2.3. Regla de la cadena

Otro tópico de importancia es el relativo a la regla de la cadena cuando las funciones tienen dos variables. Recordemos que cuando teníamos una función de una variable $y = f(x)$ era habitual introducir el concepto de que x dependía una tercera variable t, y nos interesaba saber como depende y de dicha variable, es decir, nos interesaba calcular $\frac{dy}{dt}$. Para ello usábamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

En el caso de dos variables, lo que sucede es que tenemos que $z = f(x, y)$ y tanto x como y dependen de una cuarta variable t. Para obtener la tasa de cambio de z respecto a t necesitamos generalizar la regla de la cadena que conocemos para una variable.

Teorema 4.1 (Regla de la cadena I)**.** *Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable, y supongamos que x e y son funciones de t, es decir, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces z se puede considerar como una función de t y tenemos que*

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

[1] Las funciones para las que esto no es cierto son bastante patológicas. Una de estas funciones es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0). \end{cases}.$$

Este tipo de funciones raramente aparece en aplicaciones, por lo que no nos preocuparemos de ellas.

Ejemplo 4.9. Dada la funciones $z = f(x, y)$, $x(t)$ e $y(t)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = 1 + t$, $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x, \\ f_y(x,y) &= 2y, \\ \frac{dx}{dt} &= 1, \\ \frac{dy}{dt} &= 2t - e^{-t}, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = 2x + 2\left(2t - e^{-t}\right) y.$$

2. $f(x, y) = x \ln x$, $x(t) = t^{\frac{1}{3}}$, $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

   Solución. En este caso

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \ln x + 1, \\ f_y(x,y) &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \ln x\right).$$

3. $f(x, y) = \cos(x^2 + xy)$, $x(t) = \dfrac{1}{t+1}$, $y(t) = \operatorname{sen} t$.

   Solución. Calculamos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\left(2x + y\right) \operatorname{sen}(x^2 + xy), \\ f_y(x,y) &= -x \operatorname{sen}(x^2 + xy), \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{(t+1)^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(2x + y) \operatorname{sen}(x^2 + xy)}{(t+1)^2} - x \operatorname{sen}(x^2 + xy) \cos t.$$

Teorema 4.2 (Regla de la cadena II)**.** *Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable, y supongamos que $x = g(t, s)$ e $y = h(t, s)$. Entonces z se puede considerar como una función de (t, s) y tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= f_x(x,y) \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x,y) \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= f_x(x,y) \frac{\partial x}{\partial s} + f_y(x,y) \frac{\partial y}{\partial s}. \end{aligned}$$

4.2.4. Derivación implícita

Ejercicio 4.6. Calcule las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy - 5x + 6y - 90$.
2. $f(x,y) = 50e^{xy}$.
3. $f(x,y) = x - 5e^{-xy}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+10e^{-xy}}$.
5. $f(x,y) = \cos^2(x+y)$.
6. $f(x,y) = \dfrac{e^{2-x}}{x-y}$.
7. $f(x,y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$.

Ejercicio 4.7. Dadas las funciones $z = f(x,y)$, $x(t)$ e $y(t)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

1. $f(x,y) = 300 - 20x^2 + 40y$, $x(t) = 100$, $y(t) = 150 - \sqrt{t}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{3x}{y}$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2 - 1$.
3. $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$, $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln t$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $x(t) = t^3 + \dfrac{1}{t^3}$, $y(t) = \cos t$.

Capítulo 5

Optimización en varias variables

5.1. Optimización de funciones de dos variables

Hasta ahora hemos visto problemas de optimización en una variable, sin embargo hay situaciones en las que se requieren mas de una variable independiente para modelar ciertos problemas, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1 . Se desea construir una piscina para contener 4 m^3 de agua[1]. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina que minimizan la cantidad de revestimiento del interior de la piscina?

Para resolver este problema es conveniente hacer un dibujo (Figura 5.1) para visualizar las variables pertinentes

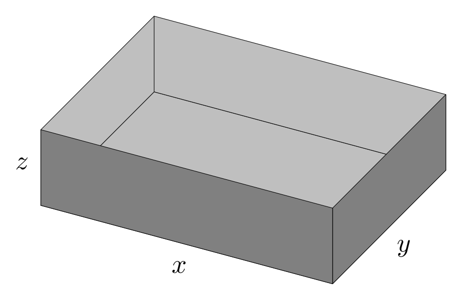


Figura 5.1: Piscina.

Como vemos, el problema consiste en minimizar la superficie de la piscina, es decir, minimizar la función de tres variables

$$S(x, y, z) = 2xz + 2zy + xy$$

bajo la restricción de que el volumen de la piscina es de 4 m^3, es decir

$$V = xyz = 4.$$

Tal como en el ejemplo de la cerca (Ejemplo 1.20), podemos usar la segunda ecuación para reducir el número de variables. Por ejemplo, podemos escribir que

$$z = \frac{4}{xy},$$

[1] 1 m^3 ≈1000 litros.

de donde reemplazando en la función S obtenemos la función de dos variables

$$S(x,y) = \frac{8}{y} + \frac{8}{x} + xy.$$

Es decir, nuestro problema ha sido reducido al siguiente problema de cálculo:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x} + xy, \\ \text{sujeto a que } x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{O}$$

¿Cómo resolvemos este problema?

5.1.1. Extremos relativos y puntos críticos en dos variables

Definición 5.1 (Extremos relativos)**.** *Decimos que la función f tiene un*

- *Máximo relativo en el punto (a,b), si $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todo (x,y) "cerca" de (a,b);*
- *Mínimo relativo en el punto (a,b), si $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) "cerca" de (a,b);*

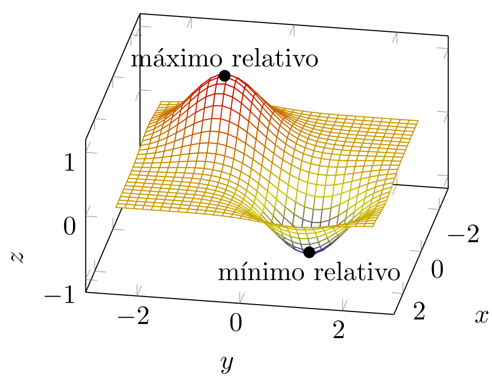


Figura 5.2: Extremos relativos

Al igual que en el caso de una variable, para encontrar extremos relativos, la herramienta crucial es la derivada

Definición 5.2 (Puntos Críticos)**.** *Dada una función diferenciable f, decimos que (a,b) es un punto crítico*[2] *si*

$$f_x(a,b) = 0 \quad y \quad f_y(a,b) = 0.$$

Ejemplo 5.2. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Solución. Ejemplo resuelto en clases. ■

Así como en problemas de una variable, los puntos críticos son *candidatos* a ser extremos relativos, como lo muestra el siguiente teorema

Teorema 5.1. *Si las derivadas parciales de primer orden existen, entonces los extremos relativos se encuentran en los puntos críticos.*

[2]Así como en el caso de una variable, puede darse la situación que la función no tenga derivadas en (a,b): En dicho caso, (a,b) también es un punto crítico. En este curso no nos preocuparemos de dichos casos.

El teorema anterior nos da una herramienta para encontrar extremos relativos: primero debemos encontrar los puntos críticos y luego chequeamos cual de estos es un máximo o mínimo relativo.

Ejemplo 5.3. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Solución. Tenemos que $f_x(x, y) = 3x^2$ y $f_x(x, y) = 3y^2$, luego $(0, 0)$ es el único punto crítico. ■

¿Cómo determinamos si un punto crítico es un extremo relativo?

A diferencia del caso de una variable donde teníamos el test de la primera derivada, cuando trabajamos con dos variables dicho test no puede ser aplicado. Sin embargo existe un test de la segunda derivada

Teorema 5.2 (Test de la segunda derivada para extremos relativos)**.** *Dada una función dos veces diferenciable, definimos la función*

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 .$$

Para encontrar los extremos relativos seguimos el siguiente procedimiento:

1. *Encontramos los puntos críticos de la función.*

2. *Para cada punto crítico (a, b), evaluamos $D(a, b)$.*

3. *Si $D(a, b) > 0$, entonces evaluamos $f_{xx}(a, b)$:*

    - *Si $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces (a, b) es un mínimo relativo.*
    - *Si $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces (a, b) es un máximo relativo.*
    - *Si $f_{xx}(a, b) = 0$, entonces no podemos decir nada acerca de (a, b).*

4. *Si $D(a, b) < 0$, entonces (a, b) es un* punto silla*. Este tipo de puntos* no es un extremo relativo*.*

5. *Si $D(a, b) = 0$, entonces no podemos decir nada acerca de (a, b).*

El teorema anterior se puede resumir con el siguiente cuadro: Sea (a, b) un punto crítico para f, entonces

signo de $D(a, b)$	signo de $f_{xx}(a, b)$	(a, b) es un
$+$	$+$	mínimo relativo
$+$	$-$	máximo relativo
$-$		punto silla

Ejemplo 5.4. Encuentre los extremos relativos y puntos sillas de las siguiente funciones:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

    Solución. Ejemplo resuelto en clases.

2. $f(x, y) = y^2 - x^2$ (Ver figura 5.3).

    Solución. En este caso $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, luego $(0, 0)$ es el único punto crítico. Si calculamos $D(x, y)$, obtenemos que

    $$D(x, y) = -4,$$

    luego $D(0, 0) = -4 < 0$, es decir $(0, 0)$ es un punto silla.

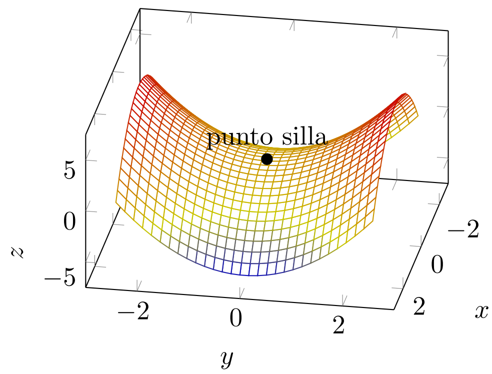


Figura 5.3: La función $f(x, y) = y^2 - x^2$ tiene un punto silla en $(0, 0)$.

3. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 6xy$.

   Solución. Ejemplo resuelto en clases.

4. $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$.

   Solución. Encontramos que $f_x(x, y) = 12 - 3x^2$ y $f_y(x, y) = -8y$, de donde deducimos que hay dos puntos críticos: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$. Para determinar el tipo de punto crítico, calculamos

$$D(x, y) = 48x,$$

   de donde $D(2, 0) = 92 > 0$, es decir el punto $(2, 0)$ es un mínimo relativo. Por otra parte $D(-2, 0) = -92 < 0$, es decir $(-2, 0)$ es un punto silla.

5. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

   Solución. Notar que $f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3$.

6. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$

7. $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

8. $f(x, y) = x^2y^2$

9. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$

10. $f(x, y) = x^4 + (x - y)^4$

11. $f(x, y) = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$

    Solución. Buscamos los puntos críticos

$$f_x(x, y) = xe^{1-x^2-y^2} \left(-3 + 2x^2 - 2y^2\right) = 0$$
$$f_y(x, y) = ye^{1-x^2-y^2} \left(1 + 2x^2 - 2y^2\right) = 0$$

    De donde se obtienen los puntos críticos $(0, 0), (0, \sqrt{\frac{1}{2}}), (0, -\sqrt{\frac{1}{2}}), (\sqrt{\frac{3}{2}}, 0), (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$. Si aplicamos el test de la segunda derivada tenemos que

$$f_{xx}(x, y) = e^{1-x^2-y^2} \left(-4x^4 + 4x^2y^2 + 12x^2 - 2y^2 - 3\right)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{1-x^2-y^2}\left(4y^4 - 4x^2y^2 - 8y^2 + 2x^2 + 1\right)$$
$$f_{xy}(x,y) = xye^{1-x^2-y^2}\left(-4x^2 + 4y^2 + 2\right)$$

Así

$$D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} -3e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

de donde $d(0,0) = -3e^2 < 0$ así que $(0,0)$ es un punto silla.

Para $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0)$ se tiene que

$$D^2f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0) = \begin{bmatrix} 6e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 4e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

de donde $d(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0) = 24e > 0$, y como $f_{xx}(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0) = 6e^{-\frac{1}{2}} > 0$ concluimos que $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0)$ son mínimos locales.

Y para $(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2}})$ se tiene que

$$D^2f(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} -4e^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2e^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

de donde $d(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = 8e^{\frac{1}{2}} > 0$, y como $f_{xx}(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = -4e^{\frac{1}{2}} < 0$ concluimos que $(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2}})$ son máximos locales.

12. $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^3y + 5$
13. $f(x,y) = y^3 + x^2 + 2xy + 3y + 3x + 10$

Observación 5.1. Algunos se preguntarán: ¿Qué pasa con los extremos absolutos?. La respuesta puede ser bastante complicada, sin embargo en este curso asumiremos siempre que si es que la función de dos variables tiene *un único* extremo relativo, este debe ser absoluto, es decir, si encontramos un único mínimo relativo, este deber ser el mínimo absoluto de la función; así también, si encontramos un único máximo relativo, este debe ser el máximo absoluto de la función.

Ejercicio 5.1. Dada la función $f(x,y)$, encuentre los puntos críticos y clasifíquelos como máximos relativos, mínimos relativos o puntos silla.

1. $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$.
2. $f(x,y) = xy$.
3. $f(x,y) = \dfrac{16}{x} + \dfrac{6}{y} + x^2 - 3y^2$.
4. $f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$.
5. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$.
6. $f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$.

5.2. Optimización aplicada

A continuación veremos diversas aplicaciones. En primer lugar, volvamos al ejemplo de la piscina (Ejemplo (O)). Teníamos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } S(x,y) = \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x} + xy, \\ \text{sujeto a que } x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{O}$$

Para ello sigamos el procedimiento dado anteriormente

1. Primer encontramos los puntos críticos: Tenemos que $S_x(x,y) = -\dfrac{8}{x^2} + y$, y $S_y(x,y) = -\dfrac{8}{y^2} + x$. Si igualamos ambas cantidades a 0, encontramos que

   $$y = \frac{8}{x^2} \quad \text{y} \quad x = \frac{8}{y^2}.$$

   Si reemplazamos el valor de y en la ecuación para x obtenemos que

   $$x = \frac{8}{\left(\frac{8}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{8},$$

   O equivalentemente $x^4 - 8x = 0$, de donde obtenemos que $x = 0$ o $x = 2$. Pero $x = 0$ no es un valor válido para la función, es decir $x = 2$ es el único valor relevante. Luego si reemplazamos $x = 2$ en la ecuación para y, obtenemos que $y = 2$.

   Es decir, el punto $(2,2)$ es el único punto crítico para la función.

2. Ahora necesitamos evaluar $D(2,2) = S_{xx}(2,2) \cdot S_{yy}(2,2) - (S_{xy}(2,2))^2$, por lo que necesitamos calcular las derivadas de segundo orden.

   $$S_{xx}(x,y) = \frac{16}{x^3}, \quad S_{yy}(x,y) = \frac{16}{y^3}, \quad S_{xy} = 1,$$

   por lo que

   $$D(2,2) = \frac{16}{2^3} \cdot \frac{16}{2^3} - 1^2 = 3 > 0.$$

   Y como $S_{xx}(2,2) = 2 > 0$, concluimos que $(2,2)$ es un mínimo relativo, pero como es el único, es el mínimo absoluto para S.

Finalmente concluimos que las dimensiones de la piscina deben ser de $2\ m. \times 2\ m. \times 1\ m.$ (Recordar que $z = \dfrac{4}{xy}$). ■

Ejemplo 5.5. Se quiere construir una caja rectangular de 32 cm^3, para ello se utilizan 3 materiales distintos: El material para los costados de la caja cuesta \$1.000 pesos por cm^2, el material para la base cuesta \$3.000 pesos por cm^2, y el material para la tapa cuesta \$5.000 pesos por cm^2. Determine las dimensiones de la caja mas barata.

Solución. Para resolver este problema es conveniente hacer un dibujo (Ver figura 5.4). Tenemos que el costo de la caja se puede escribir como

$$C(x,y,z) = (\text{costo de los lados}) + (\text{costo de la base}) + (\text{costo de la tapa})$$

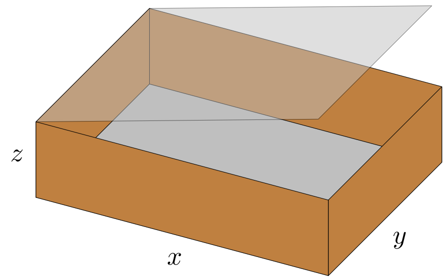


Figura 5.4: Caja con tapa y base.

$$= (2xz + 2zy) \cdot 1 + xy \cdot 3 + xy \cdot 5$$
$$= 2xz + 2zy + 8xy \text{ miles de pesos}$$

Por otra parte tenemos que el volumen de la caja debe ser de 32 cm^3, es decir $xyz = 32$, de donde $z = \dfrac{32}{xy}$. Luego nuestro problema es minimizar

$$C(x, y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + 8xy.$$

Procedemos como siempre:

1. Puntos críticos: $C_x(x, y) = -\dfrac{64}{x^2} + 8y$, $C_y(x, y) = -\dfrac{64}{y^2} + 8x$. De donde el único punto crítico es el punto $(2, 2)$.
2. Evaluamos $D(2, 2)$. $C_{xx}(x, y) = \dfrac{2 \cdot 64}{x^3}$, $C_{yy}(x, y) = \dfrac{2 \cdot 64}{y^3}$, $C_{xy}(x, y) = 8$, de donde
$$D(2, 2) = 16^2 - 8^2 = 3 \cdot 8^2 > 0.$$
Ademas, $C_{xx}(2, 2) = \dfrac{128}{2^3} > 0$, es decir, nuestro único punto crítico es un mínimo.

De donde concluimos que la caja debe ser de dimensiones 2 *cm.* $\times$ 2 *cm.* $\times$ 8 *cm.*. ■

Ejemplo 5.6. Una tienda de abarrotes vende dos marcas bebidas de fantasía de tres litros. Si el precio de venta de una de las marcas es x y el de la otra es y, el dueño del almacén estima que la ganancia por ventas estará dada por la función

$$G(x, y) = (x - 2)(40 - 50x + 40y) + (y - 2)(20 + 60x - 70y) \text{ miles de pesos.}$$

Encuentre los precios x e y que maximizan la ganancia.

Solución. Tal como antes, seguimos el procedimiento:

1. Puntos críticos: $G_x(x, y) = 20 - 100x + 100y$, $G_y(x, y) = 80 + 100x - 140y$. Si igualamos ambas cantidades a 0 obtenemos el siguiente sistema:
$$5x - 5y = 1$$
$$5x - 7y = -4$$
De donde obtenemos que $x = \frac{27}{10} = 2{,}7$ e $y = \frac{5}{2} = 2{,}5$ O sea el punto $\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right)$ es el único punto crítico para G.

2. Evaluamos $D\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right)$: $G_{xx}(x,y) = -100$, $G_{yy}(x,y) = -140$ y $G_{xy}(x,y) = 0$, por lo tanto

$$D\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right) = 14000 > 0.$$

   Finalmente evaluamos $G_{xx}\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right) = -100 < 0$, por lo que nuestro único punto crítico es un máximo.

   Concluimos que para maximizar la ganancia, debemos vender la marca x a
   (2.700 y la marca y a
)2.500.

■

Ejemplo 5.7. El gerente de una compañía distribuidora de alimentos determina que sus tres clientes mas importantes se pueden ubicar en el mapa como lo muestra la figura 5.5:

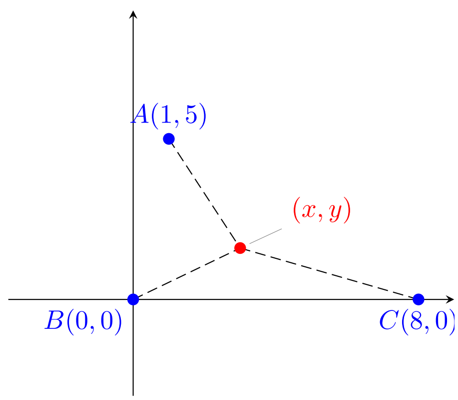


Figura 5.5: Diagrama para el centro de distribución.

¿En qué lugar del mapa debe establecerse el centro de distribución, de modo que se minimice la suma de los cuadrados de las distancias a cada cliente?

Solución. En primer lugar recordamos que la distancia al cuadrado entre dos puntos en el plano dados por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede ser calculada mediante la fórmula

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Con esto, si el centro de distribución se ubica en el punto (x, y), entonces la suma de los cuadrados de las distancias a cada cliente esta dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\text{distancia al cliente A})^2 + (\text{distancia al cliente B})^2 + (\text{distancia al cliente C})^2 \\ &= \left[(x-1)^2 + (y-5)^2\right] + \left[x^2 + y^2\right] + \left[(x-8)^2 + y^2\right]. \end{aligned}$$

1. Puntos críticos: $f_x(x,y) = 6x - 18$, $f_y(x,y) = 6y - 10$. De donde el único punto crítico es el punto $\left(3, \frac{5}{3}\right)$.

2. Evaluamos $D\left(3, \frac{5}{3}\right)$. $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{yy}(x,y) = 6$, $f_{xy} = 0$, por lo tanto

$$D\left(3, \frac{5}{3}\right) = 36 > 0,$$

   además, $f_{xx}\left(3, \frac{5}{3}\right) = 6 > 0$, es decir nuestro único punto crítico es un mínimo.

Concluimos que se debe ubicar el centro de distribución en el punto $\left(3, \frac{5}{3}\right)$. ■

Ejercicio 5.2. Un almacén vende dos marcas de comida para perros. Si cobra x pesos por una marca e y pesos por la otra, el dueño estima que ganará

$$G(x, y) = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300.$$

¿Cuáles deben ser los precios de las comidas, de modo que se maximicen las ganancias?

Ejercicio 5.3. Se desea construir una antena para celulares para comunicar a cuatro comunas. Si las comunas están ubicadas en los puntos $(-5, 0), (1, 7), (9, 0)$ y $(0, -8)$, determine el lugar (x, y) donde se debe ubicar la antena, de modo que se minimice la suma de las distancias al cuadrado desde la antena hacia cada comuna.

Ejercicio 5.4. El gerente de una compañía de transporte tiene 3 clientes que se pueden ubicar en un mapa en las coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (2, 7)$, y $C = (8, 1)$ (las coordenadas están en kilómetros). De acuerdo a sus cálculos, el costo de traslado hacia A es de
(200 por kilómetro recorrido, mientras que el costo de traslado a B es de
)150 por kilómetro, y a C es de $230 por kilómetro.

¿En qué lugar del mapa debe establecerse su centro de operaciones de modo que se minimicen sus costos de traslado?

Ejercicio 5.5. Se quiere construir una caja rectangular, sin tapa, de 18 cm^3, para ello se utilizan 2 materiales distintos: El material para los costados de la caja cuesta $3.000 pesos por cm^2, el material para la base cuesta $4.000 pesos por cm^2. Determine las dimensiones de la caja mas barata.

Ejercicio 5.6. Una empresa produce 2 tipos de fertilizante: fertilizantes A y B. Si se producen x unidades de A e y unidades de B, se determina que la ganancia es de

$$G(x, y) = x(100 - x) + y(100 - y) - (x^2 + xy + y^2).$$

¿Cuántas unidades de cada fertilizante se deben producir para maximizar la ganancia?

5.3. Optimización con restricciones

Como hemos visto, en diversos problemas aplicados es usual que tengamos restricciones sobre las variables. Por ejemplo, recordemos el Ejemplo 1.20 del granjero que quería construir una cerca para sus caballos (Figura 5.6):

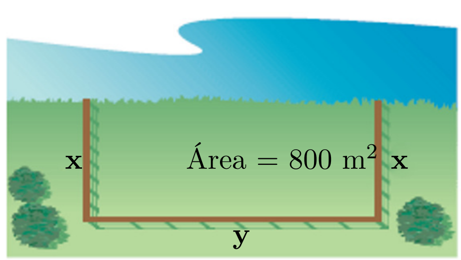


Figura 5.6: Corral para caballos.

En dicho problema, habíamos llegado a la conclusión de que debíamos resolver el siguiente ejercicio de optimización:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x+y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x\cdot y = 800, \\ \qquad\qquad x>0 \text{ e } y>0. \end{cases} \tag{P}$$

La manera en que resolvimos dicho ejercicio fue utilizando métodos de una variable (usamos la restricción $x \cdot y = 800$ para despejar y y dejar todo en términos de x), sin embargo hay situaciones en las que despejar una de las variables es imposible (por ejemplo cuando la restricción es algo como $\operatorname{sen}(xy) + e^{x+y} = 1$). ¿Cómo enfrentamos dichos casos?

5.3.1. Multiplicadores de Lagrange

Una de las técnicas mas útiles en la optimización con restricciones es el llamado *método de los multiplicadores de Lagrange*, donde se introduce una tercera variable (un multiplicador) que nos permite resolver el problema de optimización con restricciones sin la necesidad de despejar una de las variables en la restricción.

El método consiste en lo siguiente:

1. Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{cases} \text{optimizar la función } f(x,y), \\ \qquad \text{sujeto a que } g(x,y)=k. \end{cases} \tag{L}$$

2. Para resolver este problema buscamos los valores $x,\ y$ y λ tales que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y), \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), \\ g(x,y) &= k. \end{aligned}$$

   Esto nos da una lista de valores $x = a,\ y = b$ y λ's (al igual que con los puntos críticos, pueden haber más de uno).

3. Luego evaluamos la función f en cada uno de los puntos (a, b) obtenidos en el paso anterior.

4. Finalmente el valor máximo (o mínimo) del problema L será el mayor (o menor)[3] valor obtenido en el paso 3.

Para ilustrar el método, resolvamos el ejemplo 1.20 usando multiplicadores de Lagrange. Queremos resolver

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x+y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x\cdot y = 800. \end{cases} \tag{P}$$

Luego para este caso en particular tenemos que $f(x,y) = 2x+y$, $g(x,y) = xy$ y $k = 800$. Luego $f_x(x,y) = 2$, $f_y(x,y) = 1$, $g_x(x,y) = y$ y $g_y(x,y) = x$. El método nos dice que debemos resolver el sistema de 3×3 dado por

$$2 = f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) = \lambda y,$$

[3] En estricto rigor esto no es completamente cierto, sin embargo para efectos de este curso, solo nos preocuparemos de esta situación.

$$\begin{aligned} 1 &= f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) = \lambda x, \\ xy &= g(x,y) = k = 800. \end{aligned}$$

De donde deducimos que $x = \pm 20$, $y = \pm 40$ y, aunque no lo utilizaremos, $\lambda = \pm\dfrac{1}{20}$. Sin embargo estamos interesados en el caso de que $x,\ y > 0$, luego solo nos preocupamos del punto $(20, 40)$. En este caso obtenemos que el menor valor se obtiene cuando $x = 20$ e $y = 40$, que es exactamente la medida que obtuvimos usando técnicas de una variable. ■

Ejemplo 5.8. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x,y) = xy$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 8$.

Solución. En este caso tenemos que $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x^2 + y^2$ y $k = 8$. De donde nuestro sistema de 3×3 queda

$$\begin{aligned} y &= f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) = \lambda 2x, \\ x &= f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 &= g(x,y) = k = 800. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $2\lambda = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$, es decir $x^2 = y^2$. Luego $x^2 = 4 = y^2$, o sea $x = \pm 2 = y$. Por lo tanto tenemos cuatro posibles puntos: $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,-2)$ y $(2,2)$.

Para concluir, debemos evaluar $f(x,y)$ en todos estos puntos

- $f(-2,-2) = 4$,
- $f(-2,2) = -4$,
- $f(2,-2) = -4$, y
- $f(2,2) = 4$.

De donde concluimos que el valor máximo es 4 y se alcanza en $(-2,-2)$ y $(2,2)$; y el valor mínimo es -4 y se alcanza en $(-2,2)$ y $(2,-2)$. ■

Ejemplo 5.9. Encuentre el mínimo de la función $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ sujeta a la restricción $x + y = 15$.

Solución. En este caso obtenemos que $x = 8$, $y = 7$, $\lambda = 9$, y $f(8,7) = -18$. ■

Ejemplo 5.10. Maximice la función $U(x,y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$ sujeta a la restricción $20x + 30y = 600$.

Solución. Para resolver este problema planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 6x^{-0,4}y^{0,4} &= 20\lambda, \\ 4x^{0,6}y^{-0,6} &= 30\lambda, \\ 20x + 30y &= 600. \end{aligned}$$

Si despejamos λ en las primeras 2 ecuaciones obtenemos que

$$\lambda = 3\left(\frac{y}{x}\right)^{0,4} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{0,6},$$

de donde deducimos que $9y = 4x$. Si reemplazamos esta relación en la tercera ecuación obtenemos que $5 \cdot 9y + 30y = 600$, es decir $75y = 600$, lo que nos da $y = 8$. Volviendo a la relación entre x e y, obtenemos que $x = 18$.

Luego la función alcanza su máximo en el punto $(18,8)$, y su valor máximo es $U(18,8) \approx 130{,}14$. ■

Ejercicio 5.7. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $x + y = 1$.

Ejercicio 5.8. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $xy = 1$.

Ejercicio 5.9. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 5.10. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 5.11. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = e^{xy}$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 5.12. Una fábrica produce dos tipos de televisores: LED y LCD. El gerente estima que cuando x cientos de LEDs e y cientos de LCDs se producen, entonces la ganancia anual será de

$$G(x, y) = -0{,}3x^2 - 0{,}5xy - 0{,}4y^2 + 85x + 125y - 2500 \quad \text{millones de pesos.}$$

Si la empresa puede producir 30.000 televisores en total, ¿cuántos LEDs y LCDs se deben producir para maximizar la ganancia?

Ejercicio 5.13. Se desea construir una caja con base cuadrada tal que el contorno más el alto debe ser exactamente 108 cms. (Ver figura 5.7) ¿Cuál es la caja con tales características que tiene el volumen mas grande?

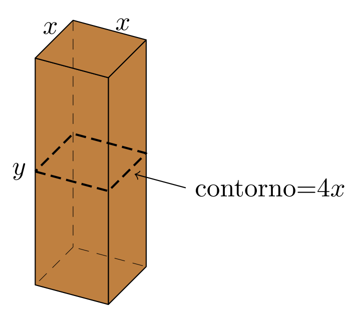


Figura 5.7: Caja para el ejercicio 5.13.

5.4. Programación lineal

Como vimos en la última parte del capítulo anterior, en cierto tipo de problemas queremos optimizar una función bajo ciertas restricciones. La programación lineal es un caso bastante similar al anterior, específicamente aplica a los modelos en los que la función a optimizar f es lineal y la restricción g es también *lineal*. La gran diferencia será que para estos problemas, tendremos mas de una restricción lineal, las que además pueden ser desigualdades, como por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{maximizar la función } 4x + 7y, \\ \qquad\text{sujeto a que } 3x + y \leq 10, \\ \qquad\qquad 5x - 4y \leq 1, \\ \qquad\qquad x,\ y \geq 0, \end{cases} \tag{PL}$$

Este tipo de problemas suele aparecer con frecuencia en aplicaciones a la economía, transporte y ciencias sociales, y en este curso nos enfocaremos al caso en que dichos modelos cuentan con solo con dos variables independientes. En tales cases desarrollaremos un método bastante simple que sirve para resolver dichos problemas. Asimismo, nos interiorizaremos en como plantear problemas aplicados para obtener un problema de programación lineal.

5.5. Solución gráfica de problemas de programación lineal en dos variables

El procedimiento de solución gráfica comprende dos pasos:

1. Determinar el espacio de soluciones que define todas las soluciones factibles del modelo.

2. Determinar la solución óptima entre todos los puntos factibles del espacio de soluciones usando el método gráfico.

Usaremos el ejemplo (PL) para ilustrar como utilizar este procedimiento.

Solución. En primer lugar graficamos el conjunto de soluciones factibles (que definimos como el conjunto de los (x, y) que satisfacen todas las restricciones del problema) usando las ecuaciones de las restricciones. Para mas detalles de como hacer esto, Ver los apuntes tomados en clases. El conjunto resultante se puede ver en la figura 5.8.

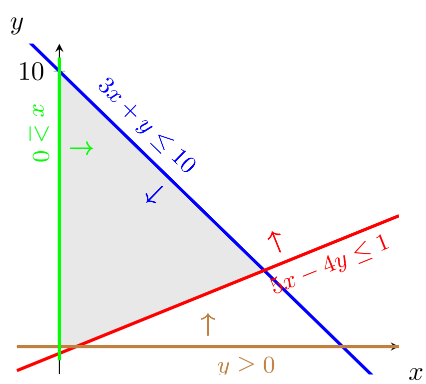


Figura 5.8: Conjunto de soluciones factibles para el ejemplo PL.

Una vez hecho esto, graficamos la recta $z = 4x + 7y$ para dos valores crecientes (por que queremos maximizar) de z, y observamos la dirección en la que se "mueven" las rectas (Ver figura 5.9).

Finalmente determinamos el punto en el conjunto de soluciones factibles que resulta de mover lo mas posible nuestra recta $z = 4x + 7y$ en la dirección en la que z crece (Figura 5.10). De acuerdo a la figura, el punto para el cual se hace mas grande z es el punto $(0, 10)$. La conclusión es que la función $z = 4x + 7y$ se maximiza en el punto $(x, y) = (0, 10)$. ■

A continuación veremos como aplicar el método para problemas de minimización

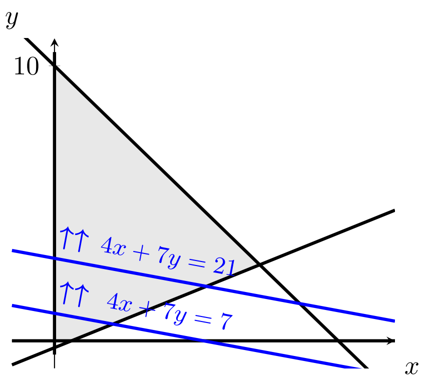


Figura 5.9: Grafico de $z = 4x + 7y$ para dos valores arbitrarios de z: $z = 7$ y $z = 21$. Notar que las rectas SIEMPRE son paralelas.

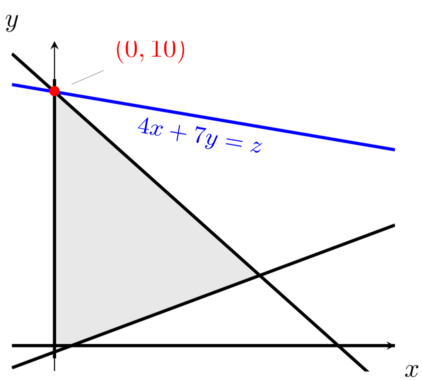


Figura 5.10: "Movemos" la recta $z = 4x + 7y$ lo mas posible sin salirnos del conjunto factible.

Ejemplo 5.11. Resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 3x + 5y, \\ \qquad\qquad \text{sujeto a que } x + 6y \geq 3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 4x + y \geq 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \leq 4, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y \leq 2. \end{cases}$$

Solución. Ejemplo resuelto en clases. La acotación importante es que por ser un problema de minimización debemos determinar la dirección en la que decrece $z = 3x + 5y$ y "movernos" lo mas posible en dicha dirección.

En clases llamamos a la solución el punto A, y por falta de tiempo no di las coordenadas. La respuesta es $A(x, y) = \left(\frac{3}{23}, \frac{11}{23}\right)$. ■

Ejercicio 5.14. Resuelva los siguientes problemas de programación lineal usando el método gráfico. En los problemas que se pide optimizar, se deben encontrar tanto el máximo como el mínimo.

1. $\begin{cases} \text{max. } 5x+6y, \\ \quad \text{s.a. } x+y \le 4, \\ \qquad x+2y \le 6, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{max. } 2x+3y, \\ \quad \text{s.a. } 3x+2y \le 6, \\ \qquad -x+y \le 0, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{max. } 6x+3y, \\ \quad \text{s.a. } 3x+2y \le 6, \\ \qquad x-y \le 0, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{max. } x+y, \\ \quad \text{s.a. } -x+y \le 0, \\ \qquad 3x-y \le 3, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \text{max. } 2x+y, \\ \quad \text{s.a. } y-2x \le 0, \\ \qquad 2y-x \ge 0, \\ \qquad x+y \le 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \text{max. } 2y+x, \\ \quad \text{s.a. } y-2x \le 0, \\ \qquad 2y-x \ge 0, \\ \qquad x+y \le 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \text{optimizar } y-x, \\ \quad \text{s.a. } y-2x \le 0, \\ \qquad 2y-x \ge 0, \\ \qquad x+y \le 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \text{optimizar } x+y, \\ \quad \text{s.a. } x+y \ge -3, \\ \qquad 3x-y \le 3, \\ \qquad 3y-2x \le 6, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \text{optimizar } y-x, \\ \quad \text{s.a. } x+y \ge -3, \\ \qquad 3x-y \le 3, \\ \qquad 3y-2x \le 6, \\ \qquad x,\ y \ge 0. \end{cases}$

5.6. Modelos de programación lineal en dos variables

En esta sección veremos que tipo de problemas se puede modelar usando técnicas de programación lineal. Básicamente , un modelo de programación lineal tiene tres componentes:

1. Las variables que se tratan de determinar.

2. El objetivo (la meta) que se trata de optimizar.

3. Las restricciones que se deben satisfacer.

Por lo que en cada problema debemos ser capaces de identificar dichos componentes.

Ejemplo 5.12. Una tienda vende dos clases de gaseosas: la gaseosa A y la gaseosa B que es mas barata. El margen de utilidad aproximado de A es \$5 por lata, y la de B es \$7 por lata. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas diarias. Se estima que se venden al menos 100 latas de A diarias, y que B se vende a lo menos el doble que A. ¿Cuántas latas diarias de cada marca se deben tener en stock para maximizar la utilidad?

Solución. Ejemplo resuelto en clases. En resumen el problema era resolver

$$\begin{cases} \text{max. } 5x + 7y, \\ \quad \text{s.a. } x + y \leq 500, \\ \qquad\quad x \geq 100, \\ \qquad\quad y \geq 2x, \\ \qquad\quad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: latas de A, e y: latas de B. La respuesta es 100 latas de A, y 400 latas de B.

Ejemplo 5.13. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 asientos y 10 de 50 asientos, pero solo dispone de 9 conductores. Contratar de un bus grande cuesta \$800.000 y uno pequeño cuesta \$600.000. Calcular cuántos buses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela.

Solución. Ejemplo resuelto en clases. En resumen el problema se puede escribir como (quizás en clases intercambié los nombres de las variables)

$$\begin{cases} \text{min. } 600x + 800y \quad \text{(miles de pesos)}, \\ \quad \text{s.a. } 40x + 50y \geq 400, \\ \qquad\quad x + y \leq 9, \\ \qquad\quad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: buses de 40 pasajeros, e y: buses de 50 pasajeros. La respuesta es 5 buses de 40 pasajeros y 4 buses de 50 pasajeros.

Ejemplo 5.14. Se contrata a una empresa para que reciba 60.000 kg. de tomates maduros a \$70 por kilo, con los cuales produce jugo de tomate y salsa de tomate, ambos enlatados, los que se empacan en cajas de 24 latas. En una lata de jugo se usa 1 kg. de tomates frescos, y en una de salsa $\frac{1}{3}$ kg. La demanda de los productos en el mercado se limita a 2.000 cajas de jugo y 6.000 cajas de salsa (cualquier excedente se perderá). La ganancia al por mayor por caja de jugo y de salsa es de \$1.800 y \$900, respectivamente. Deduzca un programa óptimo de producción para la empresa.

Solución. Planteamiento del problema resuelto en clases. En resumen teníamos que

$$\begin{cases} \text{max. } 18x + 9y \quad \text{(miles de pesos)}, \\ \quad \text{s.a. } x \leq 2000, \\ \qquad\quad y \leq 6000, \\ \qquad\quad 24x + 8y \leq 60000, \\ \qquad\quad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: cajas de jugo de tomate (1 caja jugo = 24 kilos tomate), e y: cajas de salsa de tomate (1 caja salsa = 8 kilos tomate). El conjunto de soluciones factibles se puede graficar como en la figura 5.11. Notar que aquí lo hice sin dividir por mil en el gráfico, pero la figura queda igual. La única diferencia es que todo está en sus valores reales.

Luego graficamos las rectas $z = 18x + 9y$ para valores **crecientes** de z (Figura 5.12) y determinamos el óptimo.

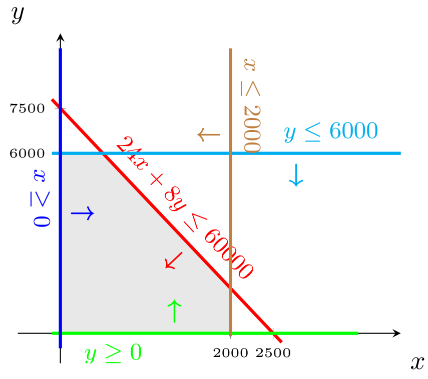


Figura 5.11: Conjunto de soluciones factibles para el Ejemplo 5.14.

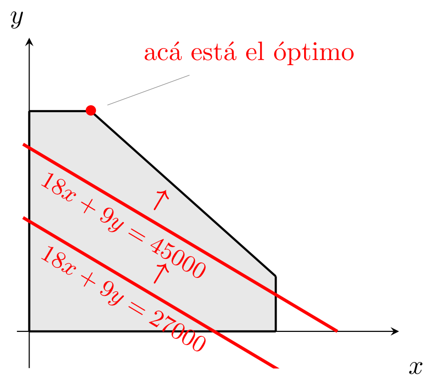


Figura 5.12: Encontrando el óptimo para el ejemplo 5.14.

Posteriormente el óptimo se encuentra en la intersección de las rectas: $y = 6000$ y $24x + 8y = 60000$, que nos da como respuesta: $x = 500,\ y = 6000$, es decir, se deben vender 500 cajas de tomate en jugo y 6.000 cajas de salsa de tomates, lo que nos dará una ganancia de 18·500+9·6.000=63.000 miles de pesos, o sea 63 millones de pesos.

A continuación presentamos un ejemplo en el que el conjunto factible es un poco mas complicado.

Ejemplo 5.15 . Una fábrica produce pinturas para interiores y exteriores utilizando dos materias primas: M_1 y M_2. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Pinturas para exteriores (ton.)	Pinturas para interiores (ton.)	Disponibilidad diaria (ton.)
Materia prima M_1 (ton.)	6	4	24
Materia prima M_2 (ton.)	1	2	6
Utilidad diaria (miles de U$ por ton.)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores. También, que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas. La fábrica desea determinar la cantidad de cada tipo de pintura que maximiza la utilidad diaria total.

Solución. Primero identificamos las variables pertinentes:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores,} \\ y &: \text{ Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores.} \end{aligned}$$

Para formar la función objetivo, la empresa desea aumentar sus utilidades todo lo posible. Si z representa la utilidad diaria total, el objetivo de la empresa se expresa como:

$$\text{Maximizar } z = 5x + 4y \quad \text{(miles de dólares)}$$

A continuación encontramos las restricciones que limitan el uso de las materias primas y la demanda. Las restricciones en materias primas se expresan como sigue:

$$\text{(Uso de materia prima para ambas pintuas)} \leq \text{(Disponibilidad de materia prima),}$$

que según los datos del problema, ésto se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \text{Uso de la materia prima } M_1 &= 6x + 4y, \\ \text{Uso de la materia prima } M_2 &= 1x + 2y. \end{aligned}$$

Dado que el uso de las materias primas está limitado por 24 y 6 respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 24, \\ x + 2y &\leq 6. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos restricciones dadas por la demanda. En primer lugar *demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores*, o en términos de nuestras variables: $y \leq 1 + x$; en segundo lugar que la demanda *máxima* diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas, o sea $y \leq 2$

Finalmente observamos que hay una restricción implícita, esta es que las cantidades x e y deben ser mayores que 0, pues ambas son cantidades físicas.

Resumiendo, nuestro problema es el siguiente

$$\begin{cases} \text{maximizar la función } 5x + 4y, \\ \qquad\qquad \text{sujeto a que } 6x + 4y \leq 24, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x + 2y \leq 6, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y - x \leq 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y \leq 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x,\ y > 0. \end{cases}$$

A continuación determinamos el conjunto factible mediante un gráfico (Ver figura 5.13).

Una vez hecho esto, graficamos la función utilidad $z = 5x + 4y$ para valores **crecientes** de z y determinamos el óptimo (ver Figura 5.14). La solución óptima se encuentra en el punto rojo. Las coordenadas de dicho punto se encuentran resolviendo la intersección de las rectas respectivas, es decir, de las rectas $6x + 4y = 24$ y $x + 2y = 6$. Esto nos da como solución el punto $x = 3$ e $y = 1{,}5$, en cuyo caso $z = 21$.

Esto quiere decir que debemos vender 3 toneladas de pintura para exteriores y 1,5 toneladas de pintura para interiores, lo que nos dará una utilidad de 21 mil dólares. ■

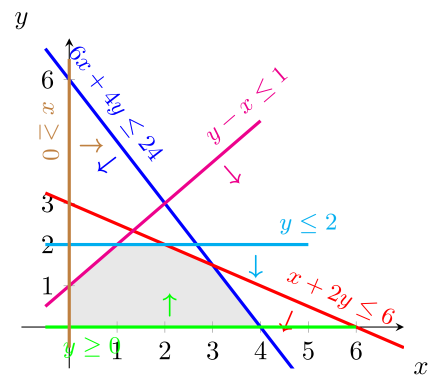


Figura 5.13: Conjunto de soluciones factibles para el ejemplo 5.15.

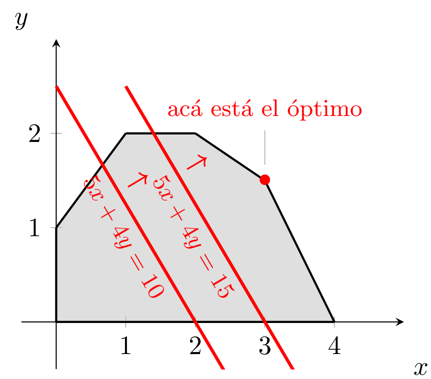


Figura 5.14: Determinamos el óptimo para el ejemplo 5.15.

Ejercicio 5.15. Una empresa fabrica dos tipos de productos con un costo de producción por unidad de \$2.000. y \$3.000 respectivamente. Para hacer que el negocio sea rentable se ha determinado que se debe fabricar a lo menos 10 kg. de producto al día. Además se determina que por razones logísticas no se pueden producir mas de 15 kg. del primer producto y 20 kg. del segundo. Establezca el modelo que minimiza los costos y encuentre la solución óptima.

Ejercicio 5.16. Juan acaba de entrar a la universidad y desea repartir su tiempo disponible, aproximadamente de 10 horas por día, entre estudios y entretención. Para ello estima que entretenerse le es doblemente placentero que estudiar. También desea estudiar al menos un tiempo igual al que pasa entreteniéndose. Sin embargo, se da cuenta que para cumplir con sus obligaciones académicas, no puede pasar mas de 4 horas diarias en entretención. ¿Cómo debe repartir Juan su tiempo, para maximizar su placer?

Ejercicio 5.17. Una fábrica produce dos clases de motores eléctricos, cada uno en una línea de producción aparte. Las capacidades diarias de las dos líneas son de 600 y de 750 motores respectivamente. El motor tipo 1 usa 10 unidades de cierto componente electrónico, y el motor tipo 2 usa 8 unidades. El proveedor de ese componente puede suministrar 8.000 piezas por día. Las utilidades son \$60 mil pesos por cada motor de tipo 1 y \$40 mil pesos por cada uno de tipo 2. Determine la mezcla óptima de producción diaria.

Ejercicio 5.18. Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100 kg. de almendras y 85 kg. de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg. de chocolate, 1 kg. de almendras y 1 kg. de frutas; la de tipo B contiene 2 kg. de chocolate, 1,5 kg. de almendras y 1 kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son \$13.000 y \$13.500 pesos, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta

Ejercicio 5.19. Una pastelería produce dos productos: pasteles y galletas. Las galletas requieren 200 gramos de azúcar y 100 gramos de harina. Los pasteles requieren 200 gramos de harina y 100 gramos de azúcar. Se ganan \$100 por cada galleta y \$80 por cada pastel. Si se disponen de 5 kilos de harina y 7 kilos de azúcar. Encuentre la producción que maximiza las ganancias.

Ejercicio 5.20. Una fábrica de zapatos de cuero produce dos líneas: modelos de lujo y modelos regulares. Cada tipo modelo requiere un pie cuadrado de cuero. Un modelo regular necesita 1 hora de mano de obra, mientras que un modelo de lujo requiere 2 horas de mano de obra. Cada semana se dispone de 40 pies cuadrados de cuero y de 60 horas de mano de obra. Si cada zapato regular genera una utilidad de \$30 mil y cada modelo de lujo representa una utilidad de \$40 mil, encuentre la producción que maximiza la utilidad de la fábrica.

Ejercicio 5.21. Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m. de tejido de algodón y 1000 m. de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m. de algodón y 2 m. de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan 1,5 m. de algodón y 1 m. de poliéster. El precio del pantalón se fija en \$50.000 y el de la chaqueta en \$40.000. ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

Ejercicio 5.22. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámpara L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para L_1 y de 10 minutos para L_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de \$15.000 y \$10.000 para L_1 y L_2 respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

Ejercicio 5.23. En una granja de pollos se da una dieta para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de 1 unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de 5 unidades de A y 1 de B. El precio del tipo X es de \$10.000 y del tipo Y es de \$30.000. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Ejercicio 5.24. Al comienzo del año escolar se lanzan diversas ofertas de útiles escolares. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 lápices para la oferta, empaquetándolos de dos formas distintas; en el primer paquete tendrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 lápices; en tanto que el segundo tendrá 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 lápices. Los precios de cada paquete serán \$650 y \$700, respectivamente. ¿Cuántos paquetes conviene vender obtener el máximo beneficio?

Ejercicio 5.25. Una fábrica de vino produce 2 tipos de vino: tinto y blanco. Cada botella de un litro de vino tinto produce una ganancia de \$500 y cada botella de un litro de vino blanco produce una ganancia de \$400. Se estima que para producir 1 litro de vino tinto se necesita 1 kilo de uva y para producir 1 litro de vino blanco se necesita 0.75 kilos de uva. Además, para satisfacer la demanda se deben producir un mínimo de 20 litros de vino blanco. Si la fábrica cuenta con 100 kilos de uva, calcule la producción de cada tipo de vino que maximiza la ganancia.