Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Hernán Castro Z.

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca
http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro.
hcastro@inst-mat.utalca.cl.

Template de $\LaTeX\,2_\varepsilon$ creado por Hernán Castro Z..

Edición del 23 de septiembre de 2020

Índice general

Prefacio

Este apunte ha sido confeccionado para el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias dictado en la Universidad de Talca para distintas carreras de ingeniería. El propósito de este escrito es recopilar materias expuestas en diversos libros y organizarlas en la manera presentada en estos cursos por el autor.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos pueden estar incompletos.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Introducción

Definición 1.1 (Ecuación Diferencial)**.** *Una ecuación diferencial (E.D.) es una ecuación que involucra derivadas de una o mas funciones desconocidas de una o mas variables independientes. Dichas ecuaciones se pueden clasificar como:*

- *Ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.): Si hay solo una función desconocida que depende de una sola variable independiente.*
- *Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: Si hay 2 o mas funciones desconocidas que dependen de una sola variable independiente.*
- *Ecuación diferencial parcial (E.D.P.): Si hay solo una función desconocida que depende de 2 o mas variables independientes.*
- *Sistema de ecuaciones diferenciales parciales: Si hay 2 o mas funciones desconocidas que dependen de 2 o mas variables independientes.*

Definición 1.2. *El orden de una E.D. es el orden de la derivada mas alta que aparece en la ecuación*

Ejemplo 1.1*.* 1. $y' = 2x + y$ es una E.D.O de primer orden.

2. $\ddot{x} - 2\dot{x} - 15x = 0$ es una E.D.O. de segundo orden.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es una E.D.P. de segundo orden.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ es un sistema de E.D.O.s de primer orden.

Definición 1.3. *Una EDO lineal es una ecuación que puede ser escrita como*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

donde $a_i(x)$ son funciones conocidas de x para $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Si la ecuación no tiene esta forma, decimos que la EDO es no-lineal.

Las EDOs en general se pueden escribir como

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

donde F es una función de $n+1$ variables.

***Ejemplo 1.2*.** 1. $3y''' + y' - 10y = 90$ es una E.D.O. lineal.

2. $y'' + 3xy + 4y = \cos x$ es una E.D.O. lineal.
3. $y' + (\operatorname{sen} x)y = x$ es una E.D.O. lineal.
4. $y' + y^2 + y = 0$ es una E.D.O. no-lineal.

Definición 1.4. *Una solución de una E.D. es cualquier función $y(x)$ que satisfaga la ecuación. La solución se dice* explícita *si está dada en la forma $y(x) = \dots$. La solución se dice implícita si la solución está dada en la forma* $G(x, y(x)) = 0$.

***Ejemplo 1.3*.** Soluciones explícitas

1. $y(x) = 0$, $y'' - 2y + y = 0$.
2. $y(x) = kxe^x$, $y'' - 2y' + y = 0$ para cualquier constante k.
3. $y(x) = \dfrac{1}{16}x^4$, $y' = x\sqrt{y}$.
4. $y(x) = x + 1$, no es una solución de $y' + y = e^x$.

***Ejemplo 1.4*.** Soluciones implícitas

1. $y^2 - x^3 + 8 = 0$, $y' = \dfrac{x^2}{y}$ si $x > 2$.
2. $x + y + e^{xy} = 0$, $(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0$.
3. $4x^2 - y^2 = k$, $yy' = 4x$.

Definición 1.5. *Definimos el intervalo de definición de una solución de una EDO como el intervalo mas grande donde la solución y todas sus derivadas pertinentes son continuas.*

***Ejemplo 1.5*.** 1. El intervalo de solución para $y(x) = xe^x$, solución de $y'' - 2y + y = 0$, es $(-\infty, \infty)$.

2. El intervalo de solución para $y(x) = \dfrac{1}{16}x^4$, solución de $y' = x\sqrt{y}$, es $(-\infty, \infty)$.
3. El intervalo de solución para $y(x) = \dfrac{1}{x}$, solución de $xy' + y = 0$, es $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$.

1.1.1. Problemas de valor inicial

Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria de orden n, sobre la cual se imponen n condiciones sobre la función incógnita y sus derivadas en cierto valor x_0, es decir

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \\ \qquad\qquad y(x_0) = y_0 \\ \qquad\qquad y'(x_0) = y_1 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad y^{(n)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.1}$$

PVIs de la forma anterior son bastante complicados de resolver, y escapan a lo que se quiere presentar en este apunte. Si estudiaremos una versión mas simple, pero que tiene bastantes aplicaciones: un (PVI) de primer orden, es decir, un problema del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{PVI}$$

donde $f(x, y)$ es una función de 2 variables y (x_0, y_0) es un punto en el plano x-y. El siguiente es un resultado fundamental de la teoría de EDOs ordinarias

Teorema 1.1. *Si la función $f(x,y)$ es continua y diferenciable en un rectángulo R que contiene a (x_0, y_0) y además la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en dicho rectángulo R, entonces la ecuación (PVI) tiene una única solución que está definida en un intervalo de la forma $(x_0 - a, x_0 + b)$ donde $a, b > 0$.*

Este teorema tiene utilidad principalmente para verificar, antes de empezar a resolver una ecuación, que una solución existe; en segundo lugar, sirve para comprobar que una solución encontrada es efectivamente la única solución.

Ejemplo 1.6. Verifiquemos si se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad para los siguientes problemas

1. $y' - y = 0$, $y(0) = 1$.
2. $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$.
3. $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 2$.
4. $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 0$.
5. $xy' = y$, $y(0) = 0$.

1.1.2. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Verifique que las funciones indicadas son soluciones de la EDO.

1. $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}$; $2y' + y = 0$.
2. $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \operatorname{sen}(4x)$; $y'' + 16y = 0$.
3. $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$; $\ddot{y} - 6\dot{y} + 13y = 0$.
4. $y(x) = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$; $y'' + y = \tan x$.
5. $y(t) = 5\tan(5t)$; $\dot{y} = 25 + y^2$.
6. $y(x) = (1 - \operatorname{sen}(x))^{-\frac{1}{2}}$; $2y' = y^3 \cos x$.
7. Verifique las soluciones del ejemplo 1.16.

Ejercicio 1.2. Verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad para el PVI dado

1. $2y' + y = 0$, $y(1) = 1$.
2. $\dot{y} = 25 - y^2$, $y(-1) = 5$.
3. $2y' = y^3 \cos x$, $y(0) = -1$.
4. $y' = xy\ln y$, $y(0) = 1$.
5. $y' = xy\ln y$, $y(0) = 0$.
6. $xy' = \dfrac{1+x}{1-y}$, $y(1) = 1$.
7. $xy' = \dfrac{1+x}{1-y}$, $y(0) = 2$.
8. $xy' = \dfrac{1+x}{1-y}$, $y(1) = 2$.

1.2. EDOs de primer orden

1.2.1. Soluciones por integración directa

Este método aplica para ecuaciones de la forma

$$y' = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función conocida. Para resolver este tipo de ecuaciones simplemente debemos integrar:

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x,$$

donde $\int f$ es la integral indefinida de f.

Ejemplo 1.7. Resolver $y' = \operatorname{sen} x$.

Solución. De acuerdo al método de integración directa, tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \operatorname{sen} x \mathrm{d}x \\ &= -\cos x + C. \end{aligned}$$

Luego $y(x) = -\cos x + C$ es la solución, y su intervalo de definición es $(-\infty, \infty)$. ■

Ejemplo 1.8. Resolver $xy' = 1$.

Solución. Para resolver esta ecuación, primero dividimos por x (de inmediato notamos que x no puede ser 0). Luego

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Luego $y(x) = \ln|x| + C$ es la solución, y su intervalo de definición es $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$. El intervalo que se escoge, dependerá de las *condiciones iniciales* del problema. ■

1.2.2. Ejercicios

Ejercicio 1.3. Resolver las siguientes EDOs usando el método de integración directa:

1. $y' = 5$.
2. $y' = 5x$.
3. $\dot{y} = -e^{3t}$.
4. $y' = (x+1)^2$.
5. $y' = (3x+5)^7$.
6. $\dot{y} = 8t(4t^2+5)^9$.
7. $y' = x^2 e^{x^3+8}$.
8. $y' = \operatorname{sen}(x)$.
9. $y' = \operatorname{sen}(5x)$.
10. $y' = \dfrac{2}{x^2-9}$.
11. $y' = \dfrac{x^2-4x}{x\sqrt{x}}$.
12. $y' = (\ln x)^2$.
13. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

1.2.3. Ecuaciones autónomas

Definición 1.6 (Ecuación autónoma)**.** *Una ecuación autónoma es una ecuación de la forma*

$$y' = g(y),$$

donde $g(y)$ es una función continua.

Para resolver este tipo de ecuaciones, lo que hacemos es "despejar" de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y' &= g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= g(y) \\ \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y &= \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de donde podemos integrar para obtener

$$\int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x = x + C$$

Luego si denotamos $G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$, obtenemos

$$G(y) = x + C.$$

Ejemplo 1.9. Resolver $y' = y^3$.

Solución. Seguimos el método y obtenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y^3 \\ y^{-3}y' &= 1 \\ \int y^{-3}\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x \\ \frac{y^{-2}}{-2} &= x + C, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que hay dos posibles soluciones $y_1(x) = \sqrt{\dfrac{1}{A-2x}}$ e $y_2(x) = -\sqrt{\dfrac{1}{A-2x}}$, donde $A = -2C$ es una constante arbitraria y su intervalo de definición es $\left(-\infty, \frac{A}{2}\right)$. ■

Al observar mas detenidamente el ejemplo anterior, notamos que la función constante $y(x) = 0$ también es una solución de la ecuación, que no obtuvimos con nuestro método. La razón de esto, es que al comenzar el método, dividimos por y^3, donde implícitamente supusimos que $y \neq 0$.

Por lo anterior, es que al resolver ecuaciones autónomas mediante este método, uno debe tener presente que al dividir por $g(y)$, se pueden perder soluciones: Esto ocurre para todas las funciones constantes $y(x) = y_0$, donde $g(y_0) = 0$.

Ejemplo 1.10. Resolver $y' = y^2 - 4$.

Solución. Identificamos la ecuación como autónoma, por lo que tenemos dos soluciones constantes: $y_1(x) = -2$ e $y_2(x) = 2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2-4} &= 1 \\ \int \frac{1}{y^2-4}\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para calcular la integral usamos fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2-4}\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2}\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y+2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \int 1\mathrm{d}x = x + C.$$

Para concluir, hacemos un poco de álgebra para obtener que

$$y(x) = 2\frac{1 + Ae^{4x}}{1 - Ae^{4x}},$$

cuyo intervalo de solución depende del signo de A: Si $A \leq 0$, entonces el intervalo de solución es $(-\infty, \infty)$; y si $A > 0$, entonces el intervalo de solución es $(-\infty, \frac{1}{4}\ln A)$ ó $(\frac{1}{4}\ln A, \infty)$. Observar también que cuando $A = 0$, obtenemos $y(x) = 2$, solución que inicialmente habíamos encontrado, sin embargo, la función constante $y(x) = -2$ no es parte de la familia[1]. ■

Ejemplo 1.11. Resolver $y' = y^3 - y$.

[1]Sin ser muy rigurosos, se puede considerar que $y(x) = -2$ se obtiene al hacer $A \to +\infty$.

Solución. En primer lugar identificamos que esta es una ecuación autónoma. Luego resolvemos la ecuación $y^3 - y = 0$, y obtenemos tres soluciones constantes para la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= -1 \end{aligned}$$

Ahora, si resolvemos la ecuación utilizando el método expuesto anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^3 - y \\ \int \frac{1}{y^3 - y} \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para integrar el lado izquierdo, usamos fracciones parciales

$$\frac{1}{y^3 - y} = -\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1},$$

de donde obtenemos que

$$\int \frac{1}{y^3 - y} \mathrm{d}y = -\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|y+1| + \frac{1}{2}\ln|y-1| = \ln\sqrt{\frac{|y^2-1|}{y^2}}.$$

De donde obtenemos que nuestra solución satisface

$$y^2 = \frac{1}{1 + Ae^{2x}},$$

donde A es una constante arbitraria. Observamos que cuando $A = 0$ se recuperan las soluciones $y_2(x) = 1$ e $y_3(x) = -1$, sin embargo, la solución $y_1(x) = 0$ no se puede obtener de la fórmula[2]. ■

1.2.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4. Encuentre las soluciones constantes y la solución general de las siguientes EDOs autónomas:

1. $y' = y$.
2. $y' = \dfrac{1}{y}$.
3. $y' = e^y$.
4. $y' = e^{2y}$.
5. $y' = e^y + 1$.
6. $y' = y^2$.
7. $y' = y - y^2$.
8. $y' = y^3 - y^2$
9. $y' = k(y - B)$, donde k y B son constantes conocidas.

1.2.5. Soluciones por separación de variables

Este método generaliza los dos casos anteriores, ya que aplica para ecuaciones de la forma

$$y' = f(x)g(y),$$

donde $f(x)$ y $g(y)$ son funciones conocidas. Para resolver este tipo de ecuaciones utilizamos la misma idea de "despejar" que usamos anteriormente (donde nuevamente debemos preocuparnos de las eventuales soluciones constantes):

$$y' = f(x)g(y)$$

[2] Al igual que en el ejemplo anterior, si consideramos $A \to \infty$ se puede *recuperar* la solución $y(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y)\\ \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

de donde podemos integrar para obtener

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Luego si denotamos $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$ y $F(x) = \int f(x)dx$ a las respectivas primitivas, obtenemos

$$G(y) = F(x) + C.$$

Ejemplo 1.12. Resolver $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Solución. Escribimos

$$\begin{aligned}yy' &= -x\\ \int y\mathrm{d}y &= \int -x\mathrm{d}x\\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

Notamos que $C = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, luego podemos asumir que $C = \frac{D^2}{2}$. Con esto podemos despejar y de la siguiente manera

$$\begin{aligned}y^2 &= D^2 - x^2\\ y &= \pm\sqrt{D^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Es decir hay dos familias de soluciones: $y(x) = \sqrt{D^2 - x^2}$ e $y(x) = -\sqrt{D^2 - x^2}$, y en ambos casos el intervalo de solución es $(-D, D)$. ■

Concluimos esta sección con un par de ejemplos.

Ejemplo 1.13. Resolver la ecuación $xy' = y$.

Solución. Escribimos para $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x}\\ \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \ln|y| &= \ln|x| + C.\end{aligned}$$

De acá obtenemos que $|y(x)| = e^C\,|x| = B\,|1 + x|$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$. Si denotamos A como B o $-B$ tenemos que $y(x) = Ax$ donde A es una constante arbitraria. ■

Ejemplo 1.14. Resolver la ecuación diferencial $y' = \dfrac{6x^5 - 2x^3 + 6}{\operatorname{sen} y + e^{2y} - 4}$

Solución. Notamos que en este caso $g(y) \neq 0$ para cualquier y, es decir, no hay soluciones constantes, luego, separando variables se obtiene

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} y + e^{2y} - 4)y' &= 6x^5 - 2x^3 + 6\\ \int(\operatorname{sen} y + e^{2y} - 4)\mathrm{d}y &= \int(6x^5 - 2x^3 + 6)\mathrm{d}x\\ -\cos y + \frac{e^{2y}}{2} &= x^6 - \frac{x^4}{2} + 6x + C.\end{aligned}$$

Como se puede ver obtenemos una solución *implícita* de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.15. Resolver el PVI dado por $y' = \left(1+y^2\right)\tan x$, $y(0)=1$.

Solución. Nuevamente, tenemos que $g(y) \neq 0$, de donde solo tenemos que separar variables

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+y^2}y' &= \tan x \\
\int \frac{1}{1+y^2}Dy &= \int \tan x \mathrm{d}x \\
\arctan y &= -\ln|\cos x| + C \\
y(x) &= \tan\left(-\ln A\,|\cos x|\right).
\end{aligned}$$

Luego imponemos la condición inicial y obtenemos

$$1 = \tan(-\ln A) \Rightarrow -\ln A = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

El intervalo de solución para la ecuación diferencial es tal que $-\ln(e^{-\frac{\pi}{4}}\,|\cos x|) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, esto es

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} < -\ln(e^{-\frac{\pi}{4}}\,|\cos x|) &< \frac{\pi}{2} \\
e^{-\frac{\pi}{2}} < e^{-\frac{\pi}{4}}\,|\cos x| &< e^{\frac{\pi}{2}} \\
e^{-\frac{\pi}{4}} < |\cos x| &< e^{\frac{3\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.16. Resolver la ecuación $y' = xy^{\frac{1}{2}}$.

Solución. El método de separación de variables nos entrega la solución

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + C_1\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x^2 + C\right)^2, \quad \text{en el intervalo } (-\infty, \infty),$$

donde C es una constante arbitraria. Sin embargo, esta familia de soluciones no es la única, pues la función $y \equiv 0$ también es una solución (que no está contenida en la familia anterior). Además de estas dos soluciones, existe una tercera familia de soluciones, la que resulta de "pegar" las funciones anteriores en el punto $x = a$. Esto es, la función

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{1}{16}\left(x^2 - a^2\right)^2 & x \geq a. \end{cases}$$

donde a es un número real cualquiera. ∎

1.2.6. Ejercicios

Ejercicio 1.5. Resolver las siguientes EDOs usando el método de separación de variables:

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$.
2. $y' = -\dfrac{y}{x}$.
3. $y' = e^y \operatorname{sen}(2x)$.
4. $y' = e^{3x+2y}$.
5. $y' = xy^2$.
6. $y' = x^2(y - y^2)$.
7. $y' = kx(y - B)$, donde k y B son constantes conocidas.
8. $\left(e^{2y} - y\right)\dfrac{dy}{dx} = e^y \operatorname{sen}(x)$.
9. $\left(e^x + e^{-x}\right)y' = y^2$.

Ejercicio 1.6. Verificar que

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{1}{16}\left(x^2 - a^2\right)^2 & x \geq a \end{cases}$$

es solución de la ecuación $y' = xy^{\frac{1}{2}}$ para cualquier valor de a.

1.2.7. EDOs lineales de primer orden

Son ecuaciones del tipo

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{1.2}$$

donde $p(x)$ y $f(x)$ son funciones conocidas. Para resolver esto usamos el denominado factor integrante: Definimos la función $P(x) = \int p(x)\mathrm{d}x$, y multiplicamos la ecuación por $\mu(x) = e^{P(x)}$ (denominado *factor integrante*), de donde obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y(x)\right) = f(x)\mu(x).$$

Si integramos esta ecuación, tenemos que

$$\int \frac{d}{dx}\left(\mu(x)y(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\mu(x)\mathrm{d}x,$$

luego

$$\mu(x)y(x) = C + \int f(x)\mu(x)\mathrm{d}x,$$

donde C es una constante arbitraria. Finalmente, llegamos a que

$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)}\int f(x)\mu(x)\mathrm{d}x.$$

La función $y(x)$ obtenida se denomina *solución general de la ecuación*, en tanto que el término $y_h(x) := \frac{C}{\mu(x)}$ es la *solución de la ecuación homogénea*

$$y' + p(x)y = 0, \tag{1.3}$$

y el término $y_p(x) := \frac{1}{\mu(x)}\int f(x)\mu(x)\mathrm{d}x$ es una *solución particular* de la ecuación (1.2).

Ejemplo 1.17. Resolver $y' - 3y = 6$.

Solución. Notamos que el factor integrante es $e^{-\int 3\mathrm{d}x} = e^{-3x}$. Luego multiplicamos por el factor integrante y obtenemos que

$$\begin{aligned}
e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y &= 6e^{-3x}\\
\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y(x)\right) &= 6e^{-3x}\\
\int \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y(x)\right)\mathrm{d}x &= \int 6e^{-3x}\mathrm{d}x\\
e^{-3x}y(x) &= -2e^{-3x} + C.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que la solución es

$$y(x) = -2 + Ce^{3x},$$

cuyo intervalo de solución es $(-\infty, \infty)$. ∎

Ejemplo 1.18. Resolver $xy' - 4y = x^6e^x$.

Solución. En primer lugar debemos escribir la ecuación en su forma normal, es decir, suponemos que $x \neq 0$ y dividimos por x

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x.$$

De aquí observamos que el factor integrante es $e^{-\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x} = e^{-4\ln|x|} = |x|^{-4}$.

Para continuar, notamos que $|x|^4 = x^4$, de donde la ecuación queda

$$\begin{aligned}
x^{-4}y' - 4x^{-5}y &= xe^x\\
\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) &= xe^x
\end{aligned}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(x^{-4}y(x)\right)\mathrm{d}x = \int xe^x\mathrm{d}x.$$

Para calcular la integral del lado derecho, debemos usar integración por partes

$$\begin{aligned}\int xe^x\mathrm{d}x &= xe^x - \int e^x\mathrm{d}x\\ &= xe^x - e^x + C,\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned}x^{-4}y(x) &= C + xe^x - e^x\\ y(x) &= Cx^4 + x^5e^x - x^4e^x,\end{aligned}$$

cuyo intervalo de definición es $(0,\infty)$ ó $(-\infty,0)$ según corresponda para una condición inicial dada.

Observación. Notar que la función $y(x) = Cx^4 + x^5e^x - x^4e^x$ tiene como dominio a todo $\mathbb{R}$ y que además satisface la ecuación diferencial también en todo $\mathbb{R}$.

■

Ejemplo 1.19. Resuelva el siguiente PVI: $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = x\operatorname{sen} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Solución. En este caso $p(x) = \cot x$, de donde $\int p(x)\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen} x|$ y así $\mu(x) = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$. Notar que podemos omitir el valor absoluto, pues

$$\frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen} x)y\right) = \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + (\cos x)y,$$

es decir $\mu(x) = \operatorname{sen} x$ es un factor integrante para la ecuación. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x\cdot y(x) &= \int x\operatorname{sen} x\mathrm{d}x\\ &= \operatorname{sen} x - x\cos x + C.\end{aligned}$$

Finalmente, se debe cumplir que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, es decir, si reemplazamos obtenemos que

$$1\cdot 2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow C = 1.$$

Notar que

$$y(x) = \frac{x^2}{4\operatorname{sen} x} - \frac{\cos(2x)}{8\operatorname{sen}(x)} - \frac{x\cos(x)}{2} + \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

es continua y diferenciable en cualquier intervalo que no contenga a los ceros de $\operatorname{sen} x$, los múltiplos de π. En el caso particular de este ejemplo, la condición inicial es $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, por lo que el intervalo relevante es $(0,\pi)$.

Observación 1.2. En general, si el factor integrante es de la forma $\mu(x) = |h(x)|$, entonces $\tilde{\mu}(x) = h(x)$ también es un factor integrante.

1.2.8. Ejercicios

Ejercicio 1.7. En los siguientes problemas, encuentre la solución general de la ecuación lineal de primer orden, indicando el o los intervalos donde la solución puede estar definida.

1. $y' = 5y$.
2. $3y' + 12y = 4$.
3. $y' + y = e^{3x}$.
4. $y' + 3x^2y = x^2$.
5. $xy' + 2y = 3$.
6. $y' = 2y + x^2 + 5$.

7. $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.
8. $(1+x)y' - xy = x + x^2$.

Ejercicio 1.8. En los siguientes problemas, resuelva el PVI, indique el intervalo donde la solución está definida y determine si la solución obtenida es única.

1. $y' + 5y = 20$, $y(0) = 2$.
2. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x})$, $y(0) = 2$.
3. $\dot{Q} = 5t^4 Q$, $Q(0) = -7$.
4. $\dot{T} = k(T - 50)$, $T(0) = 200$. Asuma que k es una constante conocida.
5. $xy' + y = e^x$, $y(1) = 2$.
6. $y' + \tan xy = \cos^2 x$, $y(0) = -1$.
7. $(x+1)y' + y = \ln x$, $y(1) = 10$.
8. $y' = y^2 \cos x$, $y(-2) = \frac{1}{3}$.
9. $xy' = y^2 - y$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
10. $y' = \dfrac{2x+1}{2y}$, $y(-2) = -1$.

1.2.9. EDOs exactas

Una ecuación diferencial es exacta si es el diferencial de una función de 2 variables, es decir, una ecuación de la forma

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

La solución de una ecuación en estar forma está dada por cualquier curva de nivel de la función $F(x, y)$, es decir

$$F(x, y) = C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Una ecuación diferencial exacta usualmente viene escrita en la siguiente forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

y la ecuación es exacta si y solo si se verifica que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Ejemplo 1.20. Verifique si la ecuación diferencial $(2xy - 3x^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2y)\mathrm{d}y = 0$ es exacta.

Ejemplo 1.21. Verifique si la ecuación diferencial $(y^2 - x)\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$ es exacta.

Para resolver una ecuación diferencial exacta basta con determinar la función $F(x, y)$, para ello:

- Se define $F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$.
- Se calcula la integral parcial del paso anterior y se obtiene un candidato a $F(x, y)$ de la forma $F(x, y) = H(x, y) + g(y)$.
- Se deriva la función $F(x, y)$ obtenida en el paso anterior respecto a la variable y y se iguala el resultado a la función $N(x, y)$, es decir
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \frac{dg}{dy}(y) = N(x, y).$$
- La ecuación resultante resulta ser una ecuación diferencial autónoma para la función $g(y)$ que se puede resolver con las técnicas anteriores.

En algunos casos puede ser útil primero integrar respecto a y la función $N(x, y)$ y luego derivar respecto a x, es decir

- Se define $F(x, y) = \int N(x, y)dy + h(x)$.

- Se calcula la integral parcial del paso anterior y se obtiene un candidato a $F(x,y)$ de la forma $F(x,y) = R(x,y) + h(x)$.
- Se deriva la función $F(x,y)$ obtenida en el paso anterior respecto a la variable x y se iguala el resultado a la función $M(x,y)$, es decir
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) + \frac{dh}{dx}(x) = M(x,y).$$
- La ecuación resultante resulta ser una ecuación diferencial autónoma para la función $h(x)$ que se puede resolver con las técnicas anteriores.

Ejemplo 1.22. Resolver la ecuación $2x + 2yy' = 0$.

Solución. Como vimos antes, la ecuación es exacta, por lo que podemos definir
$$F(x,y) = \int 2x\mathrm{d}x + g(y) = x^2 + g(y),$$
luego derivamos parcialmente respecto a y e igualamos a $N(x,y) = 2y$ para obtener
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{dg}{dy}(y) = 2y,$$
de donde obtenemos que $g(y) = y^2$. Por lo tanto $F(x,y) = x^2 + y^2$ y las soluciones de la ecuación diferencial son las curvas de nivel de F, es decir
$$x^2 + y^2 = C,$$
donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.23. Resolver $(2xy - 3x^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2y)\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Esta ecuación es exacta pues
$$\begin{aligned} M(x,y) = 2xy - 3x^2 &\Rightarrow M_y(x,y) = 2x \\ N(x,y) = x^2 - 2y &\Rightarrow N_x(x,y) = 2x. \end{aligned}$$
Con esto, tenemos que
$$F(x,y) = \int (2xy - 3x^2)\mathrm{d}x + g(y) = yx^2 - x^3 + g(y),$$
así
$$F_y(x,y) = x^2 + g'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow g(y) = -y^2,$$
por lo tanto $F(x,y) = yx^2 - x^3 - y^2$ y las soluciones de la EDO son de la forma
$$yx^2 - x^3 - y^2 = C$$
para cualquier constante C.

Ejemplo 1.24. Resolver $(e^{2y} - y\cos(xy))\mathrm{d}x + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Esta ecuación también es exacta, pues
$$\begin{aligned} M(x,y) = e^{2y} - y\cos(xy) &\Rightarrow M_y(x,y) = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\,\mathrm{sen}(xy) \\ N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y &\Rightarrow N_x(x,y) = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\,\mathrm{sen}(xy). \end{aligned}$$
Definimos
$$F(x,y) = \int (e^{2y} - y\cos(xy))\mathrm{d}x + g(y) = xe^{2y} + \mathrm{sen}(xy) + g(y)$$
de donde
$$F_y(x,y) = 2xe^{2y} + x\cos(xy) + g'(y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y \Rightarrow g(y) = y^2$$
y la solución general de la ecuación diferencial está dada por
$$xe^{2y} + \mathrm{sen}(xy) + y^2 = C.$$

En algunos casos se puede convertir una ecuación no exacta en una exacta mediante un factor integrante

- Si se tiene que $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ es una función que solo depende de x, entonces

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \text{ es un factor integrante.}$$

- Si se tiene que $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ es una función que solo depende de y, entonces

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} \text{ es un factor integrante.}$$

Ejemplo 1.25. Resuelva la ecuación $(y^2 + x)\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Notar que esta ecuación no es exacta pues $M_y = 2y$ y $N_x = 0$, sin embargo

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - 0}{2y} = 1$$

es una función que *no depende de* x, por lo tanto $e^{\int 1\mathrm{d}x} = e^x$ es un factor integrante para la ecuación, es decir,

$$e^x(y^2 + x)\mathrm{d}x + 2ye^x\mathrm{d}y = 0$$

es una ecuación exacta y se puede resolver con el método ya visto. La solución general está dada por

$$y^2e^x + e^x - xe^x = C.$$

Ejemplo 1.26. Resuelva la ecuación $xy\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Esta ecuación no es exacta, pues $M_y = x$ y $N_x = 2xy$, sin embargo

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2xy - x}{xy} = \frac{2y - 1}{y} = 2 - \frac{1}{y},$$

es una función que *no depende de* y, por lo tanto $e^{\int (2 - \frac{1}{y})\mathrm{d}y} = \frac{e^{2y}}{y}$ es un factor integrante para la ecuación, es decir

$$xe^{2y}\mathrm{d}x + x^2e^{2y}\mathrm{d}y = 0$$

es una ecuación exacta y se puede resolver con el método visto. La solución general es

$$\frac{x^2e^{2y}}{2} = C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{C}{x^2}\right) = C - \ln|x|\,.$$

1.2.10. Ejercicios

1.2.11. Algunas transformacions para resolver EDOs

Ecuaciones diferenciales con funciones homogéneas

Definición 1.7. *Una función se dice homogénea de grado α si se cumple que*

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y) \quad \text{para todo } t, x, y.$$

Definición 1.8. *Una ecuación diferencial de primer orden en la forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es homogénea si las funciones M, N son homogéneas del mismo grado. Análogamente, una ecuación de la forma

$$y' = f(x, y)$$

es homogéneas si la función f es homogénea de grado 0.

Para resolver una ecuación homogéneas se considera uno de los siguientes cambios de variables

$$y = xv \text{ o bien } y = \frac{x}{u}.$$

La ecuación resultante debería ser una ecuación diferencial *separable* para la función v o la función u según sea el caso.

Ejemplo 1.27. Resolver la ecuación $(x+y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Notar que ambas funciones son homogéneas de grado 1. Si consideramos la transformación $y = xv$ obtenemos que

$$\mathrm{d}y = x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x$$

de donde la ecuación se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
(x+xv)\mathrm{d}x + x(x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x) &= 0\\
(x+2xv)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}v &= 0\\
x(1+2v)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}v &= 0\\
\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{1+2v}\mathrm{d}v &= 0\\
\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+2v}\mathrm{d}v &= 0\\
\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1+2v| &= C
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.28. Resolver la ecuación $y' = \dfrac{x+3y}{3x+y}$.

Solución. Notar que en la función $f(x,y)$ es homogénea de grado 0. Si hacemos la transformación $y = \frac{x}{u}$ obtenemos que

$$y' = \frac{1}{u} - \frac{xu'}{u^2} = \frac{u - xu'}{u^2},$$

de donde la ecuación queda

$$\begin{aligned}
\frac{u-xu'}{u^2} &= y'\\
&= \frac{x+3y}{3x+y}\\
&= \frac{y(\frac{x}{y}+3)}{y(3\frac{x}{y}+1)}\\
&= \frac{u+3}{3u+1}.
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión se obtiene que

$$\begin{aligned}
xu' &= u^2\left(\frac{1}{u} - \frac{u+3}{3u+1}\right)\\
&= \frac{u^2(1-u)(1+u)}{3u+1}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\int \frac{3u+1}{u^2(1-u)(1+u)}\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
\int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{3}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{2}{u-1}\right)\mathrm{d}u &= \ln|x| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{u}+3\ln|u|-\ln|u+1|-2\ln|u-1| &= \ln(A|x|)\\ \frac{|u(u+1)|}{|u-1|^2} &= A|x|.\end{aligned}$$

Si usamos la transformación $y = xv$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}v+xv' &= \frac{x+3y}{3x+y}\\ &= \frac{1+3v}{3+v},\end{aligned}$$

de donde

$$xv' = \frac{1+3v}{3+v}-v = \frac{1+3v-v(3+v)}{3+v} = \frac{1-v^2}{3+v}$$

y la ecuación es nuevamente separable, pues

$$\begin{aligned}\int \frac{3+v}{(1-v)(1+v)}\mathrm{d}v &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \int \left(\frac{1}{v+1}+\frac{2}{1-v}\right)\mathrm{d}v &= \ln|x|+C\\ \ln|v+1|-2\ln|v-1| &= \ln|x|+C\\ \ln\frac{|v+1|}{|v-1|^2} &= \ln(A|x|)\\ \frac{|v+1|}{|v-1|^2} &= A|x|\end{aligned}$$

Ejemplo 1.29. Resuelva la ecuación diferencial $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y = 0$

Solución. Notemos que en este caso $M(x,y) = x^2+y^2$ y $N(x,y) = x^2-xy$ son funciones homogéneas de grado 2. Consideremos el cambio de variable $y = xv$, de donde se obtiene que

$$\mathrm{d}y = v\mathrm{d}x + x\mathrm{d}v,$$

luego

$$0 = (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y = (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-xy)(v\mathrm{d}x+x\mathrm{d}v) = x^2(1+v)\mathrm{d}x+x^3(1-v)\mathrm{d}v = 0,$$

de donde se obtiene que

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{1-v}{1+v}}{x},$$

que se puede separar para obtener

$$\int \frac{v-1}{1+v}\mathrm{d}v = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

Resolviendo las integrales se obtiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{v-1}{1+v}\mathrm{d}v &= \int \frac{1+v-2}{1+v}\mathrm{d}v\\ &= \int \left(1-\frac{2}{1+v}\right)\mathrm{d}v\\ &= v-2\ln|1+v|,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que, reemplazando $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}-2\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| = \ln|x|+C.$$

Ecuación diferencial de Bernoulli

Definición 1.9. *Una ecuación diferencial se dice que es de Bernoulli si se puede escribir en la forma*

$$y' + p(x)y = f(x)y^n, donden \neq 0yn \neq 1.$$

Para resolver una ecuación diferencial de Bernoulli se considera el siguiente cambio de variable

$$u = y^{1-n}.$$

La ecuación resultante debería ser una ecuación diferencial *lineal* para la función u.

Ejemplo 1.30. Resolver $xy' + y = x^2y^2$.

Solución. Esta es una ecuación de Bernoulli de grado 2, por lo que debemos hacer la transformación $u = y^{1-2} \Rightarrow y = \frac{1}{u}$, de donde

$$y' = -\frac{1}{u^2}u',$$

por lo tanto

$$xy' + y = -\frac{x}{u^2}u' + \frac{1}{u} = x^2\left(\frac{1}{u}\right)^2,$$

y al multiplicar por u^2 se obtiene la ecuación lineal

$$-xu' + u = x^2 \Leftrightarrow xu' - u = -x^2.$$

Para resolver esta ecuación la llevamos a la forma canónica $u' - \frac{1}{x}u = -x$ y usamos el factor integrante

$$e^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} \to \mu(x) = \frac{1}{x}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{x}u(x) = \int -1\mathrm{d}x = -x + C,$$

y se obtiene que, volviendo a usar que $y = \frac{1}{u}$

$$y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by + c)$

Para resolver ecuaciones de este tipo se considera el siguiente cambio de variable

$$u = ax + by + c, \qquad \text{donde } b \neq 0.$$

La ecuación resultante debería ser una ecuación diferencial *separable* para la función u.

Ejemplo 1.31. Resolver la ecuación diferencial $y' = (y - 2x)^2 - 7$.

Solución. Denotamos por $u = y - 2x$, de donde

$$u' = y' - 2 = \left((y - 2x)^2 - 7\right) - 2 = u^2 - 9,$$

la ecuación es separable, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{u^2 - 9}\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}x \\
\frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right)\mathrm{d}u &= x + C \\
\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| &= x + C \\
u &= \frac{3(1 + Ce^{6x})}{1 - Ce^{6x}} \\
y &= 2x + \frac{3(1 + Ce^{6x})}{1 - Ce^{6x}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.32. Resolver la ecuación $y' = \cos(x+y)$.

Solución. Consideramos la transformación $u = x + y$, de donde $u' = 1 + y'$ y se tiene que

$$\begin{aligned} u' &= 1 - y' \\ &= 1 + \cos(x+y) \\ &= 1 + \cos u, \end{aligned}$$

por lo que se obtiene la EDO separable

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\cos u} \mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}x \\ \tan\left(\frac{u}{2}\right) &= x + C \\ \frac{u}{2} &= \arctan(x+C) \\ u &= 2\arctan(x+C) \\ y &= 2\arctan(x+C) - x. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33. Resolver la ecuación $y' = \operatorname{sen}(x+y)$.

Solución. Es similar al anterior, pero en este caso hay que calcular $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} u}\mathrm{d}u$. Luego de algunas sustituciones trigonométricas se obtiene que

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} u} \mathrm{d}u = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{u}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{u}{2}) + \cos(\frac{u}{2})} + C$$

y se puede obtener la solución de la EDO de forma implícita.

Ecuación diferencial de Ricatti

Definición 1.10. *Una ecuación diferencial se dice que es de Ricatti si se puede escribir en la forma*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

Para resolver una ecuación diferencial de Ricatti es necesario conocer de antemano una solución particular y_1. Si se conoce dicha solución particular se puede obtener una familia de soluciones haciendo la transformación

$$u = y - y_1.$$

La ecuación resultante debería ser una ecuación diferencial de *Bernoulli* para la función u la que se puede resolver con el método anteriormente visto.

Ejemplo 1.34. Resolver la ecuación diferencial $y' - 2x^2 - \frac{y}{x} = -2y^2$ sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución.

Solución. Primero notamos que efectivamente $y_1(x) = x$ es solución, puesto que

$$y_1' - 2x^2 - \frac{y_1}{x} = 1 - 2x^2 - \frac{x}{x} = -2x^2 = -2y_1^2.$$

Con esto, consideramos $u = y - y_1 = y - x$, de donde

$$\begin{aligned} u' &= y' - 1 \\ &= 2x^2 + \frac{y}{x} - 2y^2 - 1 \\ &= 2x^2 + \frac{u+x}{x} - 2(u+x)^2 - 1 \\ &= 2x^2 + \frac{u}{x} + 1 - 2(u^2 + 2xu + x^2) - 1 \\ &= 2x^2 + \frac{1}{x}u - 2u^2 - 4xu - 2x^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{x} - 4x\right) u - 2u^2,$$

de donde

$$u' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) u = -2u^2,$$

que es una ecuación de Bernoulli. Se deja como ejercicio resolver esta nueva ecuación. La solución es

$$y(x) = x + \frac{2x}{Ce^{2x^2} - 1}.$$

1.2.12. Ejercicios

Ejercicio 1.9. Resolver la ecuación diferencial $y' = e^{2x-y} + 1$.

1.3. Modelos que usan EDOs de primer orden

1.3.1. Dinámica de poblaciones

De acuerdo a Thomas Malthus, la tasa a la cual la población de un país crece en un instante t es proporcional a la población del país en ese instante. Matemáticamente hablando, dicha frase se puede interpretar de la siguiente forma: Si denotamos por $P(t)$ a la población del país al instante t, entonces la tasa de crecimiento en dicho instante está dada por $\frac{dP}{dt}(t)$, luego la hipótesis de Malthus se puede escribir como

$$\frac{dP}{dt}(t) \propto P(t),$$

donde el símbolo $\propto$ significa *"proporcional a"*. Recordamos que dos magnitudes a y b son proporcionales si es que existe una constante k tal que $a = kb$, luego el modelo Malthusiano queda

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Este modelo es usualmente utilizado para modelar el crecimiento de pequeñas poblaciones en períodos cortos de tiempo, como por ejemplo, una colonia de bacterias en un plato de Petri.

Al resolver esta EDO bajo la condición inicial $P(0) = P_0$, que representa que la población al tiempo $t = 0$ es de P_0 habitantes, obtenemos que

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

A pesar de ser una buena primera aproximación a la realidad, este modelo sirve en situaciones muy particulares (poblaciones pequeñas y en períodos cortos de tiempo). Además, así como está escrito el modelo, éste no considera situaciones en las que hay ciertas tasas de natalidad, mortalidad, inmigración, emigración, etcétera.

Una modificación simple al modelo se puede hacer al incorporar tasas de inmigración r_i y emigración r_e de la siguiente forma

$$\frac{dP}{dt} = kP + r_i - r_e.$$

La explicación de esta ecuación viene del hecho que las tasa r_i y r_e afectan directamente la tasa a la cual cambia la población.

¿Cómo incorporar una tasa de natalidad *per cápita* constante β y una tasa de mortalidad *per cápita* constante δ? Para ello, recurrimos a la interpretación de Malthus, quien nos dice que $k = \beta - \delta$, es decir nuestro modelo completo queda como

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P + r_i - r_e \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

La ecuación (1.4) sirve para modelar situaciones como las descritas anteriormente, por lo que nos queda por preguntarnos que hacer en el caso de una población con mayor cantidad de habitantes, o para períodos mas largos de tiempo.

La manera habitual de responder a esa pregunta, es relajar la condición de que las tasas sean *constantes* en la ecuación (1.4), es decir, considerar el caso en que:

$$\beta = \beta(t, P) \text{ y } \delta = \delta(t, P),$$

lo que nos deja con una ecuación no-lineal y bastante difícil de resolver en general. Un modelo simplificado basado en lo anterior, es el que propuso el matemático Pierre Verhulst, quien supone que la tasa de mortalidad es constante y que la tasa de natalidad es una función lineal de P, es decir

$$\beta(t, P) = \beta_0 - \beta_1 P(t),$$

de donde el modelo queda como

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = (\beta_0 - \delta - \beta_1 P)P \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Si denotamos por $r = \beta_0 - \delta$ y $K = \dfrac{\beta_0 - \delta}{\beta_1}$, entonces el modelo se puede escribir de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{r}{K} P(K - P) \\ P(0) = P_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

La ecuación (1.5) se conoce como ***ecuación logística de Verhulst*** y tiene como solución (Ejercicio: Resolver la ecuación usando fracciones parciales) a la función logística

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}. \tag{1.6}$$

El valor de K representa la capacidad máxima del sistema, también denotada como “población límite”. Además podemos interpretar la constante $r = \beta_0 - \delta$ como una suerte de “tasa neta” de crecimiento.

¿Cómo utilizamos esto en aplicaciones?

Ejemplo 1.35. Una placa de Petri contiene inicialmente una colonia de 1000 bacterias. Cuando $t = 1$ se mide que el número de bacterias es de 1500. Si la tasa de crecimiento de la colonia es proporcional al numero de bacterias $P(t)$ en ésta, determine el tiempo necesario para que la colonia se triplique en cantidad.

Solución. En este caso el PVI es

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = 1000 \\ P(1) = 1500. \end{cases}$$

La solución del PVI es $P(t) = 1000e^{kt}$ pero como $1500 = P(1) = 1000e^{k\cdot 1}$ obtenemos que

$$k = \ln \frac{3}{2}.$$

Finalmente, la población se triplicará cuando $P(t) = 3000 = 1000e^{kt}$ lo que nos dice que esto ocurre cuando

$$t = \frac{1}{k} \ln 3 = \frac{\ln 3}{\ln \frac{3}{2}} \approx 2{,}7.$$

Ejemplo 1.36 (Mosca de la fruta en un recipiente cerrado). Cierto ambiente es capaz de sostener M individuos. Si la tasa de crecimiento neto es proporcional a $M - P$, encuentre un modelo que represente la población.

Solución. Tenemos que $\beta - \delta = k(M - P)$, donde k es una constante de proporcionalidad. Utilizando el modelo genérico dado por la ecuación (1.4), llegamos a que

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = kP(M - P),$$

es decir, es una ecuación logística. ■

Ejemplo 1.37 (Población caníbal). Una comunidad cerrada cuenta con una tasa de natalidad constante igual a β, y una tasa de mortalidad proporcional a P. Determine una ecuación diferencial que modele la situación.

Solución. En este caso tenemos que $\delta = \alpha P$, luego la ecuación (1.4) queda

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = (\beta - \alpha P)P = \alpha P \left(\frac{\beta}{\alpha} - P \right),$$

que es una ecuación logística. ■

Ejemplo 1.38 (Propagación de una enfermedad). En una comunidad cerrada con P_T habitantes, la tasa de contagio de cierta enfermedad es proporcional a la interacciones entre individuos sanos y enfermos. Determine una ecuación que modele la propagación de la enfermedad.

Solución. Si denotamos por $P(t)$ al número de personas contagiadas al instante t, lo que nos dicen es que

$$\frac{dP}{dt} \propto P(P_T - P),$$

donde $(P_T - P)$ es la cantidad de individuos sanos[3]. Es decir tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = kP(P_T - P),$$

otra ecuación logística. ■

La serie de ejemplos anteriores muestra que se pueden modelar diversas situaciones con la ecuación logística, sin embargo, aún no consideramos el caso en que la comunidad es abierta, es decir, permitimos la llegada y salida de individuos. En tales casos, tenemos que las tasas r_i y r_e no son nulas. Por ejemplo, una población que se rige por el modelo logístico, además cuenta con una tasa neta de inmigración/emigración de $R = r_i - r_e$ individuos por año.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{K}P(K - P) + R.$$

Mas adelante intentaremos resolver este tipo de ecuaciones de manera explícita. El caso en que r, K y R son constantes se puede resolver usando fracciones parciales. Cualquier otro caso escapa a las técnicas que estudiaremos en este curso.

1.3.2. Objetos en caída libre

De acuerdo a la segunda ley de Newton, tenemos que la sumatoria de fuerzas sobre un objeto es igual a la masa del mismo por su aceleración, es decir

$$F_{\text{neta}} = ma.$$

Si denotamos por v a la velocidad del objeto, tenemos que

$$F_{\text{neta}} = m\dot{v}.$$

[3]Observar que estamos modelando una "interacción" entre dos individuos, como el producto de las variables. Esto será utilizada constantemente en el futuro.

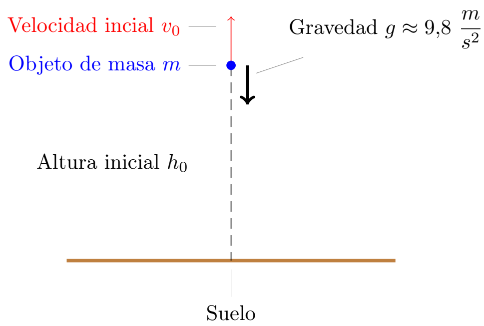

Figura 1.1: Masa en caída libre.

Ahora, en el caso de un objeto en caída libre, suponemos que no hay fuerzas externas a la gravedad actuando sobre el objeto, es decir[4] $F_{\text{neta}} = F_{\text{gravedad}} = -mg$ lo que nos da una ecuación diferencial para la velocidad el objeto

$$m\dot{v} = -mg,$$

o equivalentemente

$$\dot{v} = -g.$$

Esta ecuación se resuelve integrando directamente, para obtener que

$$v(t) = v_0 - gt$$

donde $v_0 = v(0)$ la velocidad inicial del objeto. Similarmente, tenemos que si h es la altura del objeto, entonces $v = \dot{h}$, por lo que tenemos la ecuación diferencial para determinar la altura del objeto al instante t dada por

$$\dot{h} = v = v_0 - gt,$$

integrando obtenemos que

$$h(t) = h_0 + v_0 t - g\frac{t^2}{2},$$

donde $h_0 = h(0)$ es la altura inicial del objeto.

Ejemplo 1.39 (Arquero suicida). Un arquero con intenciones suicidas lanza verticalmente, desde el suelo, una flecha con velocidad inicial de 49 m/s. Determine la altura máxima de la flecha y el tiempo que le toma al arquero recibir el flechazo de vuelta.

Solución. Usando la solución obtenida, tenemos que

$$v(t) = 49 - 9{,}8t,$$

y

$$h(t) = 49t - 4{,}9t^2.$$

Para resolver este problema, debemos interpretar en términos matemáticos que significa alcanzar la altura máxima. La clave es notar que la flecha cambia de dirección al llegar al máximo, es decir pasamos de una velocidad positiva (se mueve hacia arriba) a una negativa (se mueve hacia abajo), en otras palabras, la condición es que la velocidad sea exactamente 0.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 49 - 9{,}8t = 0 \Rightarrow t = \frac{49}{9{,}8} = 5.$$

Es decir, luego de 5 segundos, la flecha alcanza su altura máxima. Para determina la altura, basta con calcular $h(5) = h(t) = 49 \cdot 5 - 4{,}9(5)^2 = 122{,}5$ metros.

[4]La constante $g \approx 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ denota la aceleración de gravedad en la Tierra.

Para determinar cuanto tiempo tarda la flecha en impactar al arquero, notamos que dicha situación ocurre cuando $h(t) = 0$ (la flecha llega al nivel del piso), es decir

$$h(t) = 0 \Rightarrow 49t - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ó } t = 10.$$

La solución $t = 0$ representa el momento en que se disparó la flecha, y la solución $t = 10$ representa el tiempo que demora la flecha en impactar al arquero. ■

Observación 1.3. En el ejemplo anterior, muchos pensarán ¿por qué calculamos el tiempo de retorno, si es mucho mas fácil decir que la flecha se demora lo mismo en subir al máximo que en bajar?

La razón por la cual lo resolvimos imponiendo la condición $h(t) = 0$ es en virtud de que dicha condición aplica en cualquier circunstancia, no solo en el caso de caída libre. ¿Qué pasaría si agregamos resistencia del aire a nuestro ejemplo? Nuestra intuición nos dice que quizás la flecha se debería demorar mas en caer que subir. Sin importar nuestra buena o mala intuición, la condición $h(t) = 0$ siempre nos dará la respuesta exacta al tiempo de retorno al suelo, así como la condición $v(t) = 0$ siempre nos dará el tiempo que le toma al objeto llegar a su altura máxima.

Veamos que pasa si suponemos que aparte de la gravedad, tenemos una fuerza de resistencia al movimiento: fuerza de roce, es decir

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{gravedad}} + F_{\text{roce}}.$$

¿Cómo se modela la fuerza de roce?

En primer lugar la fuerza de roce se opone al movimiento (es decir debe tener el signo opuesto al signo de la velocidad), y habitualmente se supone que la fuerza es proporcional a v, o a una potencia de v, es decir

$$F_{\text{roce}} = -kv^p,$$

donde $k > 0$ y $p \geq 1$ son constantes empíricas, siendo los casos $p = 1$ y $p = 2$ los mas usados. Veamos el caso de un modelo con roce lineal, es decir $p = 1$. El modelo diferencial quedaría como

$$m\dot{v} = -mg - kv,$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = -g.$$

En este punto definimos la cantidad

$$\rho := \frac{k}{m}$$

y la denotamos *coeficiente de arrastre*: esta constante es una constante empírica que depende del objeto en cuestión.

Para resolver la EDO resultante, utilizamos el factor integrante $e^{\rho t}$, y obtenemos que la solución general está dada por

$$v(t) = -\frac{g}{\rho} + Ce^{-\rho t}.$$

Si consideramos que la velocidad inicial del objeto es $v(0) = v_0$, obtenemos la fórmula para $v(t)$

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right) e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}.$$

Una observación importante es que cuando hay roce, se obtiene lo que se llama *velocidad terminal*, que se calcula mediante

$$v_T := \lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{\rho}.$$

Esta velocidad es la máxima velocidad que puede alcanzar un objeto en caída libre, independiente de la altura a la que este se deje caer. Esta fórmula explica de alguna manera el por qué funcionan los paracaídas, ya que de no haber roce, un paracaidista aumentaría su velocidad en todo momento durante su caída.

Ejemplo 1.40 (Arquero suicida con roce). Veamos como afecta un roce lineal a nuestro arquero suicida. Supongamos que la flecha utilizada tiene un coeficiente de arrastre $\rho = 0{,}04$. Utilizando la fórmula recién calculada, obtenemos que

$$v(t) = 294e^{-\frac{t}{25}} - 245.$$

Además si recordamos que $\dot{h} = v$, obtenemos que

$$h(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-\frac{t}{25}}.$$

Ahora, para calcular la altura máxima, imponemos la condición $v(t) = 0$, y encontramos que

$$t_{max} = 25 \ln \frac{294}{245} \approx 4{,}56 \text{ segundos},$$

de donde la altura máxima es

$$h_{max} = h(t_{max}) \approx 108{,}3.$$

En cuanto al tiempo de retorno, este es mucho mas complicado de calcular que en el caso anterior, ya que si bien la condición $h(t) = 0$ sigue siendo correcta, el resolver dicha ecuación es algo no trivial, y que escapa a las técnicas de este curso. Una manera de hacerlo, es mediante el uso de un computador (técnicas numéricas), de donde obtenemos que

$$t_{impacto} \approx 9{,}41 \text{ segundos}.$$

Observar que $9{,}14 - 4{,}56 = 4{,}85$, es decir, el tiempo de descenso es mas largo que tiempo de ascenso, confirmando que cuando hay roce, nuestra intuición puede ser incorrecta.

1.3.3. Ley de Torricelli

Esta ley nos permite calcular el nivel del agua en un recipiente que se vacía debido a un pequeño agujero en su fondo

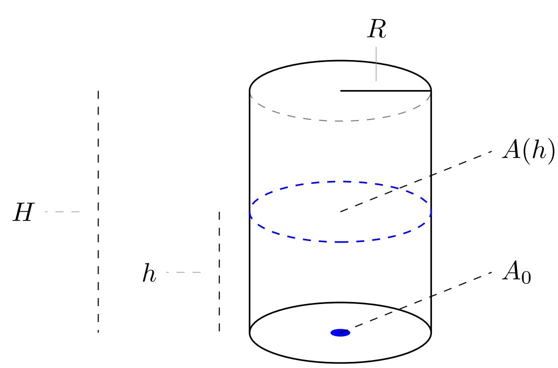

Figura 1.2: Ley de Torricelli.

De acuerdo a Torricelli, el agua solo cae producto de la fuerza de gravedad, cuya aceleración denotamos por g, razón de la cual se puede determinar una ecuación que modele la altura h del nivel del agua: si el área del agujero es A_0, y el área del nivel del agua cuando ésta tiene una altura h es $A(h)$, entonces tenemos que la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A(h)}\sqrt{2gh} \tag{1.7}$$

nos permite determinar la altura h en cualquier instante t.

Ejemplo 1.41 (Recipiente cilíndrico). En este caso $A(h) = \pi R^2$

Ejemplo 1.42 (Recipiente cuadrado). En este caso $A(h) = ab$

Ejemplo 1.43 (Recipiente cónico truncado). En este caso $A(h) = \frac{\pi}{H^2}\left(h(R_1 - R_0) + HR_0\right)^2$

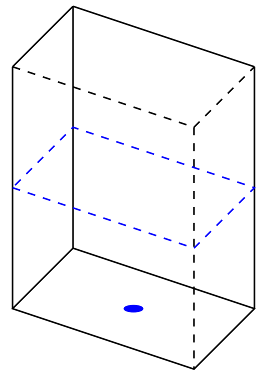

Figura 1.3: Ley de Torricelli.

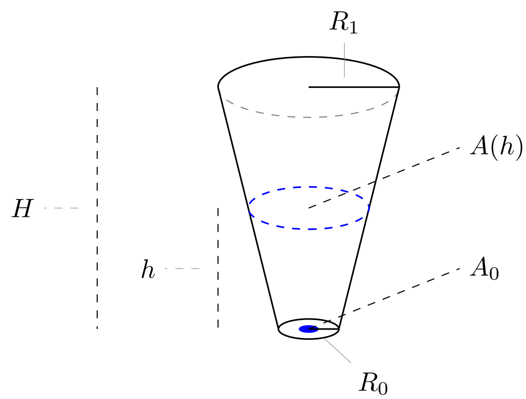

Figura 1.4: Ley de Torricelli.

1.3.4. Ley de enfriamiento de Newton

De acuerdo a Newton, la tasa a la cual cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto y el medio en el cual está sumergido, es decir, si denotamos por $T(t)$ a la temperatura del objeto al instante t, y T_M a la temperatura del medio, tenemos que

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_M,$$

de donde tenemos que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M)$$

Una simplificación que se suele hacer, es suponer que T_M es constante, en cuyo caso normalmente tenemos que $k < 0$.

Ejemplo 1.44. Una taza de café se enfría según la ley de Newton. Si inicialmente el café estaba hirviendo ($T(0) = 100°$) y la temperatura ambiente es de 13°, estime la temperatura del café luego de 2 minutos si es que $k = -1$.

Solución. De acuerdo al modelo, tenemos que la temperatura del café se puede modelar mediante la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{T} = -(T - 13) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

Resolvemos esta ecuación usando separación de variables:

$$\frac{dT}{dt} = -(T - 13)$$

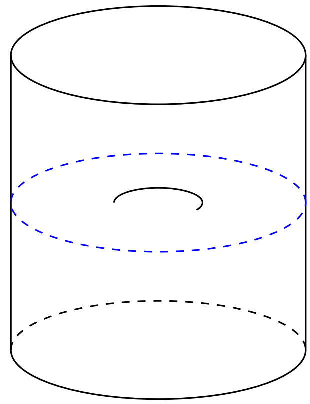

Figura 1.5: Mezcla de soluciones.

$$\int \frac{1}{T-13}\mathrm{d}T = -\int \mathrm{d}t$$
$$\ln(T-13) = -t + C,$$

de donde $T(t) = 13 + e^{C-t} = 13 + Ae^{-t}$, donde $A = e^C$. Imponiendo la condición $T(0) = 100$, obtenemos que

$$T(t) = 13 + 87e^{-t}.$$

Concluimos diciendo que la temperatura luego de 2 minutos es $T(2) = 13 + 87e{-}2 \approx 24{,}77$. ■

1.3.5. Mezcla de soluciones

La mezcla de dos soluciones con concentraciones distintas puede ser modelada mediante una ecuación diferencial. Para entender la idea, usaremos un ejemplo:

Se tiene un estanque que inicialmente contiene L_0 litros de solución de agua con sal con una concentración de c_i kilos de sal por litro de agua. Al instante $t = 0$ se agrega al estanque una solución de agua con sal con una concentración de c_e kilos de sal por litro de agua, la cual se incorpora a una tasa de r_e litros por segundo, y simultáneamente se extrae la solución resultante a una tasa de r_s litros por segundo.

Nos interesa saber la concentración de la solución que extraemos del estanque en cualquier instante t, para ello denotamos por $S(t)$ a la cantidad de sal en el estanque al instante t. Por ejemplo, al instante inicial tenemos que hay

$$S(0) = L_0 \cdot c_i$$

kilos de sal. ¿Cómo determinamos la cantidad de sal en otro instante t? La clave es utilizar una ecuación diferencial: notamos que la tasa a la cual varía la cantidad de sal en el estanque se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dS}{dt} = R_e - R_s,$$

donde R_e simboliza la cantidad de sal que ingresa al estanque por segundo, y R_s es la cantidad de sal que sale del estanque por segundo. Estas cantidades se pueden calcular de la siguiente forma

$$R_e = (\text{tasa de entrada de la solución}) \times (\text{concentración de entrada de sal})$$
$$R_s = (\text{tasa de salida de la solución}) \times (\text{concentración de salida de sal}).$$

En nuestro problema, tenemos que

$$R_e = r_e \cdot c_e$$
$$R_s = \frac{r_s}{L_0 + (r_e - r_s)t} S(t).$$

Luego nuestro modelo queda de la siguiente forma

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = r_e \cdot c_e - \dfrac{r_s}{L_0 + (r_e - r_s)t} S(t) \\ S(0) = L_0 \cdot c_i \end{cases}$$

Para resolver esta ecuación en aplicaciones utilizamos el método del factor integrante, puesto que las cantidades $r_e,\ c_e,\ r_s$ pueden ser tanto constantes o funciones del tiempo

Ejemplo 1.45. Se agregan 3 litros por minuto de salmuera con una concentración de 0,5 kilos por litro a un estanque que contiene 300 litros de salmuera con una concentración de 0.2 kilos por litro. Si se extraen 3 litros por minuto del estanque, ¿cuál es la concentración de la salmuera que sale?

Solución. Tenemos que identificar las variables:

$$\begin{aligned} L_0 &= 300 \\ c_i &= 0{,}2 \\ r_e &= 3 \\ c_e &= 0{,}5 \\ r_s &= 3, \end{aligned}$$

de donde nuestro modelo queda

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 1{,}5 - \dfrac{1}{100} S(t) \\ S(0) = 60 \end{cases}$$

■

Ejemplo 1.46. Resuelva el problema anterior, suponiendo que se extraen solo 2 litros por minuto.

Solución. Lo único que cambia es que $r_s = 2$, lo que nos deja como modelo

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 1{,}5 - \dfrac{3}{300 + t} S(t) \\ S(0) = 60 \end{cases}$$

■

1.3.6. Ejercicios

Ejercicio 1.10. Plantee modelos de población como ecuaciones diferenciales en los siguientes casos. Además entregue la solución del PVI obtenido.

1. La tasa de natalidad (β) es proporcional a la población. Y las tasas de mortalidad (δ), inmigración (r_i) y emigración (r_e) son constantes.

2. La tasa de crecimiento neto ($k = \beta - \delta$ es constante) y la tasa neta de salida y entrada de población $r_i - r_e = \cos t$. Esto indica que en ciertos períodos hay inmigración con nada de emigración, y en otros sucede todo lo contrario. Tales supuestos pueden modelar (al menos de modo rudimentario) el período de vacaciones en una ciudad.

Ejercicio 1.11. A un hospital con P_T individuos llega una persona portadora de un virus altamente contagioso. Si $P(t)$ representa los individuos que tienen el virus al instante t, determine una ecuación diferencial que modele los siguientes casos (¡no resuelva las ecuaciones!). Siempre suponga que inicialmente el único infectado es la persona que ingresa al hospital y que se presume que la tasa a la cual varía la población enferma es proporcional a las interacciones entre individuos sin el virus y con el virus.

1. Las autoridades declaran cuarentena (no entran ni salen individuos).

2. Las autoridades dejan salir pacientes no infectados y los reemplazan por pacientes infectados a una tasa (constante) de r_1. *Ayuda*: La cantidad de individuos en el hospital se mantiene constante e igual a P_T en todo momento.

3. Las autoridades dan por perdida la batalla y no dejan salir a nadie del hospital, sin embargo permite el ingreso de portadores del virus a una tasa (constante) de r_2.

4. ¿Cómo cambian los modelos si es que $P(t)$ representa a los individuos no contagiados?

Ejercicio 1.12. La población de una comunidad crece a una tasa que es proporcional al número de individuos en ella. Si la población inicial se duplicó luego de 5 años, ¿cuánto tiempo le toma a la población triplicarse? ¿y cuadruplicarse?

Ejercicio 1.13. En una plantación de alerces se considera un modelo en el que la tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de alerces, pero en adición se talan alerces a una tasa de $r > 0$ alerces por día. Esto nos da el modelo

$$\frac{dP}{dt} = kP - r,$$

donde $k, r > 0$ son constantes. Si la cantidad inicial de alerces es de 1000 árboles, y las tasas están dadas por $k = 0{,}05$, $r = 100$. Se presume que bajo estas condiciones no deberían quedar alerces luego de t_0 días. Encuentre t_0 (Hint: resuelva la ecuación $P(t) = 0$.)

Ejercicio 1.14. Un estudiante contagiado de un tipo de gripe llega a un campus cerrado de una universidad con 1000 estudiantes inicialmente sanos. Determine una ecuación diferencial para el número de estudiantes contagiados si es que la tasa a la cual se esparce la gripe es proporcional al número de interacciones entre los estudiantes contagiados y los sanos.

Si es que en adición se sabe que el número de estudiantes contagiados luego de 4 días es de 50 estudiantes, determine el número de estudiantes contagiados luego de 6 días.

Ejercicio 1.15. Cierta población se rige por el modelo logístico

$$\frac{dP}{dt} = P(0{,}1 - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000,$$

donde t se mide en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿Cuándo la población será igual a la mitad de la población límite?

Ejercicio 1.16. Un estanque pierde agua debido a un orificio en su base. Usando la ley de Torricelli vista en clases, responda las siguientes preguntas en los casos en que el estanque es: un cilindro, un paralelepípedo, un cono y un cono invertido. Suponga que todas las constantes son conocidas.

1. El tiempo que demora en vaciarse el estanque, si es que éste estaba originalmente lleno.

2. Determine el nivel del agua cuando el estanque está a medio llenar, así como la velocidad a la que disminuye el nivel del agua en ese instante.

3. ¿A qué velocidad disminuye el nivel del agua justo en el instante en que el estanque esta vacío?

4. Suponga que se agrega agua al estanque a una tasa de r m^3 por segundo. ¿Cómo cambia el modelo? Hint: Notar que la ecuación de Torricelli expresa un cambio en el *nivel del agua*, por lo que agrega metros cúbicos indica cambios en el *volumen del agua*, por lo que se deben ajustar los datos para que todo mida lo mismo.

Hint: Le puede servir saber que el volumen de un cilindro de altura H y radio R de su base es de $V = \pi R^2 H$, en tanto que el volumen de un cono de altura H y radio R de su base es de $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Ejercicio 1.17. Se dispara verticalmente una bala de cañón de 5 kilos desde el piso con velocidad inicial de 100 m/s. Responda las siguientes preguntas suponiendo que: 1) no hay resistencia del aire, 2) la resistencia del aire es la forma $F_R = -0{,}025v$.

1. ¿Cuál es la altura máxima de la bala?
2. ¿A qué velocidad impactaría la bala a un avión que vuela a la mitad de la altura máxima determinada en la parte anterior?
3. En el caso sin resistencia del aire: ¿Cuál es la velocidad a la que regresa la bala al suelo si es que no impacta a ningún objeto?
4. En el caso con resistencia del aire, se puede calcular la determinada **velocidad terminal**. Esta velocidad corresponde al límite de v cuando $t \to \infty$. Encuentre la velocidad terminal para este ejemplo. (Esto sirve para explicar por qué los paracaídas funcionan).

Ejercicio 1.18. Un recipiente contiene 500 litros de una solución compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Otra solución, con 50 % de agua y 50 % de alcohol se va añadiendo al recipiente a razón de 4 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, ¿cuánto alcohol hay en el recipiente a los 10 minutos?

Ejercicio 1.19. Un recipiente contiene 500 litros de una solución que contiene 50 kilos de sal. Al recipiente se le agregar una solución salada con una concentración de 0.25 kilos por litro a razón de 10 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, ¿cuánto sal hay en el recipiente a los 10 minutos?

Ejercicio 1.20. Un recipiente contiene 200 litros de una solución que contiene 15 kilos de azúcar. Al recipiente se le agrega agua destilada a un tasa de 10 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a la misma tasa (10 litros por minuto). Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánta azúcar hay en el recipiente a los 15 minutos?
2. Calcular el tiempo que tarda la cantidad de azúcar en llegar a los 5 kilos.
3. La intuición nos dice que luego de mucho tiempo realizando este proceso, la cantidad de azúcar en el recipiente debería ser cada vez menor. Hallar la cantidad de azúcar cuando $t \to \infty$ para contrastar nuestra intuición con este modelo.

Ejercicio 1.21. Usando la ley de Newton para el enfriamiento/calentamiento, resuelva el siguiente escenario. Suponga que se prepara una taza de café con agua hirviendo ($T = 100°$), la que se deja sobre una mesa en una pieza a temperatura ambiente (suponga que $T_M = 10°$ es constante). Si luego de 10 minutos, la temperatura de la tasa de café es de 40° grados, determine la temperatura del café luego de 30 minutos.

¿Cómo cambiaría el modelo si es que la temperatura ambiente no es constante? Suponga, para fijar, ideas que $T_M(t) = 10 + 10\cos(t)$ (es decir la temperatura oscila en torno a los 10°).

Ejercicio 1.22. Cuando se saca un queque del horno, se mide que su temperatura es de 200°. Tres minutos después su temperatura es de 100°. ¿Cuánto tiempo toma para que el queque alcance 21° de temperatura si es que la temperatura ambiente es de 20°?

Ejercicio 1.23. Un termómetro se lleva del interior de una habitación aislada hacia el exterior, donde la temperatura es de 5°. Luego de 1 minuto, el termómetro mide 15°, y luego de 5 minutes mide 10°. ¿Cuál era la temperatura al interior de la habitación?

Ejercicio 1.24. Un cadáver se encuentra en una pieza cerrada donde la temperatura ambiente es de 20°. Al momento en que se encontró el cadáver, la temperatura del cuerpo era de 35°. Una hora después se hizo una segunda medición, que determinó que la temperatura era de 30°. Suponiendo que la hora de muerte es $t = 0$ y que la temperatura del cuerpo era de 37°, determine cuantas horas transcurrieron desde que la persona murió, hasta que se encontró el cadáver.

Ejercicio 1.25. El modelo de enfriamiento de Newton, no toma en cuenta la superficie del objeto que está en contacto con el ambiente (es razonable pensar que a mayor superficie, mayor debiese ser la pérdida/ganancia de temperatura). Una manera de corregir esto es considerar la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = kS(T - T_M),$$

donde S representa la superficie del cuerpo y k es una constante. Suponga que la superficie del cadáver encontrado en el problema anterior es de 4 m^2 y responda las mismas preguntas. ¿Cómo cambian sus respuestas si la superficie del cadáver es ahora de 3 m^2?

Ejercicio 1.26. En teoría de aprendizaje, la tasa a la que se memoriza un concepto suele suponerse es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de lo que se quiere memorizar, y que $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada. Determine y resuelva la ecuación diferencial que modela esta situación.

Ejercicio 1.27. Escriba un modelo que represente la situación de aprendizaje, pero que considere que la tasa de contenidos memorizados, además de ser proporcional a lo que queda por memoriza, disminuye producto del paso del tiempo a una tasa r. Resuelva el modelo obtenido, suponiendo que r es constante y conocida.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Nos enfocaremos en las EDOs lineales de segundo orden cuyos coeficientes son constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

donde $a \neq 0$, b y c son constantes conocidas, y $f(x)$ es una función conocida. Un problema de valor inicial para este tipo de ecuaciones tendrá la forma

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

2.1. EDOs lineales de segundo orden homogéneas

Son ecuaciones donde $g(x) = 0$, o sea de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.1}$$

Para resolver estas ecuaciones, proponemos una solución de la forma $y = e^{rx}$ y buscamos el(los) valor(es) de λ que nos da una solución.

Definición 2.1 (Ecuación auxiliar)**.** *Dado λ, definimos la ecuación auxiliar como*

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.2}$$

Para encontrar la solución general de la ecuación (2.1), resolvemos la ecuación auxiliar (2.2) y escribimos la solución general como[1]

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes, y la funciones y_1 e y_2 se denotan *soluciones de la ecuación homogénea*, y se calculan como:

Soluciones fundamentales

Caso 1: Dos raíces reales y distintas $b^2 - 4ac > 0$). Si las raíces son r_1 y r_2 entonces

$$y_1(x) = e^{r_1 x}$$

e

$$y_2(x) = e^{r_2 x}.$$

[1] Justificaremos la razón de esto mas adelante.

Caso 2: Una raíz real repetido $B^2 - 4AC = 0$. En este caso la raíz es $r_1 = -\frac{B}{2A}$ y tenemos que

$$y_1(x) = e^{r_1 x}$$

e

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}.$$

Caso 3: Dos raíces complejos conjugadas $b^2 - 4ac < 0$. Si las raíces son $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$ entonces

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Observación 2.1. ¿De dónde salen las funciones trigonométricas al tener raíces complejas?

La respuesta es la **Fórmula de Euler** que dice que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

de donde nuestra propuesta de solución e^{rx} en el caso de que $\lambda = \alpha + i\beta$ se transforma en

$$e^{rx} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)\right).$$

Proposición 2.1 (Principio de superposición)**.** *Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial* (2.1)*. Entonces*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

también es solución de (2.1)*.*

Demostración. Basta notar que

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + C_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$2y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Solución. Acá la ecuación característica es $2r^2 - 5r - 3 = (2r + 1)(r - 3) = 0$ de donde las raíces son $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 3$.

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{3x}$$

Ejemplo 2.2. Resolver el problema de valor inicial $y'' + 2y - y = 0$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Solución. Acá $r^2 + 2r - 1 = 0$ tiene como soluciones a $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$$y(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{(-1+\sqrt{2})x} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

Ejemplo 2.3. $6y'' + 5y' - 6y = 0$

Solución. La ecuación auxiliar es $6r^2 + 5r - 6 = (2r + 3)(3r - 2) = 0$, por lo que tenemos dos raíces distintas $r_1 = -\frac{3}{2}$ y $r_2 = \frac{2}{3}$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x}$$

Ejemplo 2.4. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es $r^2 - 10r + 25 = (r-5)^2$ de donde solo hay una raíz $r = 5$

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

Ejemplo 2.5. Resolver $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar es $r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0$, luego $r = -3$ es la única raíz. Por lo tanto

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

Ejemplo 2.6. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 7y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 7 = 0$ de donde $r = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 7}}{2} = -2 \pm i\sqrt{3}$ de donde

$$y(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\right)$$

Ejemplo 2.7. $5y'' + 2y' + y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar es $5r^2 + 2r + 1 = 0$ de donde $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{10} = \dfrac{-1 \pm 2i}{5}$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{5}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{2}{5}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$$

Observación 2.2. La idea utilizada para resolver la ecuación de segundo orden homogénea aplica también para ecuaciones diferenciales lineales de orden n a coeficientes constantes. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$$

se propone como solución $y(x) = e^{rx}$ y se llega a la ecuación auxiliar

$$r^3 + 3r^2 - r - 3 = (r+3)(r^2 - 1) = (r+3)(r+1)(r-1)$$

de donde se obtienen como raíces $r = -3, -1, 1$ y por lo tanto

$$y_1(x) = e^{-3x}, y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = e^{x}$$

son las soluciones fundamentales de la ecuación.

El teorema de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones tiene la siguiente forma:

Teorema 2.1. *Dados los números reales a, b, c, x_0, y_0, y_1, existe una única solución del problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ \qquad y(x_0) = y_0 \\ \qquad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

que además tiene como intervalo de solución al conjunto $(-\infty, \infty)$.

Como señalamos anteriormente, la existencia de dicha solución está garantizada pues encontramos de forma explícita dicha solución. La unicidad la demostraremos mas adelante cuando hablemos de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

Definición 2.2. *Dos funciones y_1 e y_2 son* linealmente dependientes *en un intervalo I si y sólo si existe una constante k tal que $y_1(x) = ky_2(x)$ en dicho intervalo. De no existir tal constante, diremos que y_1 e y_2 son* linealmente independientes *en I.*

Esta definición es importante, pues garantiza que si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

entonces cualquier solución de la ecuación tendrá la forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

que habíamos anunciado anteriormente.

¿Cómo verificamos que dos soluciones son linealmente independientes?

Definición 2.3 (Wronskiano)**.** *Dadas dos funciones diferenciables y_1 e y_2, definimos el Wronskiano de y_1 e y_2 como*

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

Proposición 2.2. *Si se cumple que el Wronskiano de y_1 e y_2 satisface $W(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo I, entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes.*

Ejemplo 2.8. Considere $y_1(x) = e^{ax}$, $y_2(x) = e^{bx}$ con $a \neq b$. Calcule $W(x)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \\ &= be^{ax}e^{bx} - ae^{ax}e^{bx} \\ &= (b-a)e^{(a+b)x} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que las funciones e^{ax} y e^{bx} son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.9. Considere $y_1(x) = e^{ax}$, $y_2(x) = xe^{ax}$ con a constante arbitraria. Calcule $W(x)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \\ &= e^{ax}(e^{ax} + axe^{ax}) - ae^{ax}xe^{ax} \\ &= e^{2ax} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que las funciones e^{ax} y xe^{ax} son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1. Considere $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ con a, b constantes arbitrarias, $b \neq 0$. Calcule $W(x)$ y verifique que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

2.1.1. Ecuación de Euler

La ecuación diferencial

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0.$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se propone una solución del tipo $y(x) = x^\mu$, de donde notamos que se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en μ

$$a\mu(\mu - 1) + b\mu + c = 0,$$

donde nuevamente se producen tres casos que nos permiten encontrar la solución general de la ecuación diferencial como
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
donde

Caso 1: Dos raíces reales y distintas. Si las raíces son μ_1 y μ_2 entonces
$$y_1(x) = x^{\mu_1}$$
e
$$y_2(x) = x^{\mu_2}.$$

Caso 2: Una raíz real repetido. En este caso denotamos la raíz repetida por μ y tenemos que
$$y_1(x) = x^{\mu}$$
e
$$y_2(x) = x^{\mu} \ln x.$$

Caso 3: Dos raíces complejos conjugadas. Si las raíces son $\mu_1 = \alpha + \beta i$ y $\mu_2 = \alpha - \beta i$ entonces
$$y_1(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$$
e
$$y_2(x) = x^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Observación 2.3. La razón por la que nuevamente aparecen funciones trigonométrica al encontraron con raíces complejas $\mu = \alpha + \beta i$ es la siguiente identidad:
$$x^{\mu} = e^{\mu \ln x} = e^{\alpha \ln x + i\beta \ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{i\beta \ln x} = x^{\alpha} \left[\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right].$$

2.2. EDOs lineales de segundo orden no-homogéneas

Es el caso de la ecuación
$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{2.3}$$
donde $f(x)$ es una función conocida. Para encontrar la solución general de esta ecuación, resolvemos primero la ecuación homogénea ($f(x) \equiv 0$) y obtenemos las funciones y_1 e y_2 como lo hicimos anteriormente (dependiendo de como sean las raíces de la ecuación auxiliar).

Teorema 2.2. *La solución general de la ecuación* (2.3) *se puede escribir como*
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$
donde $y_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea, es decir
$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$
con $y_1(t), y_2(t)$ las soluciones fundamentales. Por otra parte, la función $y_p(t)$ es cualquier *solución particular de la ecuación* (3.1).

Teorema 2.3 (Principio de superposición)**.** *Si y_{p_1} es una solución de la ecuación*
$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t)$$
y si y_{p_2} es una solución de la ecuación
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_2(t),$$
entonces $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$ es una solución de
$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t) + f_2(t).$$

2.2.1. Coeficientes indeterminados

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Caso 1: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

probamos $y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$ y buscamos los valores de las constantes o coeficientes indeterminados $A_0, A_1, \ldots, A_m$ que funcionan.

Ejemplo 2.10. Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 7x + 4$.

Solución. Tenemos que la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1) = 0$ de donde las soluciones fundamentales son

$$y_1(x) = e^{-3x} \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = e^x.$$

Como $f(x) = 7x + 4$, buscamos una solución de la forma $y_p(x) = Ax + B$. Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= 0 + 2A - 3(Ax + B) \\ &= -3Ax + (2A - 3B) \\ &= 7x + 4 \end{aligned}$$

de donde $-3A = 7$ y $2A - 3B = 4$, por lo tanto $A = -\frac{7}{3}$ y $B = \dfrac{-\frac{14}{3} - 4}{3} = -\frac{26}{9}$.

Caso 2: $f(x) = ae^{rx}$

Si r no es raíz de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$, probamos $y_p(x) = Ae^{bx}$ y buscamos el valor de la constante A que funciona.

Si r es una raíz de la ecuación auxiliar, probamos con $y_p(x) = Axe^{bx}$ si la raíz es simple, o con $y_p(x) = Ax^2e^{bx}$ si la raíz es doble.

Ejemplo 2.11. Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 4e^{5x}$.

Solución. Como la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1)$ vemos que $r = 5$ no es raíz de la ecuación, por lo que proponemos $y_p(x) = Ae^{5x}$ como solución.

Ejemplo 2.12. Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$.

Solución. Como la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1)$ vemos que $r = 1$ es raíz simple, por lo que proponemos $y_p(x) = Axe^x$ como solución.

Ejemplo 2.13. Resolver la ecuación $y'' + 2y' + y = -5e^{-x}$.

Solución. Como la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 1 = (r+2)^2 =$ vemos que $r = -1$ es una raíz doble, por lo que proponemos $y_p(x) = Ax^2e^{-x}$ como solución.

Caso 3: $f(x) = \rho\cos(\lambda x) + \delta\operatorname{sen}(\lambda x)$

Si $\lambda \neq \pm bi$ probamos $y_p(x) = A\cos(\lambda x) + C\operatorname{sen}(\lambda x)$ y buscamos los valores de las constantes o coeficientes indeterminados A, B que funcionan. Si $r = \pm\lambda i$ probamos con $y_p(x) = Ax\cos(\lambda x) + Cx\operatorname{sen}(\lambda x)$

Ejemplo 2.14. Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 7\cos(3x)$.

Solución. La ecuación auxiliar es $r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1)$, donde $r = 0 + 3i$ no es raíz, por lo que proponemos $y_p(x) = A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)$ como solución. Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= (-9A\cos(3x) - 9B\operatorname{sen}(3x) + 2(-3A\operatorname{sen}(3x) + 3B\cos(3x) - 3(A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)) \\ &= (-12A + 6B)\cos(3x) + (-12B - 6A)\operatorname{sen}(3x) \\ &= 7\cos(3x) \end{aligned}$$

de donde $-12A + 6B = 7$ y $-12B - 6A = 0$, por lo tanto $A = -\dfrac{7}{15}$ y $B = \dfrac{7}{30}$.

Caso 4: $f(x) = ax^n e^{rx}$

Probamos con

$$y_p(x) = x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)e^{rt}$$

donde

1. $s = 0$ si $ar^2 + br + c \neq 0$.
2. $s = 1$ si $ar^2 + br + c = 0$ es una raíz simple.
3. $s = 2$ si $ar^2 + br + c = 0$ es una raíz doble.

Caso 4: $f(x) = kx^m e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ **ó** $kx^m e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ probamos con

$$y_p(x) = x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m)e^{\alpha t}\cos(\beta x) + x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m)e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta x)$$

donde

1. $s = 0$ si $r = \alpha + i\beta$ no es raíz de $ar^2 + br + c = 0$.
2. $s = 1$ si $r = \alpha + i\beta$ es raíz de $ar^2 + br + c = 0$.

2.2.2. Variación de parámetros

Este método aplica a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

donde se conocen las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y_1 e y_2. Con esta información encontramos una *solución particular* mediante

$$y_p(x) := u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

donde, si denotamos a $W(x)$ como el Wronskiano[2] de las soluciones y_1 e y_e, tenemos que

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{a_2W(x)}\mathrm{d}x$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{a_2W(x)}\mathrm{d}x.$$

Estas fórmulas se obtiene al reemplazar la función y_p en la ecuación, esto es

$$\begin{aligned}
g &= a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y \\
&= a_2(x)(u_1y_1 + u_2y_2)'' + a_1(x)(u_1y_1 + u_2y_2)' + a_0(u_1y_1 + u_2y_2) \\
&= a_2(x)(\underbrace{u_1'y_1 + u_2'y_2}_{=0} + u_1y_1' + u_2y_2')' + a_1(x)(\underbrace{u_1'y_1 + u_2'y_2}_{=0} + u_1y_1' + u_2y_2') + a_0(u_1y_1 + u_2y_2) \\
&= a_2(x)(u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'') + a_1(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + a_0(x)(u_1y_1 + u_2y_2) \\
&= u_1(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + u_2(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) \\
&\qquad + a_2(x)(u_1'y_1' + u_2'y_2'),
\end{aligned}$$

donde hemos impuesto que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{2.4}$$

de donde, como y_1 e y_2 son soluciones de la ecuaciones deducimos que se debe cumplir que

$$a_2(x)(u_1'y_1' + u_2'y_2') = g(x). \tag{2.5}$$

[2]Notar la importancia de que las soluciones y_1 e y_2 sean linealmente independientes, de lo contrario $W(x) = 0$.

Juntando lo que dicen las ecuaciones (2.4) y (2.5) obtenemos

$$u_1' = -\frac{y_2 g}{a_2(y_1 y_2' - y_1' y_2)} = -\frac{y_2 g}{a_2 W} = \frac{W_1}{a_2 W}$$
$$u_2' = \frac{y_1 g}{a_2(y_1 y_2' - y_1' y_2)} = \frac{y_1 g}{a_2 W} = \frac{W_2}{a_2 W},$$

de donde se obtienen la fórmulas anteriores. En la fórmula anterior se tiene que

$$W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$
$$W_2 = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{bmatrix}$$

Así obtenemos que la solución general de la EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea tiene la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Ejemplo 2.15. Resolver la ecuación $y'' - 4y = x + 2$.

Solución. Tenemos que la ecuación característica es $r^2 - 4 = (r-2)(r+2) = 0$ de donde obtenemos que las soluciones fundamentales son $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$. Calculamos

$$W(e^{2x}, e^{-2x})(x) = \det \begin{bmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} = -2 - 2 = -4$$

Ahora buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{-2x},$$

donde

$$u_1'(x) = -\frac{e^{-2x}(x+2)}{-4} = \frac{1}{4}(x+2)e^{-2x} \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{1}{4}(x+2)e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}(2x+5)e^{-2x},$$

y

$$u_2'(x) = \frac{e^{2x}(x+2)}{-4} = -\frac{1}{4}(x+2)e^{2x} \Rightarrow u_2(x) = \int -\frac{1}{4}(x+2)e^{2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}(2x+3)e^{2x}.$$

Por lo tanto una solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{1}{16}(2x+5)e^{-2x}e^{2x} + -\frac{1}{16}(2x+3)e^{2x}e^{-2x} = -\frac{1}{4}(x+2).$$

Ejemplo 2.16. Resolver al ecuación diferencial $y'' - 4y + 4y = (x+1)e^{2x}$.

Solución. En este caso la ecuación auxiliar es $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$, de donde $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$, cuyo Wronskiano es

$$W(e^{2x}, xe^{2x})(x) = \det \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{bmatrix} = e^{4x}.$$

Si buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)xe^{2x},$$

entonces

$$u_1'(x) = -\frac{y_2 g}{a_2 W} = -\frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = -x(x+1) \Rightarrow u_1(x) = \int -x(x+1)\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2},$$

y

$$u_2'(x) = \frac{y_1 g}{a_2 W} = \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = x+1 \Rightarrow u_2(x) = \int (x+1)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x$$

de donde una solución particular es

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = e^{2x}\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^2\right) = e^{2x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right),$$

y así la solución general está dada por

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}.$$

Ejemplo 2.17. Resolver la ecuación diferencial $4y'' + 36y = \csc(3x)$.

Solución. En este caso las soluciones fundamentales son $y_1(x) = \cos(3x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(3x)$ cuyo Wronskiano es

$$W(\cos(3x), \operatorname{sen}(3x) = \det \begin{bmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3\operatorname{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{bmatrix} = 3\cos^2(3x) + 3\operatorname{sen}^2(3x) = 3.$$

Luego si $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ entonces

$$u_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(3x)\csc(3x)}{4 \cdot 6} = -\frac{1}{12} \Rightarrow u_1(x) = \int -\frac{1}{12}\mathrm{d}x = -\frac{x}{12},$$

y

$$u_2'(x) = \frac{\cos(3x)\csc(3x)}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12}\cot(3x) \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{1}{12}\cot(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen}(3x)|,$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{x}{12}\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen}(3x)|\operatorname{sen}(3x)$$

con solución general dada por

$$y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{36}\operatorname{sen}(3x)\ln|\operatorname{sen}(3x)|.$$

2.3. Problemas de valor inicial

Es el caso de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

cuenta además con una condición inicial del tipo

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,$$

donde $x_0,\ y_0,\ y_1$ son valores conocidos. Dado que sabemos resolver la ecuación y obtenemos una solución de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

la tarea es encontrar las constantes C_1 y C_2 de modo que se satisfaga la condición inicial (es decir, evaluamos la función $y(x)$ y su derivada, $y'(x)$ cuando $x = x_0$). Esto se traduce en resolver un sistema lineal de 2×2.

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.2. Verifique si la función dada es o no una solución de la EDO de segundo orden.

1. $y(x) = e^x - e^{-x}$; $y'' - y = 0$.
2. $y(x) = 4e^{4x} - 10e^{-x}$; $y'' - 3y' - 4y = 0$.
3. $y(x) = 10 - x^2$; $xy'' - y' = 0$.
4. $y(x) = 4 + 10\cos x - \operatorname{sen} x$; $y'' + y = 0$.
5. $y(x) = 3e^{2x}$; $y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$.
6. $y(x) = \operatorname{sen}(5x)$; $y'' + 5y' - y = \cos x$.
7. $y(x) = x^2 + 3x$; $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16$.

Ejercicio 2.3. Resuelva las siguientes EDOs de segundo orden.

1. $y'' - y' - 12y = 0$.
2. $y'' - 4y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
4. $4y'' - 4y' + y = 0$.
5. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$.
6. $2y'' + 2y' + y = x$.

Ejercicio 2.4. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial.

1. $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
2. $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.
3. $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.
4. $4y'' - 4y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.
5. $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $2y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ejercicio 2.5. Resuelva las siguientes ecuaciones del tipo Cauchy-Euler.

1. $x^2y'' = 2y$.
2. $xy'' = 3y'$.
3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$.
4. $4x^2 + 4xy' - y = 0$.
5. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$.
6. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y(-2) = 8$, $y'(-2) = 0$.

Ejercicio 2.6. Considere la ecuación de Cauchy-Euler $x^2y'' - xy' + y = \ln x$. Para resolver esta ecuación se propone lo siguiente.

1. Considere la transformación $x = e^t$ y verifique que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$.
2. Demuestre que al hacer dicha transformación, la ecuación se puede reescribir como
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t,$$
resuelva esta ecuación usando coeficientes indeterminados.
3. Encuentre la solución de la ecuación original.

Ejercicio 2.7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular.

1. $4y'' + 9y = 15$.
2. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$.
3. $y'' - 8y + 20y = 100x^2 - 26xe^x$.
4. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$.
5. $y'' - 16y = 2e^{4x}$.
6. $y'' - 4y = (x^2 - 3)\operatorname{sen}(2x)$.
7. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3\operatorname{sen} x)$.
8. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
9. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.
10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0\cos(\gamma t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Ejercicio 2.8. Encuentre la solución de la ecuación diferencial dada dada utilizando el método de variación de parámetros.

1. $y'' + y = \tan x$.
2. $y'' + y = \sec x \tan x$.
3. $y'' + y = \sec^2 x$.
4. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$.
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$.
6. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$.
7. $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$.
8. $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales de orden n

Una EDO lineal de orden n es una ecuación de la forma

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = f(t),$$

donde $a_n(t) \neq 0$, $a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ y $f(t)$ son funciones conocidas. Un problema de valor inicial para este tipo de ecuaciones tendrá la forma

$$\begin{cases} a_n(t)\dfrac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\dfrac{dy}{dt} + a_0(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dt}(t_0) = y_1 \\ \dfrac{d^2y}{d^2t}(t_0) = y_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde $(t_0, y_0), (t_0, y_1), \ldots, (t_0, y_{n-1})$ son dados.

Resolver una ecuación diferencial de este tipo, es en general bastante difícil cuando se trabaja con coeficientes variables, por lo que una primera etapa para estudiar estas EDOs es entender que ocurre en el caso de coeficientes constantes.

La estrategia para estudiar el caso de coeficientes constantes es bastante similar a la vista en el caso de EDOs lineales de segundo orden. Aquí solo ilustraremos como se generaliza dicha idea.

3.1. EDOs lineales homogéneas

Tal como en el caso de EDOs de segundo orden, buscamos las llamadas soluciones fundamentales de la ecuación homogénea

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0,$$

para ello buscamos una solución de la forma

$$y(t) = e^{rt},$$

de donde obtenemos la *Ecuación Auxiliar*

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0,$$

que gracias al teorema fundamental del álgebra tendrá n soluciones (posiblemente todas distintas, algunas repetidas o incluso en pares de raíces complejas conjugadas). En virtud de esto tenemos diversas situaciones posibles:

3.1.1. Soluciones fundamentales

Caso 1: Por cada raíz real no repetida r entonces

$$e^{rt}$$

es parte de las soluciones fundamentales.

Caso 2: Por cada raíz real r que aparece repetida k veces, entonces

$$e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}, \ldots, t^{k-1}e^{rt}$$

son parte del sistema fundamental de soluciones.

Caso 3: Por cada par de raíces complejas conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ no repetidas, entonces las funciones complejas

$$e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$$

o bien, las funciones reales

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

se agregan al sistema fundamental de soluciones.

Caso 4: Por cada raíz compleja conjugada $r = \alpha \pm \beta i$ repetida k veces, entonces

$$\begin{gathered}
e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),\\
te^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),\\
t^2e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^2e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),\\
\vdots\\
t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{k-1}e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)
\end{gathered}$$

se agregan al sistema fundamental de soluciones.

Teorema 3.1. *Dada una EDO lineal de orden n a coeficientes constantes, entonces la solución general tendrá la forma*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \ldots + c_ny_n(t),$$

donde las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones fundamentales linealmente independientes.

Teorema 3.2. *Un conjunto de n funciones diferenciables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes si se cumple que su Wronskiano es no nulo, esto es*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \ldots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \ldots & y_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t)\end{bmatrix} \neq 0.$$

Teorema 3.3. *Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces de la ecuación auxiliar, entonces las soluciones fundamentales encontradas mediante el método anteriormente ilustrado son linealmente independientes.*

Ejemplo 3.1. Resolver la ecuación $y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^3 - 5r^2 - 22r + 56 = (r+4)(r-2)(r-7) = 0 \Rightarrow r_1 = -4,\ r_2 = 2,\ r_3 = 7,$$

es decir tenemos 3 raíces reales distintas, luego

$$y_1(t) = e^{-4t},\ y_2(t) = e^{2t},\ y_3(t) = e^{7t}$$

son las soluciones fundamentales de la ecuación, y la solución general está dada por

$$y(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} + C_3e^{7t}.$$

Ejemplo 3.2. Encontrar las soluciones fundamentales de $2y'''' + 11y''' + 18y'' + 4y' - 8y = 0$.

Solución. En este caso la ecuación auxiliar es

$$2r^4 + 11r^3 + 18r^2 + 4r - 8 = (2r-1)(r+2)^3 = 0,$$

por lo que $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -2$ aparece repetida 3 veces. Con esto las soluciones fundamentales son

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}: &\quad y_1(t) = e^{\frac{1}{2}t}, \\ r_2 = -2: &\quad y_2(t) = e^{-2t},\ y_3(t) = te^{-2t}, y_4(t) = t^2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Encontrar las soluciones fundamentales de $y^{(5)} + 12y^{(4)} + 104y^{(3)} + 408y'' + 1156y' = 0$.

Solución. Acá tenemos la ecuación auxiliar

$$r^5 + 12r^4 + 104r^3 + 408r^2 + 1156r = r(r^2 + 6r + 34)^2 = 0,$$

luego las raíces son $r_1 = 0$, $r_2 = -3 + 5i$, $r_3 = -3 - 5i$, donde las raíces r_2 y r_3 aparecen repetidas 2 veces. Con esto las soluciones fundamentales son

$$\begin{aligned} r_1 = 0: &\quad y_1(t) = e^{0t} = 1, \\ r_2 = -3 + 5i: &\quad y_2(t) = e^{-3t}\cos(5t),\ y_3(t) = te^{-3t}\cos(5t), \\ r_3 = -3 - 5i: &\quad y_4(t) = te^{-3t}\operatorname{sen}(5t),\ y_5(t) = te^{-3t}\operatorname{sen}(5t). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4. Encontrar las soluciones fundamentales de $y^{(4)} - 9y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar es $r^4 - 9 = (r^2 - 3)(r^2 + 3) = 0$, luego tenemos 4 posibles raíces

$$r_1 = -\sqrt{3}, r_2 = \sqrt{3}, r_3 = -i\sqrt{3}, r_4 = i\sqrt{3},$$

de donde las soluciones fundamentales son

$$\begin{aligned} r_1 = -\sqrt{3}: &\quad y_1(t) = e^{-\sqrt{3}t}, \\ r_2 = \sqrt{3}: &\quad y_2(t) = e^{\sqrt{3}t}, \\ r_3 = i\sqrt{3}: &\quad y_3(t) = \cos(\sqrt{3}t), \\ r_4 = -i\sqrt{3}: &\quad y_4(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. Encontrar las soluciones fundamentales de $y^{(4)} + 16y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar es $r^4 + 16 = 0$, luego debemos encontrar las 4 posibles raíces. Este problema es un poco mas difícil pues requiere un mejor entendimiento de los números complejos. Solo diremos que las soluciones son

$$r_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, r_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, r_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, r_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

de donde las soluciones fundamentales son

$$\begin{aligned} r_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}: &\quad y_1(t) = e^{\sqrt{2}t}\cos(\sqrt{2}t), \\ r_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}: &\quad y_2(t) = e^{\sqrt{2}t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t), \\ r_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}: &\quad y_3(t) = e^{-\sqrt{2}t}\cos(\sqrt{2}t), \\ r_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} &\quad y_4(t) = e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

3.2. EDOs lineales no homogéneas

Para resolver la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{3.1}$$

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *La solución general de la ecuación* (3.1) *se puede escribir como*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

donde $y_h(t)$ *es la solución general de la ecuación homogénea, es decir*

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t)$$

con $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *soluciones fundamentales. Por otra parte, la función* $y_p(t)$ *es* cualquier *solución particular de la ecuación* (3.1).

Teorema 3.5 (Principio de superposición)**.** *Si* $y_{p_1}(t)$ *es solución de*

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f_1(t),$$

y si $y_{p_2}(t)$ *es solución de*

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f_2(t),$$

entonces la función $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_1}(t)$ *es solución de*

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f_1(t) + f_2(t).$$

3.2.1. Coeficientes indeterminados

Al igual que en el caso de EDOs lineales de segundo orden, el método de coeficientes indeterminados para EDOs lineales de orden n no-homogéneas a coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

consiste en *adivinar* una solución dependiendo de la forma que tenga la función $f(t)$.

- Si $f(t) = A_m t^m + A_{m-1}t^{m-1} + \ldots + A_1 t + A_0$, entonces buscamos una solución de la forma

  $$y_p(t) = t^s(B_m t^m + \ldots + B_1 t + B_0),$$

  donde $s = 0$ si $r = 0$ no es raíz de la ecuación. Si $r = 0$ es raíz de la ecuación auxiliar que está repetida k veces, entonces $s = k$.

- Si $f(t) = Ct^m e^{rt}$, entonces buscamos una solución de la forma

  $$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \ldots + A_1 t + A_0)e^{rt},$$

  donde $s = 0$ si r no es raíz de la ecuación auxiliar. Si r es raíz de la ecuación auxiliar que está repetida k veces, entonces $s = k$.

- Si $f(t) = At^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ o $f(t) = Bt^m e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, entonces buscamos una solución de la forma

  $$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \ldots + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + t^s(B_m t^m + \ldots + B_1 t + B_0)e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

  donde $s = 0$ si $r = \alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar. Si r es raíz de la ecuación auxiliar que está repetida k veces, entonces $s = k$.

Ejemplo 3.6. Resolver la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = 5 - e^t + e^{2t}$.

Solución. Tenemos que la ecuación auxiliar es $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3 = 0$, luego $r = 1$ es la única raíz y está repetida 3 veces, por lo que las soluciones fundamentales son

$$y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = te^t,\ y_3(t) = t^2e^t.$$

Debemos usar coeficientes indeterminadas para las 3 funciones que aparecen al lado derecho, es decir

$$f_1(t) = 5,\ f_2(t) = e^t,\ f_3(t) = e^{2t}.$$

Para $f_1(t) = 5$ buscamos una solución de la forma $y_{p_1}(t) = A$, luego reemplazando en la ecuación obtenemos que

$$-A = 5 \Rightarrow A = -5.$$

Para $f_2(t) = e^t$ notamos que $r = 1$ es una raíz que está repetida 3 veces, por lo que buscamos una solución de la forma $y_{p_2}(t) = Bt^3e^t$, reemplazando en la ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned} y'''_{p_2} - 3y''_{p_2} + 3y'_{p_2} - y_{p_1} &= (6Be^t + 18Bte^t + 9Bt^2e^t + Bt^3e^t) - 3(6Bte^t + 6Bt^2e^t + Bt^3e^t) \\ &\quad + 3(3Bt^2e^t + Bt^3e^t) - (Bt^3e^t) \\ &= 6Be^t \\ &= e^t, \end{aligned}$$

de donde $B = \frac{1}{6}$. Finalmente, para $f_3(t) = e^{2t}$ vemos que $r = 2$ no es raíz de la ecuación auxiliar, de donde podemos buscar una solución de la forma $y_{p_3}(t) = Ce^{2t}$. Reemplazando en la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} y'''_{p_3} - 3y''_{p_3} + 3y'_{p_3} - y_{p_3} &= (8Ce^{2t}) - 3(4Ce^{2t}) + 3(2Ce^{2t}) - Ce^{2t} \\ &= Ce^{2t} \\ &= e^{2t}, \end{aligned}$$

así $C = 1$. Una solución particular del problema es entonces

$$y_p(t) = -5 - \frac{1}{6}t^3e^t + e^{2t}.$$

3.2.2. Variación de parámetros

El método visto para el caso de segundo orden se puede generalizar para ecuaciones diferenciales lineales de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t) = f(t),$$

cuya sistema fundamental de soluciones está dado por $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, y cuya solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$y_h(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \ldots + C_ny_n(t).$$

Se busca una solución particular de la forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \ldots + u_n(t)y_n(t).$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son funciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u'_1y_1 + u'_2y_2 + \ldots + u'_ny_n &= 0 \\ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + \ldots + u'_ny'_n &= 0 \\ &\vdots \\ u'_1y_1^{(n-2)} + u'_2y_2^{(n-2)} + \ldots + u'_ny_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}$$

$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} = f,$$

de donde, resolviendo el sistema de ecuaciones para $\{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$, obtenemos que

$$u_i'(t) = \frac{f(t)W_i}{W},$$

donde se ha resuelto el problema utilizando la regla de Cramer, es decir,

$$W = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$W_k = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \ldots & 0 & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \ldots & 0 & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \ldots & \underbrace{1}_{\text{columna } i} & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.7. Resolver la ecuación $y''' - 2y'' - 21y' - 18y = 3 + 4e^{-t}$.

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^3 - 2r^2 - 21r - 18 = (r+3)(r+1)(r-6) = 0 \Rightarrow r_1 = -3,\ r_2 = -1,\ r_3 = 6,$$

de donde las soluciones fundamentales son

$$y_1(t) = e^{-3t},\ y_2(t) = e^{-t},\ y_3(t) = e^{6t}.$$

El Wronskiano de las soluciones es

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & e^{6t} \\ -3e^{-3t} & -e^{-t} & 6e^{6t} \\ 9e^{-3t} & e^{-t} & 36e^{6t} \end{bmatrix} \\ &= 126e^{2t} \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \det \begin{bmatrix} 0 & y_2(t) & y_3(t) \\ 0 & y_2'(t) & y_3'(t) \\ 1 & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & e^{6t} \\ 0 & -e^{-t} & 6e^{6t} \\ 1 & e^{-t} & 36e^{6t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= 7e^{5t}$$

$$\begin{aligned} W_2(t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & 0 & y_3(t) \\ y_1'(t) & 0 & y_3'(t) \\ y_1''(t) & 1 & y_3''(t) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & e^{6t} \\ -3e^{-3t} & 0 & 6e^{6t} \\ 9e^{-3t} & 1 & 36e^{6t} \end{bmatrix} \\ &= -9e^{3t} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W_3(t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & 0 \\ y_1'(t) & y_2'(t) & 0 \\ y_1''(t) & y_2''(t) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & 0 \\ -3e^{-3t} & -e^{-t} & 0 \\ 9e^{-3t} & e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2e^{-4t} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{f(t)W_1(t)}{W(t)} = \frac{(3+4e^{-t})(7e^{5t})}{126e^{2t}} = \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{2}{9}e^{2t} \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{9}e^{2t} \\ u_2'(t) &= \frac{f(t)W_2(t)}{W(t)} = \frac{(3+4e^{-t})(-9e^{3t})}{126e^{2t}} = -\frac{3}{14} - \frac{2}{7}e^{t} \Rightarrow u_2(t) = -\frac{3}{14}t - \frac{2}{7}e^{t} \\ u_3'(t) &= \frac{f(t)W_3(t)}{W(t)} = \frac{(3+4e^{-t})(2e^{-4t})}{126e^{2t}} = \frac{1}{21}e^{-6t} + \frac{4}{63}e^{-7t} \Rightarrow u_3(t) = -\frac{1}{126}e^{-6t} - \frac{4}{441}e^{-7t}. \end{aligned}$$

Con lo anterior tenemos que una solución particular de nuestro problema está dada por

$$\begin{aligned} y_p(t) &= u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + u_3(t)y_3(t) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{5}{49}e^{-t} - \frac{2}{7}te^{-t}. \end{aligned}$$

3.3. Las EDOs lineales de orden n son sistemas de ecuaciones de primer orden

Una EDO lineal de la forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = f(t) \tag{3.2}$$

siempre se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para ello hay que considerar como incógnita a la función y, pero también a sus derivadas, esto es, si decimos que $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, $x_3(t) = y''(t) = x_1'(t)$, $\ldots$, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ entonces podemos escribir el problema de encontrar $y(t)$ en (3.2) como el problema de encontrar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ solución del sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n y}{dt^n} = f(t) - a_{n-1}(t)x_n - \ldots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1,$$

o en forma matricial, $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$, donde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_0(t) & -a_1(t) & -a_2 & -a_3(t) & -a_4(t) & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8. Expresar la ecuación $4y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$ como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Solución. Consideramos $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t)$, de donde

$$x_1' = y' = x_2$$
$$x_2' = y'' = \frac{1}{4}\left(e^{3t} + 5y' - 6y\right) = \frac{1}{4}\left(e^{3t} + 5x_2 - 6x_1\right) = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}e^{3t},$$

o bien $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}e^{3t} \end{bmatrix}$$

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Verificar que las funciones $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, e^{r_3 t}$ son linealmente independientes si r_1, r_2, r_3 son todos distintos.

Ejercicio 3.2. Determine si las funciones dadas son linealmente independientes en el intervalo indicado.

1. $\left\{e^{3t}, e^{-2t}, e^{5t}\right\}$ en $(-\infty, \infty)$.
2. $\left\{1 + t, 1 + t^2, 6\right\}$ en $(0, \infty)$.
3. $\{\operatorname{sen} t, \cos t, \tan t\}$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
4. $\left\{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}\right\}$ en $(-\infty, \infty)$.

Ejercicio 3.3. Verifique que las funciones $\left\{t, t^2, t^3\right\}$ son soluciones fundamentales de la ecuación

$$t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = 0$$

cuando $t > 0$. Para ello, primero compruebe que las funciones son soluciones de la ecuación, y luego calcule el Wronskiano para determinar que son linealmente independientes.

Ejercicio 3.4. Determine la solución general para las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$.
2. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = 0$.
3. $y''' - y'' + 2y = 0$.
4. $y^4 - y = 0$.
5. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.
6. $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' + 18y' + 9y = 0$. *Ayuda: $r = 3i$ es solución de la ecuación auxilar.*

Ejercicio 3.5. Escriba las soluciones fundamentales para la ecuación auxiliar dada.

1. $(r-1)^2(r+3)^2(r^2+2r+5)^2 = 0.$
2. $(r+1)^2(r-6)^3(r+5)(r^2+1)^2(r^2+4) = 0.$

Ejercicio 3.6. Resuelva el problema de valor inicial dado.

1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -19$.
2. $y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 13$.

Ejercicio 3.7. Encuentre soluciones particulares para las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de coeficientes indeterminados.

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^t + t^2$.
2. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-t} + \operatorname{sen} t$.
3. $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2t}$.
4. $y''' + y'' - 2y = te^t + 1$.

Ejercicio 3.8. Encuentre la solución general de la ecuaciones del ejercicio anterior.

Ejercicio 3.9. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de los coeficientes indeterminados.

1. $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18t^2 - 18t + 22$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = -12$.
2. $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3t}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -5$.
3. $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 34te^{-2t} - 16e^{-2t} - 10t^2 + 6t + 34$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Ejercicio 3.10. Use variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación

$$t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \operatorname{sen} t,$$

sabiendo que $\left\{t, t^{-1}, t^2\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Ejercicio 3.11. Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de las ecuaciones siguientes.

1. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2t}$.
2. $y''' - 2y'' + y' = t$.
3. $y''' + 3y'' - 4y = e^{2t}$.
4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t$.
5. $y''' + y' = \tan t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
6. $y''' + y' = \sec t \tan t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 3.12. Considere la ecuación diferencial

$$t^3y''' - 2t^2y'' + 3ty' - 3y = t^2.$$

1. Muestre que la funciones $\left\{t, t\ln t, t^3\right\}$ son soluciones fundamentales de la ecuación. Para ello verifique que son soluciones de la ecuación homogénea y que son linealmente independientes.
2. Use variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación.
3. Escriba la solución general del problema.

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden consiste de n funciones incógnitas $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ y n ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Tal como sucede con las ecuaciones algebraicas, es conveniente utilizar notación matricial para escribir estos sistemas, para ello definimos

Definición 4.1 (Matriz asociada). *Es la matriz*

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

y también usaremos notación de vectores para las soluciones, esto es, denotaremos por

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'(t) = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

de donde el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}(x).$$

Ejemplo 4.1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y \end{aligned}$$

se puede escribir en notación matricial $\mathbf{X}'(t) = A \cdot \mathbf{X}$, donde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Definición 4.2 (Vector solución)**.** *Dado un sistema lineal $\mathbf{X}'(t) = A(t)X(t) + \mathbf{F}(t)$, decimos que una $X(t)$ es un vector solución*

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

si las funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones (4.1).

Ejemplo 4.2. Verificar que

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son vectores solución de $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X}$.

Solución. En efecto, tenemos que $\mathbf{X}_1'(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ y

$$A \cdot \mathbf{X}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1'(t).$$

Similarmente $\mathbf{X}_2'(t) = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ y

$$A \cdot \mathbf{X}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{-2t} \\ 30e^{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'(t).$$

Teorema 4.1 (Existencia y unicidad para el problema de valor inicial)**.** *Si $A(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ son funciones continuas en un intervalo I, entonces el problema de valor inicial*

$$\mathbf{X}'(t) = A(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

tiene una única solución en el intervalo I cuando $t_0 \in I$.

Teorema 4.2 (Principio de superposición)**.** *Sean $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ vectores soluciones de un sistema homogéneo $\mathbf{X}'(t) = A(t)\mathbf{X}(t)$, entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \ldots + c_k\mathbf{X}_k(t)$$

también es solución del sistema homogéneo.

Ejemplo 4.3.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

es solución del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

Definición 4.3 (Independencia lineal)**.** *Diremos que k vectores $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ son linealmente independientes si se cumple que*

$$c_1\mathbf{X}_1 + \ldots + c_k\mathbf{X}_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

En caso contrario diremos que los vectores son linealmente dependientes.

Teorema 4.3 (Criterio del Wronskiano)**.** *Sean $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$ vectores solución de un sistema de ecuaciones $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$. Los vectores son linealmente independientes si el Wronskiano*

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)(t) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \ldots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \neq 0,$$

donde

$$\mathbf{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix},$$

Definición 4.4. *Sean $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$ vectores solución linealmente independientes de un sistema de ecuaciones $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$. La matriz $\mathcal{X}$ definida como*

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \ldots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

se le llama Matriz fundamental *para el sistema.*

Ejemplo 4.4. Los vectores solución

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Solución. Tenemos que

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)(t) = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix} = 8e^{4t} \neq 0.$$

Definición 4.5 (Conjunto fundamental)**.** *Cualquier conjunto linealmente independiente $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ de n vectores solución del sistema de n ecuaciones $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ se dirá* conjunto fundamental de soluciones*.*

Teorema 4.4. *Dado un conjunto fundamental de soluciones* $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ *para el sistema* $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$*, entonces la solución general del sistema está dada por*

$$\mathbf{X}_h(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + \ldots + c_n\mathbf{X}_n(t),$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ *son constantes arbitrarias.*

Asimismo, la solución general de un sistema no-homogéneo $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$ *tendrá la forma*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t),$$

donde $\mathbf{X}_h$ *es la solución general del sistema homogéneo, y* $\mathbf{X}_p$ *es una solución particular del sistema no-homogéneo.*

4.1. Sistema fundamental para sistemas homogéneos a coeficientes constantes

En este caso la matriz asociada $A(t)$ es una matriz constante, es decir

$$A(t) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ son números reales.

Buscamos una solución de la ecuación $\mathbf{X}'(t) = A \cdot \mathbf{X}(t)$ de la forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{k}e^{\lambda t},$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector constante y λ es una constante (real o imaginaria), ambos a determinar. Dicho en otras palabras, buscamos constantes $\lambda, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ tales que

$$x_i(t) = \mathbf{k}_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si reemplazamos en la ecuación notamos que

$$\mathbf{X}'(t) = \lambda\mathbf{k}e^{\lambda t} = A\mathbf{k}e^{\lambda t} \Rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{k}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{k} = 0,$$

de donde deducimos que para que eso ocurra, se debe cumplir que λ es un valor propio de la matriz A y $\mathbf{k}$ es el respectivo valor propio.

Teorema 4.5. *Si la matriz* A *tiene* n *vectores propios linealmente independientes* $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$ *y si* λ_i *es el valor propio asociado a* $\mathbf{k}_i$ *entonces*

$$\left\{e^{\lambda_1}\mathbf{k}_1, e^{\lambda_2}\mathbf{k}_2, \ldots, e^{\lambda_n}\mathbf{k}_n\right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones para la ecuación.

4.1.1. Valores propios reales

Teorema 4.6. *Si la matriz* A *tiene* n *valores propios reales y todos distintos, entonces los vectores propios asociados forman un conjunto linealmente independiente y la solución general del sistema* $X' = AX$ *es de la forma*

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{k}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{k}_2e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n\mathbf{k}_ne^{\lambda_n t}.$$

***Ejemplo 4.5*.** Resolver el sistema

$$x' = 2x + 3y,$$
$$y' = 2x + y.$$

Solución. En este caso la matrix asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

cuya ecuación característicaestá dado por $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$, por lo que tenemos 2 valores propios reales y distintos: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora debemos encontrar los vectores propios, para ello debemos resolver el sistema $(A - \lambda I)k = 0$ para cada valor propio.

Si $\lambda = -1$ tenemos que

$$0 = (A - rI)k = \begin{bmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k_1 + 3k_2 \\ 2k_1 + 2k_2 \end{pmatrix}$$

por lo que $k_1 = -k_2$. tenemos que el vector propio k asociado a $\lambda_1 = -1$ es de la forma

$$\mathbf{k}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar, buscamos el vector propio para $\lambda = 4$ y obtenemos que

$$\mathbf{k}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así un conjunto fundamental de soluciones para el sistema está dada por

$$\mathbf{k}_1 e^{-t}, \mathbf{k}_2 e^{4t}$$

o bien se puede decir que

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es la solución general del sistema.

Ejemplo 4.6. Encuentre las soluciones fundamentales del sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución. La ecuación característica es

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -1((-4-\lambda)(-1) - 1) + (-3-\lambda)((-4-\lambda)(5-\lambda) - 1) \\ &= -(3+\lambda) - (3+\lambda)((-4-\lambda)(5-\lambda) - 1) \\ &= -(3+\lambda)(4+\lambda)(5-\lambda), \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos 3 valores propios: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 5$. Los valores propios entonces se obtienen al resolver las ecuaciones $(A - \lambda_i I)\mathbf{k}_i = 0 =$, es decir
$\lambda_1 = -4$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila 3-fila 1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 1 por fila 2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 1-9fila 2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

por lo tanto si $k_{13} = 1$ entonces $k_{12} = -1$ y $k_{11} = 10$ y se obtiene el vector propio

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila 2+fila 1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 2 por fila 3}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 3 -9fila 2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 1 -fila 2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

así si $k_{21} = k_{23}$ y $k_{22} = 0$, por lo que si $k_{23} = 1$ se tiene que el vector propio es

$$\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 5$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila 2 por fila 1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 2 por fila 3}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ -9 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 3+9fila 1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{fila 3-fila 2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

así $k_{31} = k_{33}$ y $k_{32} = 8k_{33}$ de donde si $k_{33} = 1$ se obtiene que el vector propio es

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, obtenemos que las soluciones fundamentales son

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad \mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t},$$

Teorema 4.7. *Si la matriz A es simétrica, entonces A siempre tendrá valores propios reales, y n vectores propios linealmente independientes.*

Ejemplo 4.7. Encuentre las soluciones fundamentales del sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Se puede verificar que el polinomio característico es

$$-(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

de donde se obtienen 2 valores propios $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2, y $\lambda_2 = 5$ con multiplicidad 1.
$\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila 3 - fila 1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{fila 2 + fila 1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{fila 1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

de donde $k_{11} - k_{12} + k_{13} = 0$ o bien $k_{11} = k_{12} - k_{13}$ de donde tenemos 2 opciones, si $k_{12} = 1$ y $k_{13} = 0$ obtenemos el vector

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en tanto que si $k_{12} = 0$ y $k_{13} = 1$ obtenemos

$$\tilde{\mathbf{k}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos entrega dos vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio $\lambda_1 = -1$, es decir, tenemos 2 soluciones fundamentales

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$\lambda_1 = 5$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{fila3+fila2 y } -\frac{1}{6}\text{fila3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{2fila 2} - \text{fila1 y } -\frac{1}{6}\text{fila2}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{fila3-fila2}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{fila1+2fila2 y } -\frac{1}{4}\text{fila 1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

así $k_{31} = k_{33}$ y $k_{32} = -k_{33}$, de donde obtenemos el vector

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la tercera solución es

$$\mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Si la matriz A tiene valores propios repetidos con multiplicidad m (raíces repetidas de la ecuación característica) entonces hay que buscar m soluciones fundamentales asociadas a dicho valor propio.

Puede ocurrir que la ecuación $(A - \lambda I)\mathbf{k} = 0$ entregue m vectores propios. en cuyo caso tendríamos que agregar a las funciones

$$\mathbf{k}_1 e^{\lambda t}, \mathbf{k}_2 e^{\lambda t}, \ldots, \mathbf{k}_m e^{\lambda t}$$

al sistema fundamental de soluciones. Esto siempre ocurrirá cuando la matriz A tenga coeficientes reales y sea *simétrica*.

Sin embargo puede ocurrir que existan menos de m vectores propios distintos asociados a un mismo valor propio de multiplicidad m. En este caso hay que calcular lo que se conocen como vectores propios generalizados.

Por ejemplo, en el caso de que el valor propio λ tenga multiplicidad 2 y tenga asociado un vector propio $\mathbf{k}$. Entonces debemos buscar un vector $\mathbf{p}$ que satisface la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{k},$$

y las soluciones que se agregan al sistema son

$$\mathbf{k}e^{\lambda t}, \mathbf{p}e^{\lambda t} + \mathbf{k}te^{\lambda t}.$$

En el caso de que el valor propio λ tenga multiplicidad 3 y tenga asociado un vector propio $\mathbf{k}$. Entonces debemos buscar un vector propio generalizado $\mathbf{p}$ que satisface la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{k},$$

y otro vector propio generalizado $\mathbf{q}$ que satisface

$$(A - \lambda I)\mathbf{q} = \mathbf{q},$$

y las soluciones que se agregan al sistema son

$$\mathbf{k}e^{\lambda t}, \mathbf{p}e^{\lambda t} + \mathbf{k}te^{\lambda t}, \mathbf{q}e^{\lambda t} + \mathbf{p}e^{\lambda t} + \mathbf{k}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}.$$

En general, si un valor propio tiene multiplicidad m, entonces los m vectores propios se pueden encontrar como soluciones de la ecuación

$$(A - \lambda I)^m \mathbf{k} = 0,$$

y las soluciones que se agregan al conjunto fundamental tendrán la forma

$$\mathbf{k}_1 e^{\lambda t}, \mathbf{k}_2 e^{\lambda t} + \mathbf{k}_1 te^{\lambda t}, \mathbf{k}_3 e^{\lambda t} + \mathbf{k}_2 e^{\lambda t} + \mathbf{k}_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}, \ldots, \mathbf{k}_m e^{\lambda t} + \mathbf{k}_{m-1} e^{\lambda t} + \mathbf{k}_{m-2} \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{k}_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t}$$

Ejemplo 4.8. Encuentre las soluciones fundamentales del sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Solución. En este caso tenemos que el polinomio característico es

$$(3-\lambda)(-9-\lambda)+36=-27+6\lambda+\lambda^2+36=\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2=0,$$

luego solo tenemos a $\lambda=-3$ como valor propio (repetido 2 veces). Buscamos el(los) vectores propios

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -18 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{fila 2}, \frac{1}{6}\text{fila1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\text{fila 2-fila 1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

así $k_1=3k_2$ y el vector propio es

$$\mathbf{k}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que nos da una primera solución del problema

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t},$$

Necesitamos una segunda solución, para ello buscamos una solución del sistema $(A-\lambda I)\mathbf{p}=\mathbf{k}$, es decir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{fila 2}, \frac{1}{6}\text{fila1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\text{fila2-fila1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es decir, $p_1=3p_2+\frac{1}{2}$, de donde si $p_2=0$ tenemos que

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y la segunda solución tendrá la forma

$$\mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t},$$

Ejemplo 4.9. Encuentre las solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{X}'=\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Solución. El polinomio característico es

$$p(\lambda)=(7-\lambda)(3-\lambda)+4=(\lambda-5)^2,$$

es decir hay un único valor propio $\lambda_1=5$. Buscamos los vectores propios

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila 2}+2\text{fila1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es decir $2k_1 + k_2 = 0$, de donde obtenemos que

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio para la matriz A. Buscamos un vector propio generalizado

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fila } 2 + 2\text{fila}1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es decir $2p_1 + p_2 = 1$, luego

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{5t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \right] \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} te^{5t}, \end{aligned}$$

como se debe cumplir la condición inicial, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{pmatrix},$$

de donde $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$, por lo que la solución del problema es

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{5t}.$$

4.1.2. Valores propios complejos

Si la matriz A no es simétrica puede suceder que hayan valores propios complejos en pares conjugados: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, en cuyo caso los vectores propios también serán complejos conjugados de la forma $\mathbf{k}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ y $\mathbf{k}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$. En este caso, las funciones reales que se agregan al sistema fundamental de soluciones son

$$\begin{gathered} e^{\alpha t} \cos(\beta t)\mathbf{a} - e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)\mathbf{b} \\ e^{\alpha t} \cos(\beta t)\mathbf{b} + e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)\mathbf{a}, \end{gathered}$$

o bien si trabajamos con funciones y vectores complejos tenemos que agregar

$$\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

al sistema de soluciones fundamentales.

Ejemplo 4.10. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 6x - y, \\ y' &= 5x + 4y. \end{aligned}$$

Solución. La matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

y tiene como polinomio característico a

$$(6-\lambda)(4-\lambda)+5 = \lambda^2 - 10\lambda + 29,$$

de donde obtenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 5+2i, \lambda_2 = 5-2i$.
$\lambda_1 = 5-2i$

$$0 = (A-\lambda_1 I)k = \begin{bmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2i)k_1 - k_2 \\ 5k_1 - (1-2i)k_2 \end{pmatrix},$$

de donde $k_2 = (1+2i)k_1$ y se obtiene el vector propio

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i = \mathbf{a} + \mathbf{b}i.$$

De manera similar se obtiene que para $\lambda_2 = 5+2i$ el vector propio es

$$\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} i.$$

Lo anterior nos dice que las soluciones (complejas) del sistema están dada por

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

En caso de ser necesario, tenemos que las soluciones reales del sistema están dadas por

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}\cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{5t}\operatorname{sen}(2t), \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{5t}\cos(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}\operatorname{sen}(2t).$$

Ejemplo 4.11. Resolver el sistema $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = A \cdot \mathbf{X}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5,$$

de donde $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$ son los valores propios. Calculamos el vector propio asociado a $\lambda = 1+2i$ y obtenemos que

$$(3-(1+2i))k_1 - 2k_2 = (2-2i)k_1 - 2k_2 = 0 \Rightarrow (1-i)k_1 = k_2,$$

es decir, si $k_2 = s$, entonces $k_1 = (1-i)s$, es decir

$$\mathbf{k} = s\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = s\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} i\right].$$

Con esto la solución general es

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t},$$

o bien, en términos de funciones reales

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \cos(2t) - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \operatorname{sen}(2t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \operatorname{sen}(2t) \right] \\ &= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} e^t \cos(2t) + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} e^t \operatorname{sen}(2t). \end{aligned}$$

4.1.3. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Resolver los siguientes sistemas de EDOs

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 12y \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}x - 2y \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \\ \dfrac{dx}{dt} = -6x + 2y \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4x \\ \dfrac{dx}{dt} = 9y + 12x \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + 6x \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y \\ \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$

Ejercicio 4.2. Resuelva los problemas del ejercicio anterior, sujetos a las siguientes condiciones iniciales

1. $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.
2. $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.
3. $x(0) = 10$, $y(0) = 0$.

4.2. Soluciones particulares para sistemas no homogéneos

4.2.1. Coeficientes indeterminados

Buscamos una solución particular para

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

donde $\mathbf{F}(t)$ es un vector polinomial, exponencial o con senos/cosenos. La idea se parece bastante al caso de EDOs lineales de orden n, pero no funciona de la misma manera siempre (en especial en el caso de que al lado derecho aparezca una de las soluciones fundamentales). Cuando ese no es el caso, el método funciona mas o menos igual.

Ejemplo 4.12. Resolver la ecuación $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solución. Sabemos que la solución general es

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix},$$

luego buscamos una solución particular de la forma

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Al reemplazar en la ecuación obtenemos que

$$\mathbf{X}_p'(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

en tanto que

$$A \cdot \mathbf{X}_p + \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 5 \end{pmatrix} = A(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[A\mathbf{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] + t \left[A\mathbf{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Por lo tanto se debe cumplir que

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad 0 = A\mathbf{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras tenemos los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 + 3b_2 &= -1 \\ 5b_1 + 3b_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} a_1 + 3a_2 &= -1 + b_1 \\ 5a_1 + 3a_2 &= -5 + b_2 \end{aligned}.$$

El primer sistema tiene como solución a $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{5}{12}$, y el segundo tiene como solución a $4a_1 = -4 + b_2 - b_1 = -4 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{-14}{3} \Rightarrow a_1 = -\frac{7}{6}$ y $3a_2 = -1 + b_1 - a_1 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{7}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow a_2 = \frac{5}{36}$.

Como el método de coeficientes indeterminados no funciona siempre, es mejor utilizar variación de parámetros.

Ejemplo 4.13. Resolver el sistema no homogéneo $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Buscamos una solución particular de la forma $\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Es decir, se debe cumplir que

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o dicho de otra forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{17}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.2.2. Variación de parámetros

Para encontrar una solución particular del sistema

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

se utiliza la misma idea utilizada para el el caso de ecuaciones de orden n, esto es, se busca una solución de la forma

$$\mathbf{X}_p(t) = u_1(t)\mathbf{X}_1(t) + u_2(t)\mathbf{X}_2(t) + \ldots + u_n(t)\mathbf{X}_n(t)$$

donde $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, y $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ son funciones a determinar.

En este caso, se puede utilizar notación matricial para escribir

$$\mathbf{X}_p(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \mathbf{U}(t),$$

donde

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Esta notación permite escribir la fórmula de variación de parámetros de una manera bastante sencilla pues al reemplazar en la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_p' &= A(t)\mathbf{X}_p + \mathbf{F}(t) \\
\mathcal{X}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathcal{X}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) &= A(t) \cdot \mathcal{X}(t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t) \\
\mathcal{X}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) &= \mathbf{F}(t),
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbf{u}'(t) = \mathcal{X}(t)^{-1} \cdot F(t) \Rightarrow \mathbf{u}(t) = \int \mathcal{X}(t)^{-1} \cdot F(t)\mathrm{d}t.$$

Ejemplo 4.14. Resolver el sistema no homogéneo $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Solución. Tenemos que la matriz fundamental del sistema homogéneo es

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix},$$

para poder usar variación de parámetros debemos invertir esta matriz

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc|cc} e^{-2t} & e^{-5t} & 1 & 0 \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} & 0 & 1 \end{array}\right] &\xrightarrow[\text{fila2-fila1}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} e^{-2t} & e^{-5t} & 1 & 0 \\ 0 & -3e^{-5t} & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[\text{fila2}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{5t}\right)]{} \left[\begin{array}{cc|cc} e^{-2t} & e^{-5t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[\text{fila1}\cdot e^{2t}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{-3t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[\text{fila1-fila2}\cdot e^{-3t}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{array}\right],
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{X}(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Notamos ahora que

$$\mathcal{X}(t)^{-1} \cdot F(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \int \left(2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t}\right) \mathrm{d}t = te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\
u_2(t) &= \int \left(te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t},
\end{aligned}$$

y la solución particular está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_p(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente la solución general de la ecuación no homogénea está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} -\frac{27}{50} \\ -\frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.15. Resolver el sistema no homogéneo $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$.

Solución. No es difícil ver que la solución general de la ecuación homogénea es

$$\mathbf{X}_h(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + c_2 e^{-6t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

y la matriz fundamental es

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t}\end{bmatrix}.$$

La inversa de la matriz es

$$\mathcal{X}(t)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{t} & \frac{1}{5}e^{t} \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t}\end{bmatrix},$$

de donde se obtiene que

$$\mathcal{X}(t)^{-1}\cdot \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{t} & \frac{1}{5}e^{t} \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6e^{2t}\\-e^{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3t}\\-5e^{8t}\end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora la integral

$$\int \mathcal{X}(t)^{-1}\cdot\mathbf{F}(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}\int e^{3t}\mathrm{d}t\\ \int -5e^{8t}\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{3t}\\ -\frac{5}{8}e^{8t}\end{pmatrix},$$

y finalmente la solución particular está dada po

$$\mathbf{X}_p(t) = \mathcal{X}(t)\int \mathcal{X}(t)^{-1}\cdot\mathbf{F}(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{3t}\\ -\frac{5}{8}e^{8t}\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}\frac{23}{24}\\ \frac{17}{24}\end{pmatrix},$$

y la solución general del problema es

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + c_2 e^{-6t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}\frac{23}{24}\\ \frac{17}{24}\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.16. Resolver el sistema no homogéneo $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & -17 & 8\end{bmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Solución. El polinomio característico eso $p(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$ y tiene como raíces a $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$. Calculamos los vectores propios

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{16}\\ \frac{1}{4}\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix}7-4\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix}7+4\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Con esto la matriz fundamental es

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{16}e^{4t} & (7-4\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t} & (7+4\sqrt{3})e^{(2-\sqrt{3})t} \\ \frac{1}{4}e^{4t} & (2-\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t} & (2+\sqrt{3})e^{(2-\sqrt{3})t} \\ e^{4t} & e^{(2+\sqrt{3})t} & e^{(2-\sqrt{3})t} \end{bmatrix},$$

que tiene como inversa a

$$\mathcal{X}(t)^{-1} = \left[\ldots\right].$$

Capítulo 5

Transformada de Laplace

5.1. Definición y algunos ejemplos

La transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar una función de la variable t en otra de la variable s.

Definición 5.1. *Para una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$ definimos la transformada de Laplace de f como la función $\mathcal{L}(f)(s)$ definida como*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t,$$

donde el dominio de la función $\mathcal{L}(f)(s)$ será el conjunto de los valores de s para los cuales la integral es convergente.

***Ejemplo 5.1*.** Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$.

***Solución*.** Tenemos que de la definición

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

cuando $s > 0$.

***Ejemplo 5.2*.** Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = t$.

***Solución*.** Tenemos que de la definición

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot t\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b te^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^b + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}(1)(s) \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

cuando $s > 0$.

Ejemplo 5.3. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$ para $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que de la definición

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)}\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s-a)b}}{(s-a)} + \frac{1}{s-a} \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

cuando $s > a$.

Ejemplo 5.4. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \operatorname{sen}(bt)$ para $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que de la definición

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot \operatorname{sen}(bt)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\cdot \operatorname{sen}(bt)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-st}}{s^2+b^2}\left(-s\operatorname{sen}(bt) - b\cos(bt)\right)\Big|_0^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-sn}}{s^2+b^2}\left(-s\operatorname{sen}(bn) - b\cos(bn)\right) + \frac{b}{s^2+b^2} \\
&= \frac{b}{s^2+b^2}
\end{aligned}
$$

cuando $s > 0$.

Teorema 5.1. *La transformada de Laplace es un operador lineal, es decir, si $m, n \in \mathbb{R}$ y f, g son funciones que tiene transformada de Laplace, entonces*

$$\mathcal{L}(mf + ng) = m\mathcal{L}(f) + n\mathcal{L}(g).$$

Ejemplo 5.5. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = 7\operatorname{sen}(4t) - 4e^{6t}$.

Solución. Sabemos que $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(4t))(s) = \frac{4}{s^2+16^2}$ cuando $s > 0$ y que $\mathcal{L}(e^{6t})(s) = \frac{1}{s-6}$ cuando $s > 6$, entonces

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(4t) + e^{6t})(s) = 7\cdot\frac{4}{s^2+16^2} - 4\cdot\frac{1}{s-6}$$

cuando $s > 6$.

Tabla de transformadas de Laplace I

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$, $s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$

5.2. Propiedades fundamentales

Teorema 5.2. *Sea $f(t)$ una función que tiene una transformada $F(s)$ definida para $s > \alpha$. Entonces*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

cuyo dominio es $s > \alpha + a$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}f(t)) &= \int 0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int 0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\mathrm{d}t \\ &= F(s-a).\end{aligned}$$

■

Ejemplo 5.6. Calcular la transformada de $e^{2t}t^2$.

Solución. Recordar que $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ para $s > 0$, luego

$$\mathcal{L}(e^{2t}t^2) = \frac{2}{(s-2)^2},$$

para $s > 0 + 2$.

Definición 5.2. *Decimos que $f(t)$ es de orden exponencial si existe $\alpha \geq 0$ y una constante $C \geq 0$ tal que*

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \forall\, t \geq T,$$

para cierto $T > 0$.

Observación 5.1. A las funciones continuas (o acotadas) de orden exponencial $e^{\alpha t}$ siempre se les puede calcular la transformada de Laplace cuando $s > \alpha$, esto pues

$$|\mathcal{L}(f)(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^T \left|e^{-st}f(t)\mathrm{d}t\right| + C\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t = A + \frac{C}{s-\alpha}$$

cada vez que $s > \alpha$.

Ejemplo 5.7. La función $f(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(5t)$ es de orden exponencial pues

$$|f(t)| = \left|e^{2t}\operatorname{sen}(5t)\right| \leq e^{2t} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Teorema 5.3. *Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ que tiene derivada $f'(t)$, donde $f(t)$ tiene una transformada de Laplace $F(s)$ definida para $s > \alpha$ (por ejemplo si f es de orden exponencial α), entonces $f'(t)$ tiene la transformada de Laplace siguiente*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$$

en $s > \alpha$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 - f(0) + sF(s),\end{aligned}$$

donde se ha supuesto que $\lim_{n\to\infty} e^{-sn} f(n) = 0$, lo que ocurre cuando $f(t)$ es de orden exponencial $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$. ■

Ejemplo 5.8. Calcule la transformada de Laplace de $g(t) = \cos(bt)$ sabiendo que la transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen}(bt)$ es $F(s) = \frac{b}{b^2+s^2}$.

Solución. Como $(\operatorname{sen}(bt))' = b\cos(bt)$, del teorema anterior tenemos que

$$\mathcal{L}(b\cos(bt))(s) = sF(s) - f(0) = \frac{bs}{b^2+s^2} \Rightarrow \mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \frac{s}{b^2+s^2}.$$

Corolario 5.1. *Sea $f(t)$ de orden exponencial α (es decir, tendrá una transformada de Laplace $F(s)$ definida para $s > \alpha$). Si además $f(t)$ es n-veces diferenciable, entonces*

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right)(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

para $s > \alpha$.

Demostración. En el caso $n = 2$ se tiene que

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s\mathcal{L}(f'(t))(s) - f'(0) = s\left(s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\right) - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Para los otros casos basta repetir la idea. ■

Teorema 5.4. *Sea $f(t)$ de orden exponencial, tal que tiene transformada de Laplace $F(s)$ definida para $s > \alpha$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$ se tiene*

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s),$$

para $s > \alpha$.

Demostración. Para $n = 1$ tenemos que

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)\mathrm{d}t = -\int_0^\infty te^{-st} f(t)\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(tf(t))(s).$$

Similarmente, para $n = 2$ se tiene que

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty \frac{d^2}{ds^2}\left(e^{-st} f(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^2 e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}(t^2 f(t))(s).$$

El caso general se obtiene al notar que

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(e^{-st} f(t)\right) = (-1)^n t^n e^{-st} f(t)$$

■

Ejemplo 5.9. Calcular $\mathcal{L}(t\cos(2t))$.

Solución. Sabemos que $\mathcal{L}(\cos(2t)) = \dfrac{s}{s^2+4}$, luego el teorema anterior nos dice que

$$\mathcal{L}(t\cos(2t)) = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}.$$

Gracias a los teoremas anteriores, obtenemos la siguiente tabla adicional de transformadas.

Tabla de transformadas 2

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
$e^{at}t^n$, $n = 1, 2, \dots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$

5.3. Transformada de Laplace Inversa

Queremos resolver el PVI

$$y'' - y = -t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

para ello supondremos que la función $y(t)$ tiene una transformada de Laplace $Y(s)$ y aplicaremos el operador transformada a la ecuación, es decir, se debe cumplir que

$$\mathcal{L}(y'' - y) = \mathcal{L}(-t),$$

usando las propiedades de la transformada, sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y''-y)(s) &= \mathcal{L}(y'')(s) - \mathcal{L}(y)(s)\\ &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s)\\ &= (s^2-1)Y(s) - 1,\end{aligned}$$

y que

$$\mathcal{L}(-t)(s) = -\frac{1}{s^2},$$

por lo tanto se cumple que la transformada de Laplace $Y(s)$ satisface la ecuación *algebraica*

$$(s^2-1)Y(s) - 1 = -\frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s^2},$$

Si tuviéramos una manera de revertir la transformada $\mathcal{L}(y(t))(s)$ para recuperar $y(t)$ entonces podríamos resolver la ecuación.

Definición 5.3. *Dada una función $F(s)$, decimos que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$ y satisface que*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s).$$

Usualmente se denota $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = f(t)$.

Continuando con el ejemplo, entonces teníamos que $Y(s) = \frac{1}{s^2}$, luego, usando la transformada inversa de Laplace podemos escribir que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t),$$

pero mirando nuestras tablas de transformadas, deducimos que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) = t$, por lo que $y(t) = t$ aparentemente sería una solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 5.10. Calcular $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5}\right)(t)$

Solución. Notar que $\dfrac{24}{s^5} = \dfrac{4!}{s^{4+1}}$, de donde deducimos que $f(t) = t^4$.

Ejemplo 5.11. Calcular $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{20-4s+s^2}\right)(t)$

Solución. Notar que $20 - 4s + s^2 = (s-2)^2 + 4$, luego $\frac{4}{20-4s+s^2} = \frac{4}{(s-2)^2+4}$ por lo tanto $f(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(4t)$.

Teorema 5.5. *La transformada de Laplace inversa es un operador lineal.*

Ejemplo 5.12. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^5} - \frac{10}{20-4s+s^2}\right)$

Solución. Como $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5}\right) = t^4$ y $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{20-4s+s^2}\right) = e^{2t}\operatorname{sen}(4t)$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^5} - \frac{10}{20-4s+s^2}\right) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{4}{10}e^{2t}\operatorname{sen}(4t).$$

Ejemplo 5.13. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6-2s}{s^2+4}\right)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6-2s}{s^2+4}\right) &= 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\ &= 3\operatorname{sen}(2t) - 2\cos(2t).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.14. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right)$.

Solución. Para este problema debemos usar fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}\\ &= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)},\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$ y $C = \frac{1}{30}$, así

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{-\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right) &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right)\\ &= -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.\end{aligned}$$

5.4. Transformada de Laplace para resolver PVIs

Como mostramos en la sección anterior, se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver PVIs lineales a coeficientes constantes

$$\begin{aligned}a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^1(t) + a_0 y(t) &= f(t)\\ y(0) &= y_0\\ y'(0) &= y_1\\ &\vdots\\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}\end{aligned}$$

la estrategia es

- Aplicar la transformada de Laplace a la ecuación, utilizando las condiciones inciales.
- Resolver la ecuación algebraica para $Y(s)$.
- Aplicar la transformada inversa para obtener $y(t)$

Ejemplo 5.15. Resolver el PVI
$$y' + 3y = 13\,\mathrm{sen}(2t), \quad y(0) = 6.$$

Solución. Aplicamos la transformada
$$\mathcal{L}(y' + 3y) = \mathcal{L}(13\,\mathrm{sen}(2t)),$$
de donde
$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = 13\frac{4}{s^2+4} \Rightarrow Y(s) = \frac{6 + 13\frac{4}{s^2+4}}{s+3} = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)},$$
usamos fracciones parciales para obtener
$$\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{8}{s+3} + \frac{6}{s^2+4} - 2\frac{s}{s^2+4},$$
y asi
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s+3} + \frac{3\cdot 2}{s^2+2^2} - 2\frac{s}{s^2+2^2}\right) = 8e^{-3t} + 3\,\mathrm{sen}(2t) - 2\cos(2t).$$

Ejemplo 5.16. Resolver el PVI
$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5.$$

Solución. Aplicamos la transformada a ambos lados y obtenemos
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$
de donde
$$Y(s) = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$
y como vimos antes
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right) = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Ejemplo 5.17. Resolver el PVI
$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 12.$$

Solución. Aplicamos transformada a la ecuación y obtenemos que
$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) &= -\frac{8}{s+1} \\ (s^2+2s+5)Y(s) - 2s - 8 &= -\frac{8}{s+1} \\ (s^2+2s+5)Y(s) &= \frac{2s^2+10s}{s+1} \\ Y(s) &= \frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2+2s+5)}, \end{aligned}$$
pero $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4$, luego
$$Y(s) = \frac{2s^2+10s}{(s+1)((s+1)^2+2^2)}.$$

Además

$$\frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+2^2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3(s+1)+8}{(s+1)^2+2^2},$$

por lo tanto

$$Y(s) = -\frac{-1}{s+1} + 3\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 4\frac{2}{(s+1)^2+2^2},$$

y obtenemos que

$$y(t) = -e^{-t} + 3e^{-t}\cos(2t) + 4e^{-t}\operatorname{sen}(2t).$$

5.4.1. EDOs lineales con coeficientes variables

La transformada de Laplace funciona bastante bien para EDOs lineales con coeficientes constantes, sin embargo, en algunos casos también se puede utilizar para resolver EDOs lineales con coeficientes variables.

Ejemplo 5.18. Resolver el PVI

$$y'' + 2ty' - 4y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solución. Aplicando transformada a ambos lados de la ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'' + 2ty' - 4y = 1) &= \mathcal{L}(1)\\
\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(ty') - 4\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s}\\
(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2\left(-\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y')\right) - 4Y(s) &= \frac{1}{s}\\
s^2Y(s) - 2\left(\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)\right) - 4Y(s) &= \frac{1}{s}\\
s^2Y(s) - 2\left(Y(s) + s\frac{dY}{ds}\right) - 4Y(s) &= \frac{1}{s},
\end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene EDO lineal de primer orden para la función $Y(s)$ cuando $s > 0$

$$\frac{dY}{ds} + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = -\frac{1}{2s^2}.$$

Esta EDO tiene como factor integrante a $e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)\mathrm{d}s} = e^{3\ln s - \frac{s^2}{4}} = s^3e^{-\frac{s^2}{4}}$, por lo tanto

$$s^3e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s) = -\int \frac{s^3e^{-\frac{s^2}{4}}}{2s^2}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int se^{-\frac{s^2}{4}}\mathrm{d}s = e^{-\frac{s^2}{4}} + C$$

y obtenemos que

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + C\frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}.$$

Para calcular C, debemos utilizar que cuando $Y(s)$ es la transformada de una función de orden exponencial, entonces $Y(s) \longrightarrow s \to \infty 0$. En este caso se tiene que la única manera de que eso pase es que $C = 0$, es decir

$$Y(s) = \frac{1}{s^3},$$

de donde concluimos que

$$y(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Ejemplo 5.19. Resolver el PVI

$$ty'' - ty' + y = 2, \; y(0) = 2, \; y'(0) = -4.$$

Solución. Si $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicamos transformada a la ecuación obtenemos que

$$\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y')) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s),$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(ty'') &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y''))\\ &= -\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0))\\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}-s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) - (-sY'(s) - Y(s)) + Y(s) &= \frac{2}{s}\\ (s - s^2)Y'(s) + (2 - 2s)Y(s) + 2 &= \frac{2}{s}\\ s(1 - s)Y'(s) + 2(1 - s)Y(s) &= \frac{2(1 - s)}{s}\\ Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) &= \frac{2}{s^2}.\end{aligned}$$

Esta última ecuación es una EDO lineal de primer orden con factor integrante $e^{\int \frac{2}{s} \mathrm{d}s} = s^2$, de donde obtenemos que

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}.$$

En este caso, para cualquier valor de C, la transformada $Y(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de donde podemos obtener la transformada inversa para cualquier valor de C, es decir

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}\right)(t) = 2 + Ct,$$

finalmente, como se debe cumplir que $y'(0) = -4$, entonces $C = -4$.

5.5. Funciones con discontinuidades de salto

Definición 5.4. *Definimos la función escalon unitario como*

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t < 0. \end{cases}$$

Notar que si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$U(t - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t < a, \end{cases}$$

y si $m \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$mU(t - a) = \begin{cases} m & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$1 - U(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > a \\ 1 & \text{si } t < a, \end{cases}$$

y si $a < b$ entonces

$$U(t - a) - U(t - b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si } t < a \text{ ó } t > b, \end{cases}$$

Una de las virtudes que tiene la función escalón unitario es que permite escribir funciones que son *continuas a pedazos* usando fórmulas cerradas. Por ejemplo, la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 1 \\ 4t^2 & \text{si } 1 < t < 2 \\ \cos(t) & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned} f(t) &= t(1 - U(t-1)) + 4t^2(U(t-1) - U(t-2)) + \cos(t)U(t-2) \\ &= t + (4t^2 - t)U(t-1) + (\cot(t) - 4t^2)U(t-2). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.20. Calcular la transformada de Laplace de $U(t-a)$.

Solución. Notar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U(t-a))(s) &= \int_0^\infty e^{-st}U(t-a)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^\infty e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=a}^{t=\infty} \\ &= \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, se tiene que la transformada inversa de $\frac{e^{-as}}{s}$ se calcula como

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right)(t) = U(t-a).$$

Teorema 5.6. *Suponga que $f(t)$ tiene una transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ definida para $s > \alpha$. Si $a > 0$ entonces*

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = e^{-as}F(s),$$

además

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = f(t-a)U(t-a).$$

Observación 5.2. En general la fórmula mas utilizada es

$$\mathcal{L}(g(t)U(t-a)) = e^{-as}\mathcal{L}(g(t+a))(s),$$

Ejemplo 5.21. Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = t^2U(t-1)$.

Solución. En este caso $g(t) = t^2$ y $a = 1$, de donde $g(t+a) = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1$. Así

$$\mathcal{L}(g(t+a))(s) = \mathcal{L}(t^2 + 2t + 1)(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s},$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(g(t)U(t-1))(s) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

Ejemplo 5.22. Calcular $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(t)U(t-\pi))(s)$.

Solución. En este caso $g(t) = \operatorname{sen}(t)$ y $a = \pi$, de donde $g(t+\pi) = \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen}(t)$, y

$$\mathcal{L}(-\operatorname{sen}(t))(s) = -\frac{1}{s^2+1},$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(t)U(t-\pi))(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Ejemplo 5.23. Calcular la transformada de Laplace inversa de $\dfrac{4se^{-\pi s}}{s^2+1}$.

Solución. Notamos que $F(s) = \dfrac{4se^{-\pi s}}{s^2+1} = \dfrac{4s}{s^2+1}e^{-\pi s}$, es decir es de la forma

$$\mathcal{L}(f(t-\pi)U(t-\pi))(s) = \frac{4s}{s^2+1}e^{-\pi s},$$

donde se debe cumplir que

$$\mathcal{L}(f(t-\pi))(s) = \frac{4s}{s^2+1}.$$

Pero $\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$, de donde concluimos que

$$f(t-\pi) = 4\cos(t) \Rightarrow f(t) = 4\cos(t+\pi) = -4\cos t,$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}\right)(t) = -4\cos tU(t-\pi).$$

Ejemplo 5.24. Resolver el PVI $y' + y = f(t)$, $y(0) = 5$ donde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ 3\cos t & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$

Solución. Si $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)(s)$ entonces tenemos que al aplicar la transformada a la ecuación obtenemos que

$$sY(s) - 5 + Y(s) = \mathcal{L}(f(t))(s),$$

pero como $f(t) = 3\cos(t)U(t-\pi)$, y como $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ tenemos que

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}(-3\cos(t))(s) = -3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s},$$

por lo tanto tenemos que

$$Y(s) = \frac{5 - 3\dfrac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}}{s+1} = \frac{5}{s+1} - 3\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s}.$$

Usamos fracciones parciales para obtener que

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{(A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C)}{(s+1)(s^2+1)},$$

de donde $A + B = 0$, $B + C = 1$ y $A + C = 0$, es decir $A = -\frac{1}{2}$, $B = C = \frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1},$$

y podemos escribir

$$Y(s) = 5\frac{1}{s-(-1)} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{s-(-1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-\pi s}$$

y concluimos que

$$y(t) = 5e^{-t} - \frac{3}{2}\left(-e^{-(t-\pi)} + \cos(t-\pi) + \operatorname{sen}(t-\pi)\right)U(t-\pi).$$

5.6. Funciones periódicas

Definición 5.5. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice periódica de período $T > 0$ si se cumple que*

$$f(t+T) = f(t).$$

Ejemplo 5.25. La función $f(t) = \cos(t)$ es periódica de período $T = 2\pi$. La función $f(t) = \tan t$ es periódica de período $T = \pi$.

Teorema 5.7. *Sea f una función periódica de período $T > 0$, entonces*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}}{1-e^{-sT}}.$$

Demostración. Denotamos por

$$f_T(t) = f(t)(U(t) - U(t-T)) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 < t < T, \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ó } t > T, \end{cases}$$

y notamos que se cumple

$$f(t) = f_T(t) + f_T(t-T)U(t-T) + f_T(t-2T)U(t-2T) + \ldots + f_T(t-kT)U(t-kT) + \ldots,$$

de donde podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(f_T(t) + f_T(t-T)U(t-T) + f_T(t-2T)U(t-2T) + \ldots + f_T(t-kT)U(t-kT) + \ldots\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^\infty f_T(t-T)U(t-T)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^\infty f_T(t-2T)U(t-2T)e^{-st}\mathrm{d}t + \ldots \\
&\quad + \ldots + \int_0^\infty f_T(t-kT)U(t-kT)e^{-st}\mathrm{d}t + \ldots \\
&= \int_0^\infty f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^\infty f_T(t)U(t)e^{-s(t+T)}\mathrm{d}t + \int_0^\infty f_T(t)U(t)e^{-s(t+2T)}\mathrm{d}t + \ldots \\
&\quad + \ldots + \int_0^\infty f_T(t)U(t)e^{-s(t+kT)}\mathrm{d}t + \ldots \\
&= \left[1 + e^{-sT} + \left(e^{-sT}\right)^2 + \ldots + \left(e^{-sT}\right)^k + \ldots\right] \int_0^\infty f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}\right] \int_0^\infty f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^\infty f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f_T(t)e^{-st}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 5.26 (Onda cuadrada). Considere la función $g : (0,2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2, \end{cases}$$

y considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = g(t)$ cuando $t \in (0,2]$ y que f tiene período $T = 2$. Esto es

$$g_T(t) = 1 - U(t-1), \quad \text{cuando } 0 < t < 2.$$

En vista del teorema anterior tenemos que

$$\mathcal{L}(f(t))(s)=\frac{\int_0^2 e^{-st}g(t)}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}}{1-e^{-2s}}=\frac{-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=0}^{t=1}}{1-e^{-2s}}=\frac{\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)}{1-e^{-2s}}=\frac{\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

Ejemplo 5.27. Sabemos que la función $f(t)=\operatorname{sen} t$ es periódica de período $T=2\pi$. Veamos que se cumple la propiedad para esta función.

Tenemos que

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(s)=\frac{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(t)e^{-st}\mathrm{d}t}{1-e^{-2\pi s}},$$

y como

$$\int e^{at}\operatorname{sen} t\mathrm{d}t=\frac{e^{at}\left(a\operatorname{sen} t-\cos t\right)}{a^2+1},$$

obtenemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{-st}\operatorname{sen} t\mathrm{d}t=\frac{e^{-st}\left(-s\operatorname{sen} t-\cos t\right)}{s^2+1}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(s)=\frac{\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}}{1-e^{-2\pi s}}=\frac{1}{s^2+1},$$

lo que comprueba nuestro cálculo.

5.7. Convolución

Definición 5.6. *Dadas dos funciones que son continuas por partes en* $[0,\infty)$*, entonces se define el producto de convolución entre* f *y* g *como*

$$f*g(t)=\int_0^t f(r)g(t-r)\mathrm{d}r.$$

Ejemplo 5.28. Calculemos $f*g$ si $f(t)=1$ y $g(t)=t$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}f*g(t)&=\int_0^t 1(t-r)\mathrm{d}r\\&=\int_0^t t-r\mathrm{d}r\\&=\left(tr-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r=0}^{r=t}\\&=\frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Vemos también que

$$\begin{aligned}g*f(t)&=\int_0^t t\cdot 1\mathrm{d}r\\&=\frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.29. Veamos ahora que sucede cuando $f(t)=e^t$ y $g(t)=\cos(t)$.

$$\begin{aligned}f*g(t)&=\int_0^t e^r\cos(t-r)\mathrm{d}r\\&=e^t\int_0^t e^{-u}\cos(u)\mathrm{d}u\\&=e^t\left(\frac{e^{-u}}{2}\left(-\cos u+\operatorname{sen} u\right)\Big|_{u=0}^{u=t}\right)\end{aligned}$$

$$= e^t \left(\frac{e^{-t}}{2} (-\cos t + \operatorname{sen} t) + \frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{\operatorname{sen} t - \cos t}{2} + \frac{e^t}{2},$$

donde utilizamos que

$$\int e^{ax} \cos(bx) = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \cos(bx) + b \operatorname{sen}(bx) \right),$$

con $a = -1$ y $b = 1$.

Teorema 5.8. *Algunas propiedades importantes de la convolución son las siguientes:*

- $f * g = g * f$.
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * (g + h) = f * g + g * h$.
- $f * 0 = 0$.

Sin embargo, como vimos en el primer ejemplo, no se cumple que

$$f * 1 = f.$$

Demostración. Solo demostraremos la primera propiedad. Se tiene que

$$f * g(t) = \int_0^t f(r) g(t - r) \mathrm{d}r$$

pero al hacer el cambio de variables $u = t - r$ se obtiene que

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - u) g(u) \mathrm{d}u = \int_0^t g(u) f(t - u) \mathrm{d}u = g * f(t).$$

■

Una de las principales propiedades de la convolución de funciones tiene que ver con la transformada de Laplace, y es el siguiente teorema

Teorema 5.9. *Sean f y g funciones que tiene transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente para $s > \alpha$. Entonces se cumple que*

$$\mathcal{L}(f * g(t))(s) = F(s) G(s),$$

o en términos de la transformada de Laplace inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) G(s))(t) = f * g(t).$$

En particular, este resultado nos permite calcular transformadas de Laplace inversas a productos de funciones.

Ejemplo 5.30. Calcular la transformada de Laplace de $f * g(t)$ cuando $f(t) = e^t$ y $g(t) = \cos(t)$.

Solución. Como calculamos anteriormente

$$f * g(t) = \frac{\operatorname{sen} t - \cos t + e^t}{2},$$

de donde concluimos que

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \frac{\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}}{2} = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}.$$

Por otra parte, gracias al teorema anterior, tenemos que

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s) G(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Ejemplo 5.31. Calcular la transformada de Laplace inversa de la función $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$.

Solución. Notar que
$$\frac{s}{(s^2+4)^2} = \frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4},$$
así
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right)(t) &= \cos(t)*\operatorname{sen}(t)\\
&= \int_0^t \cos(r)\operatorname{sen}(r-t)\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{4}\left(-\cos(t-2r)+2r\operatorname{sen}t\right)\Big|_{r=0}^{r=t}\\
&= \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t),
\end{aligned}$$
donde para calcular la integral usamos la identidad trigonométrica
$$\cos(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\operatorname{sen}(b+a)+\operatorname{sen}(b-a)}{2}.$$

Observación 5.3. Otra manera de hacer este ejercicio es notar que
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = -\frac{2s}{(s^2+r)^2} = -2\frac{s}{(s^2+4)^2}$$
y recordar que
$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -\frac{d}{ds}F(s),$$
es decir
$$\frac{s}{(s^2+4)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\operatorname{sen}t)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}t\operatorname{sen}t\right)(s).$$

Ejemplo 5.32. Resolver la EDO
$$ay''+by'+cy=g(t)$$

Solución. Aplicamos la transformada a la ecuación y obtenemos, si $y(0)=C_1$ e $y'(0)=C_2$, que
$$a\left(s^2Y(s)-sC_1-C_2\right)+b\left(sY(s)-C_1\right)+cY(s)=G(s),$$
es decir
$$\left(as^2+bs+c\right)Y(s) = G(s)+(as+b)C_1+aC_2 \Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{as^2+bs+c}+C_1\frac{(as+b)}{as^2+bs+c}+C_2\frac{a}{as^2+bs+c}$$
de donde concluimos que
$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{as^2+bs+c}+C_1\frac{(as+b)}{as^2+bs+c}+C_2\frac{a}{as^2+bs+c}\right)\\
&= C_1\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right)+C_2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{as^2+bs+c}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{as^2+bs+c}\right)\\
&= C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+y_p(t),
\end{aligned}$$
donde $y_p(t)$ es una solución particular de la EDO, que tiene la forma
$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\cdot\frac{1}{as^2+bs+c}\right) = g*h(t),$$
donde $h(t)$ es una función que cumple
$$\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{as^2+bs+c}.$$

La función $h(t)$ se llama *respuesta al impulso*, y se puede obtener, ya sea calculando la transformada de Laplace inversa que le da su definición, o bien como solución del PVI

$$ay'' + by' + cy = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{a}.$$

Por ejemplo, si $a = c = 1$ y $b = 0$, la ecuación es $y'' + y = g(t)$ y tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + C_2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s^2+1}\right) \\ &= C_1\cos(t) + C_2\operatorname{sen}(t) + \int_0^t g(r)\operatorname{sen}(t-r)\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

es decir la función $h(t) = \operatorname{sen}(t)$, que claramente satisface

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$