Medida e Integración

Hernán Castro

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca
http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro
hcastro@utalca.cl.

Template de $\LaTeX 2_\varepsilon$ creado por Hernán Castro.

Edición del 4 de junio de 2024

Índice general

Prefacio

Este apunte ha sido confeccionado para el curso trimestral *Medida e Integración* dictado por el autor en los programas de Magister y Doctorado en Matemáticas de la Universidad de Talca. El propósito de este escrito es recopilar materias expuestas en diversos libros y organizarlas en la manera presentada por el autor en el transcurso del curso.

En este curso se discuten temas relacionados a la teoría de medida e integración. Para ello se hace una exposición general del concepto de medida y sus propiedades, así como la construcción de una medida completa a partir de una medida definida sobre una semi-álgebra. Esta construcción se aplica para obtener la medida de Lebesgue sobre los reales

En una segunda parte, en este curso se tratan los temas de integración en espacios de medida, definiendo el espacio $\mathcal{L}^1$ y obteniendo los teoremas de convergencia clásicos: Teorema de convergencia monótona, Lema de Fatou y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Adicionalmente se definen los espacios L^p y se demuestra su completitud.

Como tercer tópico se realiza la construcción de la medida producto y los teoremas de Tonelli y Fubini. Adicionalmente, como aplicación de la construcción de la medida producto, se obtiene la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y sus propiedades.

A continuación se hace una introducción a espacios de medida Borelianos en espacios Hausdorff localmente compactos, donde se introduce el concepto de medida regular y se demuestra el teorema de Riesz-Markov. El apunte finaliza con el estudio de medidas con signo y el teorema de Radon-Nykodym.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias, tanto como la lista de ejercicios, puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos pueden estar incompletos, y quizás se puedan encontrar algunos errores de tipeo.

Capítulo 1

Medidas

1.1. Conceptos preliminares, clases de conjuntos

Comenzamos con parte de la notación que utilizaremos durante este curso:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$.
- $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\overline{\mathbb{R}_-} = \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} = [-\infty, 0]$.
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Si $x \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $-\infty \leq x \leq \infty$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces $x \pm (\pm\infty) \overset{def}{=} \mp\infty$.
- Tenemos que $(+\infty) + (+\infty) \overset{def}{=} +\infty$ y $(-\infty) + (-\infty) \overset{def}{=} -\infty$, sin embargo las operaciones $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, y $(-\infty) - (-\infty)$ **no están definidas**.
- $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$x \cdot (\pm\infty) \overset{def}{=} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0, \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{x}{\pm\infty} \overset{def}{=} 0$.
- Además nos será útil definir $0 \cdot \pm\infty \overset{def}{=} 0$.

Definición 1.1 (Medida[1])**.** *Sea X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\varnothing \in \mathcal{C}$. Decimos que una función $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ es una medida si*

1. *$\mu(\varnothing) = 0$.*
2. *(σ-aditividad) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ son conjuntos disjuntos tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-aditividad}). \tag{1.1}$$

Los conjuntos $A \in \mathcal{C}$ se dicen μ-medibles o simplemente medibles.

[1] En algunos textos, a este concepto se le denomina *pre-medida*.

Observación 1.1. Notar que si se tiene una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ tiene sentido como elemento de $\overline{\mathbb{R}_+}$. Esto pues si consideramos la suma parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

entonces la sucesión $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es monótona no-decreciente, y por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Si n_0 es el primer valor tal que a_{n_0} es igual a $+\infty$, entonces de acuerdo a nuestra convención tendremos que $S_N = +\infty$ para todo $N \geq n_0$, y por tanto la serie tendrá el valor $+\infty$ *por definición*.

Observación 1.2. Notar que de la definición se deduce que si $A, B \in \mathcal{C}$ son tales que $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B \in \mathcal{C}$, entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \tag{1.2}$$

esto pues se pueden considerar $A_1 = A$, $A_2 = B$ y $A_n = \varnothing$ para todo $n \geq 3$. Una función que satisface (1.2) para conjuntos disjuntos se dice que es *aditiva*.

Observación 1.3. Denotaremos $\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a la unión de conjuntos *disjuntos*.

Ejemplo 1.1.

1. *Medida trivial*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ A &\longmapsto \mu(A) = 0. \end{aligned}$$

2. *Delta de Dirac*

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ A &\longmapsto \delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A, \\ 0 & \text{si } 0 \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

3. *Medida cuenta puntos*

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ A &\longmapsto \nu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } |A| < |\mathbb{N}|, \\ +\infty & \text{si } |A| \geq |\mathbb{N}|, \end{cases} \end{aligned}$$

   donde $|A|$ denota el cardinal[2] del conjunto A.

Para definir medidas, nos damos cuenta de que las familias de conjuntos $\mathcal{C}$ deben ser cerradas bajo uniones numerables de conjuntos disjuntos, es por esto que debemos revisar algunas definiciones relativas a familias de conjuntos.

Definición 1.2 (Semi-álgebra)**.** *Decimos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una* semi-álgebra *si*

1. $X, \varnothing \in \mathcal{S}$.

2. Si $A, B \in \mathcal{S}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$.

[2] Ver por ejemplo [8, Chapter 2]

3. *Para todo $A, B \in \mathcal{S}$ existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$ disjuntos tales que*

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i.$$

Ejemplo 1.2. Si $X = [0,1)$ entonces $\mathcal{S} = \{[a,b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ es una semi-álgebra. En efecto, notemos que:

- $X = [0,1) \in \mathcal{S}$ y $\varnothing = [0,0) \in \mathcal{S}$.
- Si $[a,b),\ [c,d) \in \mathcal{S}$ y sin perder generalidad supongamos que $a \leq c$ entonces
  - $$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b \leq c, \\ [c,b), & \text{si } c < b \leq d, \\ [c,d), & \text{si } b > d. \end{cases}$$
  - $$[a,b) \setminus [c,d) = \begin{cases} [a,b) & \text{si } b \leq c, \\ [a,c) & \text{si } c < b \leq d, \\ [a,c) \cup [d,b) & \text{si } b > d. \end{cases}$$

Observación 1.4. Notar que la familia de intervalos abiertos (resp. cerrados) en $X = (0,1)$ (resp. en $[0,1]$) NO es una semi-álgebra.

Definición 1.3 (Álgebra)**.** *Decimos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un* álgebra *si*

1. *$X \in \mathcal{A}$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Ejemplo 1.3.
- Si $A \subseteq X$ entonces $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ es un álgebra. El conjunto $\mathcal{A}$ es el *álgebra generada* por el conjunto A.
- El conjunto $\mathcal{S}$ del Ejemplo 1.2 no es un álgebra, pues en general $[a,b) \setminus [c,d) \notin \mathcal{S}$.
- Si X es un conjunto de cardinal infinito, entonces $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ finito ó co-finito}\}$ es un álgebra (Ejercicio).

Observación 1.5. Notar que si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$. Además, si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces

$$A^c = X \setminus A \in \mathcal{A},$$
$$A \cap B = A \setminus B^c \in \mathcal{A},$$
$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}.$$

De la observación anterior obtenemos que

Proposición 1.1. *$\mathcal{A}$ es un álgebra si y solo si*

1. *$X \in \mathcal{A}$.*
2. *$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.*

3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

4. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Definición 1.4 (σ-álgebra)**.** *Decimos que* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es una* σ-álgebra *si*

1. $\mathcal{B}$ *es un álgebra.*

2. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$*, entonces* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Observación 1.6. Notar que si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, y si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c,$$

es decir, una σ-álgebra es una familia que es cerrada bajo complementos y uniones e intersecciones numerables.

Ejemplo 1.4. Sea X un conjunto no-numerable, y sea $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ la clase de conjuntos A tales que A es numerable ó A^c es numerable. Entonces Σ es una σ-álgebra (Ejercicio).

Proposición 1.2. $\mathcal{B}$ *es una σ-álgebra si y solo si*

1. $\mathcal{B}$ *es un álgebra.*

2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ *es una familia de conjuntos disjuntos, entonces* $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Demostración. ($\Rightarrow$): Evidente.
($\Leftarrow$): Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, y definamos $B_1 = A_1$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_n,$$

y como $\mathcal{B}$ es un álgebra, entonces $B_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k,$$

y además los B_n's son disjuntos ■

Lema 1.3. *Sea* $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *una colección no vacía de álgebras (resp. σ-álgebras), entonces*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

es un álgebra (resp. σ-álgebra).

Demostración. Ejercicio. ■

Definición 1.5. *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$*. Definimos*

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{C} \\ \mathcal{A} \text{ es álgebra}}} \mathcal{A},$$

y la denotamos como el álgebra generada por $\mathcal{C}$*. De similar forma se define* $\sigma(\mathcal{C})$ *como la σ-álgebra generada por* $\mathcal{C}$*.*

Proposición 1.4. *Sea X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Luego*

1. *$\mathcal{A}(\mathcal{C})$ es un álgebra y $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra.*
2. *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.*
3. *$\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}$ es un álgebra.*
4. *$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semi-álgebra, entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \mathcal{P}(X) : \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, (A_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{S} \textit{ disjuntos tales que } A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \right\}$$

Demostración. Definamos

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{P}(X) : \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, (A_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{S} \text{ disjuntos tales que } A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \right\},$$

y veamos que $\mathcal{C}$ es un álgebra.

- $X \in \mathcal{S}$, luego $X \in \mathcal{C}$.
- $A, B \in \mathcal{C}$, luego $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ para $A_i \in \mathcal{S}$ disjuntos entre si, y $B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ para $B_j \in \mathcal{S}$ disjuntos entre si. Luego
$$A \cap B = \bigcup_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}} A_i \cap B_j,$$
pero si $(i,j) \neq (i',j')$ entonces $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \varnothing$, y como $\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas tenemos que $A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$, luego $A \cap B \in \mathcal{C}$ pues es una unión disjunta de elementos en $\mathcal{S}$.
- Si $B = \bigcup_{i=1}^n B_j$ entonces $B^c = \bigcap_{i=1}^n B_i^c$. Y si $B_i \in \mathcal{S}$, entonces $B_i^c = X \setminus B_i = \bigsqcup_{j=1}^m D_{i,j}$ para ciertos $D_{i,j} \in \mathcal{S}$ disjuntos entre si. Luego $B_i^c \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $B^c \in \mathcal{C}$.
- Los pasos anteriores implican que $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{C}$.

Concluimos que $\mathcal{C}$ es un álgebra y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, por lo tanto $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}$.

Por otra parte, si $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{S}$ es cualquier álgebra que contiene a S, entonces $\mathcal{A}$ debe contener uniones finitas de elementos en $\mathcal{S}$ (por ser un álgebra), por lo que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, de donde

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S}).$$

■

Observación 1.7. Notar que la proposición anterior nos dice que para generar un álgebra a partir de una semi-álgebra $\mathcal{S}$ basta considerar uniones finitas y disjuntas entre elementos de $\mathcal{S}$.

En lo que sigue denotamos

$$A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}, A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
$$A_n \searrow A \Leftrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}, A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Definición 1.6 (Clase monótona)**.** *Decimos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una clase monótona si dados $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ entonces*

- $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.
- $A_n \searrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.

Definición 1.7. *Dado $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, definimos la clase monótona generada por $\mathcal{C}$ como*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}\supseteq\mathcal{C} \\ \mathcal{M} \text{ es clase monótona}}} \mathcal{M}$$

Lema 1.6. *Sea $\mathcal{M}$ un álgebra. Entonces*

$$\mathcal{M} \text{ es clase monótona } \Leftrightarrow \mathcal{M} \text{ es } \sigma\text{-álgebra.}$$

Demostración. ($\Leftarrow$): Evidente.
($\Rightarrow$): Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Para ello, definamos

$$C_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{M} \text{ (por ser álgebra)}$$

y notemos que $C_m \nearrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ■

Teorema 1.7 (Teorema de la clase monótona)**.** *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Demostración. ($\supseteq$): Como toda σ-álgebra es clase monótona se tiene que

$$\{\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A} : \mathcal{M} \text{ es } \sigma\text{-álgebra}\} \subseteq \{\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A} : \mathcal{M} \text{ es clase monótona}\},$$

de donde $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.
($\subseteq$): Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$, basta probar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es una σ-álgebra, y del lema anterior, basta demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un álgebra.

En primer lugar es claro que $X \in \mathcal{A}$, luego $X \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Ahora para cada $A \subseteq X$ definimos

$$\kappa(A) = \{B \subseteq X : A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Notemos que $B \in \kappa(A) \Leftrightarrow A \in \kappa(B)$. Veamos ahora que $\kappa(A)$ es clase monótona: si $B_n \nearrow B$ con $B_n \in \kappa(A)$, luego es claro que

$$\begin{gathered} B_n \cup A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ y } B_n \cup A \nearrow B \cup A \\ B_n \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ y } B_n \setminus A \nearrow B \setminus A \\ A \setminus B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ y } A \setminus B_n \searrow A \setminus B, \end{gathered}$$

pero como $\mathcal{M}(A)$ es clase monótona, tenemos que $B \cup A, B \setminus A, A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, en otras palabras, $B \in \kappa(A)$. De manera similar se demuestra que si $B_n \searrow B$, $B_n \in \kappa(A)$ entonces $B \in \kappa(A)$, de donde obtenemos que $\kappa(A)$ es clase monótona.

Con esto en mente tenemos que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \kappa(A)$, pues $\mathcal{A}$ es álgebra. Además, como $\kappa(A)$ es clase monótona y $\kappa(A) \supseteq \mathcal{A}$ tenemos que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \kappa(A)$. En otras palabras, hemos demostrado que para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, entonces $B \in \kappa(A)$. Pero esto implica que $A \in \kappa(B)$, luego

$$\mathcal{A} \subseteq \kappa(B) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \kappa(B), \quad \forall B \in \mathcal{M}(A).$$

Es consecuencia, si $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entonces

$$A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

es decir $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un álgebra. ∎

Corolario 1.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mathcal{M}$ una clase monótona tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Demostración. Notar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. ∎

Definición 1.8 (σ-álgebra Boreliana)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se define la tribu boreliana asociada a $(X, \mathcal{T})$ como la σ-álgebra generada por $\mathcal{T}$, es decir*

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}).$$

En $\mathbb{R}^N$ se entenderá (salvo que se mencione lo contrario) que la tribu boreliana es la σ-álgebra generada por la topología de la norma y se denotará $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ o $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$.

1.2. Espacios de medida

Definición 1.9. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una σ-álgebra en $\mathcal{P}(X)$. Al par $(X, \mathcal{B})$ se le denota espacio medible. Si además tenemos una medida $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, entonces al trío $(X, \mathcal{B}, \mu)$ se le denota espacio de medida, y los elementos del $\mathcal{B}$ se dicen conjuntos μ-medibles, o simplemente medibles si el contexto así lo permite.*

Observación 1.8. Si $\mu(X) = 1$, entonces decimos que μ es una *probabilidad* y al trío $(X, \mathcal{B}, \mu)$ se le llama *espacio de probabilidad*.

Ejemplo 1.5. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$. Sean $p_i \in [0, 1]$ números reales tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Para cada $A \subseteq X$, definimos $I(A) = \{i : a_i \in A\}$

$$\mu(A) = \sum_{i \in I(A)} p_i,$$

entonces $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad.

Lema 1.9. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida, entonces*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B$, entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.*

Demostración. Basta notar que $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ y que $B = (B \cap A) \sqcup (B \setminus A)$. ∎

Observación 1.9.

- En las igualdades del lema puede ocurrir una igualdad del tipo $\infty = \infty$.

- Notar que solo si tiene sentido hacer las restas (es decir, cuando no aparece $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$), entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Corolario 1.10. *Si $A, B \in \mathcal{B}$ son tales que $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Corolario 1.11. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-sub-aditividad}).$$

Proposición 1.12 (Continuidad de la medida)**.** *Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra sobre X, y $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida. Entonces*

1. *$A_n \nearrow A \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu(A_n) \nearrow \mu(A)$.*
2. *$A_n \searrow A \in \mathcal{B}$ y $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ para algún n_0 (o bien $\mu(X) < \infty$) $\Rightarrow \mu(A_n) \searrow \mu(A)$.*

Demostración. 1. Notar que $\mu(A_n)$ es una sucesión no-decreciente en $\overline{\mathbb{R}_+}$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ existe en $\overline{\mathbb{R}_+}$. Si $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$, entonces $\mu(A) = +\infty$, pues $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ para todo n, luego basta hacer la demostración cuando $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) < +\infty$. Como $\mu(A_n)$ es no-decreciente, debe suceder que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego del Lema 1.9 obtenemos

$$\mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n),$$

y dado que podemos escribir A como la unión disjunta

$$A = A_1 \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n),$$

se concluye que

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2. Ejercicio. *Considerar los conjuntos $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$ (o bien $B_n = A_n^c$).*

∎

Definición 1.10. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que*

- *$A \in B$ es μ-finito si $\mu(A) < \infty$. El espacio de medida se dice* finito *si $\mu(X) < \infty$.*
- *$A \in \mathcal{B}$ es μ-σ-finito si existen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El espacio de medida se dice* σ-finito *si X es μ-σ-finito.*

Observación 1.10. Notar que si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y si $B_1 = A_1$ y $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, entonces $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, y $\mu(B_n) \leq \mu(A_n) < \infty$. Por lo que en la definición de σ-finito se puede suponer que los conjuntos son disjuntos.

1.2.1. Extensiones de medidas

Lema 1.13. *Sea $\mathcal{S}$ una semi-álgebra y sea $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función.*

1. *Si μ es aditiva y si $\bigsqcup_{i=1}^N A_i = \bigsqcup_{j=1}^M B_j$ con $A_i, B_j \in \mathcal{S}$, entonces*
$$\sum_{i=1}^N \mu(A_i) = \sum_{j=1}^M \mu(B_j).$$

2. *Si μ es σ-aditiva y si $\bigsqcup_{i=1}^N A_i = \bigsqcup_{j=1}^\infty B_j$ con $A_i, B_j \in \mathcal{S}$, entonces*
$$\sum_{i=1}^N \mu(A_i) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j)$$

Demostración. Para la primera parte tenemos que si $A = \bigsqcup_{i=1}^N A_i = \bigsqcup_{j=1}^M B_j$ entonces cada A_i se puede escribir como la unión disjunta
$$A_i = A \cap A_i = \bigsqcup_{j=1}^M B_j \cap A_i,$$
y similarmente
$$B_j = A \cap B_j = \bigsqcup_{i=1}^N B_j \cap A_i,$$
donde $B_j \cap A_i \in \mathcal{S}$ pues $\mathcal{S}$ es una semi-álgebra. Luego como μ es aditiva en $\mathcal{S}$ tenemos que
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^N \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^M B_j \cap A_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \mu(B_j \cap A_i)\\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \mu(B_j \cap A_i)\\ &= \sum_{j=1}^M \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^N B_j \cap A_i\right)\\ &= \sum_{j=1}^M \mu(B_j).\end{aligned}$$

Para la segunda parte, si $A = \bigsqcup_{i=1}^N A_i = \bigsqcup_{j=1}^\infty B_j$, tal como antes
$$A_i = A \cap A_i = \bigsqcup_{j=1}^\infty A_i \cap B_j,$$
$$B_j = A \cap B_j = \bigsqcup_{i=1}^N B_j \cap A_i,$$

y como μ es σ-aditiva (y en particular aditiva) en $\mathcal{S}$ entonces

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j),$$

$$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \cap B_j),$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).\end{aligned}$$

■

Observación 1.11. En la demostración de esta proposición hemos usado el siguiente resultado que se deja como ejercicio: *Sean* $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}_+}$*, entonces*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}.$$

Teorema 1.14. *Sea $\mathcal{S}$ una semi-álgebra y $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y que es aditiva (resp. σ-aditiva). Entonces existe una única función $\bar{\mu} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ tal que $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ para todo $A \in \mathcal{S}$ y que es aditiva (resp. σ-aditiva).*

Además, si μ es finita (resp. σ-finita) entonces $\bar{\mu}$ es finita (resp. σ-finita).

Demostración. Recordemos que el álgebra generada por $\mathcal{S}$ se puede escribir como

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \mathcal{P}(X) : \exists\ I \subset \mathbb{N},\ \text{finito},\ \exists\ (A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{S} \text{ disjuntos tales que } A = \bigsqcup_{i\in I} A_i \right\}.$$

Sea $\tilde{\mu}$ una extensión de μ que es aditiva, luego para cada $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ podemos escribir $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{S}$ y

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \tilde{\mu}(A_i) = \sum_{i\in I} \mu(A_i),$$

esto nos dice que la única manera de definir la extensión de manera aditiva mediante

$$\bar{\mu}(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

donde $A_i \in \mathcal{S}$ se obtienen de la caracterización de $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Notar que la parte 1 de la Lema 1.13 garantiza que $\bar{\mu}$ está bien definida, pues $\bar{\mu}(A)$ no depende de la escritura que tenga A como unión disjunta de elementos de $\mathcal{S}$.

Veamos que $\bar{\mu}$ es σ-aditiva cuando μ es σ-aditiva. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ conjuntos disjuntos tales que $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Queremos demostrar que

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n).$$

Como $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, entonces existen conjuntos disjuntos $(C_i)_{i=1}^N \in \mathcal{S}$ tales que

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{N} C_i \Rightarrow \bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu(C_i),$$

y como $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ entonces existen conjuntos disjuntos $(A_{n,k})_{k=1}^{M_n} \in \mathcal{S}$ tales que

$$A_n = \bigsqcup_{k=1}^{M_n} A_{n,k} \Rightarrow \bar{\mu}(A_n) = \sum_{k=1}^{M_n} \mu(A_{n,k}).$$

Por lo tanto

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{N} C_i = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{M_n} A_{n,k}$$

y la parte 2 de la Lema 1.13 nos dice que

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(C_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{M_n} \mu(A_{n,k}),$$

de donde obtenemos que

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu(C_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{M_n} \mu(A_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

Finalmente, si μ es finita, entonces $\bar{\mu}(X) = \mu(X) < \infty$ es decir $\bar{\mu}$ también es finita. En tanto que si μ es σ-finita, entonces existen $X_n \in \mathcal{S}$ tales que

$$X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ con } \bar{\mu}(X) = \mu(X_n) < \infty.$$

■

1.3. Medida exterior

En lo que sigue, queremos extender medidas desde un álgebra $\mathcal{A}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Para ello necesitamos el concepto de medida exterior.

Definición 1.11 (Medida exterior)**.** *Una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ se dice medida exterior si*

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$.
2. *(monotonía)* $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. *(σ-sub-aditividad) Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *entonces*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Teorema 1.15 (Carathéodory)**.** *Sea μ^* una medida exterior. Definimos*

$$\mathcal{B}^* = \{B \subseteq X : \forall\, A \subseteq X\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)\}\,.$$

Entonces $\mathcal{B}^*$ es una σ-álgebra y $\mu^*\Big|_{\mathcal{B}^*}$ es una medida.

Observación 1.12.

- Los elementos $B \in \mathcal{B}^*$ se dicen μ^*-medibles.
- Notar que si $C = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ con B, C disjuntos y $B \in \mathcal{B}^*$ entonces

$$\begin{aligned}\mu^*((A \cap B) \sqcup (A \cap C)) &= \mu^*(((A \cap B) \sqcup (A \cap C)) \cap B) + \mu^*(((A \cap B) \sqcup (A \cap C)) \cap B^c) \\ &= \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap C).\end{aligned}$$

- Dado que μ^* es sub-aditiva, tenemos que para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se cumple

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),$$

  entonces tenemos que

$$\mathcal{B}^* = \{B \subseteq X : \forall\, A \subseteq X\ \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)\}\,.$$

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{B}^*$ es un álgebra. Es evidente que X pertenece a $\mathcal{B}^*$, y por la simetría en la definición, si $B \in \mathcal{B}^*$ entonces $B^c \in \mathcal{B}^*$. Sean ahora $A, B \in \mathcal{B}^*$, veamos que $A \cup B \in \mathcal{B}^*$: para ello debemos demostrar que

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c), \quad \forall\, C \subseteq X.$$

Sea $C \subseteq X$, entonces como $A, B \in \mathcal{B}^*$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \\ &= \underbrace{\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c \cap B)}_{\mu^*(C \cap (A \cup B))} + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^*(C \cap (A \cup B)) &= \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A) + \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A^c) \\ &= \mu^*((C \cap A) \cup (C \cap B \cap A)) + \mu^*(C \cap B \cap A^c) \\ &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B \cap A^c),\end{aligned}$$

es decir

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c),$$

o sea $A \cup B \in \mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}^*$ es un álgebra.

Consideremos ahora $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^*$ una familia disjunta. Debemos demostrar que si $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ entonces para cualquier $C \subseteq X$

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c).$$

Si $\mu^*(C) = +\infty$ esto es evidente, por lo que solo debemos ver el caso en que $\mu^*(C) < +\infty$. Para $N \in \mathbb{N}$ observemos que

$$C \cap A^c = C \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \subseteq C \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c \quad \overset{\text{(monotonía)}}{\Rightarrow} \quad \mu^*\left(C \cap A^c\right) \leq \mu^*\left(C \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c\right),$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*\left(C \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\right) + \mu^*\left(C \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)^c\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N} \mu^*(C \cap A_n) + \mu^*\left(C \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c\right)\\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(C \cap A_n) + \mu^*\left(C \cap A^c\right),\end{aligned}$$

y como lo anterior vale para todo $N \in \mathbb{N}$, podemos pasar al límite $N \to \infty$ y obtener

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(C \cap A_n) + \mu^*\left(C \cap A^c\right)\\ &\geq \mu^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C \cap A_n\right) + \mu^*\left(C \cap A^c\right)\\ &= \mu^*\left(C \cap A\right) + \mu^*\left(C \cap A^c\right),\end{aligned}$$

gracias a la σ-sub-aditividad de μ^*, lo que demuestra que $A \in \mathcal{B}^*$.

Finalmente, debemos probar que la restricción de μ^* a $\mathcal{B}^*$ es medida. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia disjunta en $\mathcal{B}^*$ solo debemos demostrar que

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

pero esto se obtiene tomando $C = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ en lo que hicimos anteriormente. ■

Definición 1.12. *Si $A_n \in \mathcal{A}$, $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diremos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de C por elementos de $\mathcal{A}$.*

Proposición 1.16. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en $\mathcal{P}(X)$ y sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función de conjuntos que satisface $\mu(\varnothing) = 0$ y que es σ-aditiva (es decir, una medida sobre $\mathcal{A}$). Para $A \subseteq X$, definimos*

$$\mu^*(A) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un cubrimiento de } A \text{ por elementos de } \mathcal{A}\right\}.$$

Entonces μ^* es una medida exterior y $\mu^*\Big|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Observación 1.13. Notar que si $\mathcal{A}$ es un álgebra y si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es un cubrimiento de C, y si consideramos $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ forma un cubrimiento disjunto de C y que verifica

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$

por lo tanto

$$\mu^*(A) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}.$$

Demostración. Veamos primero que μ^* es efectivamente una extensión de μ. Sea $A \in \mathcal{A}$, luego $A \subseteq A$ es parte de los cubrimientos de A, luego

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Por otra parte, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces si definimos

$$B_n = A \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_n \right),$$

entonces $B_n \in \mathcal{A}$, son disjuntos, $B_n \subseteq A_n$ y

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A \in \mathcal{A},$$

luego como μ es una medida sobre $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \tag{1.3}$$

luego tomando el ínfimo sobre todas las posibles familias $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos que

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Solo queda ver que μ^* es una medida exterior. Evidentemente $\mu^*(\varnothing) = 0$ y si $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, por lo que solo veremos la σ-sub-aditividad. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Si algún A_n verifica $\mu^*(A_n) = +\infty$ no hay nada que demostrar, por lo que supondremos que $\mu^*(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos un cubrimiento $(A_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de A_n tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

entonces $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}$, luego $(A_{n,k})_{(n.k)\in\mathbb{N}^2}$ es un cubrimiento numerable de A por elementos de $\mathcal{A}$, de donde concluimos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

pero como lo anterior vale para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

lo que demuestra la σ-sub-aditividad. ■

Proposición 1.17. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathcal{P}(X)$ y μ una medida sobre $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^*$, donde $\mathcal{B}^*$ es la σ-álgebra inducida por la medida exterior μ^* definida a partir de μ.*

Demostración. Recordemos que

$$\mathcal{B}^* = \{ B \subseteq X : \forall\, A \subseteq X\ \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \}.$$

y definamos

$$\mathcal{B}' = \{ B \subseteq X : \forall\, A \in \mathcal{A}, \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \}.$$

Es evidente que $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}'$, y como μ^* extiende a μ tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}'$ pues si $B \in \mathcal{A}$ entonces para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\mu^*(B) = \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

Para concluir que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^*$ veremos que en realidad $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$, para lo que basta verificar que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}^*$.

Sea $B \in \mathcal{B}'$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Consideremos ahora $C \subseteq X$, si $\mu^*(C) = +\infty$, entonces

$$\mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c) \leq \mu^*(C),$$

por lo que entonces $B \in \mathcal{B}^*$. Si ahora $\mu^*(C) < +\infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ debe existir un cubrimiento $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de C tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(C) + \varepsilon,$$

luego, como $A_n \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}'$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mu^*(C) + \varepsilon &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n \cap B) + \mu^*(A_n \cap B^c)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap B) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap B^c) \\
&\geq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B^c\right) \\
&\geq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c),
\end{aligned}$$

como esto vale para cada $\varepsilon > 0$ obtenemos que

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c),$$

de donde concluimos que $B \in \mathcal{B}^*$. ■

Observación 1.14. De las demostraciones anteriores podemos deducir lo siguiente: Sea $A \subseteq X$ con $\mu^*(A) < \infty$, luego dado cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe un cubrimiento $(A_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ para A tal que

$$\mu^*(A_k) = \mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k},$$

donde $A_k := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \supseteq A$, por lo tanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_k)$, es decir hemos encontrado $A_k \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que

$$\mu(A) \leq \mu^*(A_k) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k}.$$

Sea ahora $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \sigma(\mathcal{A})$, entonces

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A_k) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k},$$

por lo tanto $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$. Como además $A \subseteq A_k$ para todo k, entonces $A \subseteq B$, luego $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Es decir, hemos encontrado $B \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ y $A \subseteq B$. Se deja como ejercicio verificar que la misma propiedad se puede probar si $\mu^*(A) = +\infty$ cuando μ es σ-finita.

Lema 1.18. *$\mathcal{B}^*$ es la σ-álgebra mas grande que contiene a $\mathcal{A}$ donde la medida exterior asociada a μ es medida.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ una σ-álgebra donde μ^* es medida. Veamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$. En efecto, sea $A \in \mathcal{B}$, y sea $C \subseteq X$. Tenemos que demostrar que

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c).$$

De la observación anterior sabemos que si $\mu^*(C) < +\infty$ entonces existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $C \subseteq B$ y

$$\mu^*(B) = \mu^*(C),$$

pero $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$, luego $B \in \mathcal{B}$, y como μ^* es medida sobre $\mathcal{B}$ se debe cumplir que

$$\mu^*(C) = \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c),$$

por lo tanto $B \in \mathcal{B}^*$.

Si $\mu^*(C) = +\infty$, no hay nada que demostrar. ■

Teorema 1.19 (Teorema de Carathéodory)**.** *Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Entonces existe una medida $\hat{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ que extiende a μ.*

Demostración. Para obtener $\hat{\mu}$ procedemos de la siguiente forma. Primero pasamos a la medida exterior μ^* asociada a μ con su respectiva σ-álgebra $\mathcal{B}^*$ dada por la proposición anterior.

Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^*$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}^*$, luego podemos restringir μ^* a $\sigma(\mathcal{A})$, y a esta medida la llamamos $\hat{\mu}$. ■

Teorema 1.20 (Teorema de Hahn)**.** *Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Si μ es σ-finita, entonces existe una única extensión de μ a $\sigma(\mathcal{A})$ (y además es σ-finita).*

Demostración. Solo tenemos que ver la unicidad, ya que la existencia viene dada por el Teorema de Caratheodory. Sea $\hat{\mu}$ la extensión de Carathéodory, y sea ν otra extensión. Veamos primero que $\nu \leq \hat{\mu}$, es decir, para todo $A \in \sigma(\mathcal{A})$ se tiene que

$$\nu(A) \leq \hat{\mu}(A).$$

Consideremos un cubrimiento $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de A, luego $\nu(A_n) = \mu(A_n)$ y

$$\nu(A) \leq \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$

luego, tomando el ínfimo sobre todos los posibles cubrimientos obtenemos que

$$\nu(A) \leq \mu^*(A) = \hat{\mu}(A).$$

Para concluir argumentemos por contradicción, es decir, supongamos que existe $A \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $\nu(A) < \hat{\mu}(A)$. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ un cubrimiento de A, que sin perder generalidad podemos suponer disjunto, y como μ es σ-finita, también podemos suponer que $\mu(A_n) < +\infty$.

Como ν y $\hat{\mu}$ son medidas, que satisfacen $\nu \leq \hat{\mu}$ tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n \cap A) = \nu(A) < \hat{\mu}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{\mu}(A_n \cap A)$$

y

$$\nu(A_n \cap A) \leq \hat{\mu}(A_n \cap A) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

luego debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(A_{n_0} \cap A) < \hat{\mu}(A_{n_0} \cap A)$. Pero como $A_{n_0} \in \mathcal{A}$ entonces $\nu(A_{n_0}) = \hat{\mu}(A_{n_0})$, luego por la aditividad de ν y $\hat{\mu}$ obtenemos que

$$\nu(A_{n_0} \cap A) + \nu(A_{n_0} \cap A^c) = \nu(A_{n_0}) = \hat{\mu}(A_{n_0}) = \hat{\mu}(A_{n_0} \cap A) + \hat{\mu}(A_{n_0} \cap A^c),$$

donde todas las cantidades son finitas y $\nu(A_{n_0} \cap A) < \hat{\mu}(A_{n_0} \cap A)$. Por lo tanto obtenemos que

$$\nu(A_{n_0} \cap A^c) > \hat{\mu}(A_{n_0} \cap A),$$

lo que contradice que $\nu \leq \hat{\mu}$. ■

En resumen, hemos probado lo siguiente:

- Dada una semi-álgebra $\mathcal{S}$ y una medida $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, entonces existe una única extensión $\mu' : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ definida como
$$\mu'(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i), \quad I \text{ es finito tal que } A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,\ A_i \in \mathcal{S}.$$
- Existe una extensión $\hat{\mu}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ a $\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ definida como
$$\hat{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A_n) : A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S}), A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$
- La extensión es única si es que μ' es σ-finita.

1.4. La medida de Lebesgue

Los teoremas de extensión anteriores son fundamentales en la construcción de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ (y en general las medidas de Lebesgue-Stieltjes). Para ello consideremos $\mathcal{S} = \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\}$, donde por convención $\varnothing = (a, a]$ y $(a, \infty] = (a, \infty)$. Veamos que $\mathcal{S}$ es una semi-álgebra.

Si $(a_1, b_1] \in \mathcal{S}$ y $(a_2, b_2] \in \mathcal{S}$, entonces

$$(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}] \in \mathcal{S},$$

es decir $\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Finalmente, si $(a, b] \in \mathcal{S}$, entonces

$$(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, +\infty],$$

luego $(a, b]^c$ se puede escribir como una unión disjunta finita de elementos en $\mathcal{S}$. Esto demuestra que $\mathcal{S}$ es una semi-álgebra.

Consideremos la función $\ell : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ definida como

$$\ell((a, b]) = b - a.$$

Evidentemente $\ell(\varnothing) = \ell((a, a])) = a - a = 0$, así que solo resta ver que ℓ es σ-aditiva. Sean $((a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ una familia disjunta de intervalos tales que

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] = (a, b].$$

Para que esto ocurra, y luego de posiblemente re-indexar, debe suceder que si tomamos cualquier sub-colección *finita* de dichos intervalos, entonces deben estar ordenados de la siguiente manera

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots < b_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq a_{n+2} < \ldots < a_N < b_N \leq a_{N+1} < b_{N+1} \leq b,$$

es decir $b_n \leq a_{n+1}$ para todo n. Observemos que si $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{N} \ell((a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{N} b_n - a_n \leq \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} - a_n = a_{N+1} - a_1 \leq b - a = \ell((a, b]),$$

como $\ell((a_n, b_n]) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos pasar al límite cuando $N \to \infty$ y deducir que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell((a_n, b_n]) \leq \ell((a, b]) = \ell\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]\right).$$

Para probar la otra desigualdad, consideremos primero el caso $-\infty < a < b < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$, luego

$$(a + \varepsilon, b] \subset [a + \varepsilon, b] \subset (a, b],$$

además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que si $\varepsilon_n > 0$, que fijaremos un poco mas abajo,

$$(a_n, b_n] \subset (a_n, b_n + \varepsilon_n) \subset (a_n, b_n + \varepsilon_n]$$

luego

$$(a + \varepsilon, b] \subset [a + \varepsilon, b] \subset (a, b] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n + \varepsilon_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n + \varepsilon_n]$$

pero el intervalo $[a + \varepsilon, b]$ es compacto, luego existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, tal que

$$(a + \varepsilon, b] \subset [a + \varepsilon, b] \subset \bigcup_{n\in I} (a_n, b_n + \varepsilon_n) \subset \bigcup_{n\in I} (a_n, b_n + \varepsilon_n].$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ y que los intervalos $(a_n, b_n + \varepsilon_n)$ están ordenados de forma que

$$a_1 \leq a + \varepsilon \leq a_2 \leq b_1 + \varepsilon_1 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{n+1} \leq b_n + \varepsilon_n \leq a_{n+2} \leq \ldots \leq b \leq b_N + \varepsilon_N,$$

esto pues si alguno de los intervalos queda dentro de otro, lo podemos sacar de la lista.

Si ahora fijamos $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\ell((a, b]) &= b - a \\
&\leq b - a_1 + \varepsilon \\
&\leq b_N - a_1 + (1 + 2^{-N})\varepsilon \\
&= b_N - a_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) + (1 + 2^{-N})\varepsilon \\
&\leq b_N - a_N + \sum_{n=1}^{N-1} \left(b_n + 2^{-n}\varepsilon - a_n\right) + (1 + 2^{-N})\varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) + (1 + 2^{-N})\varepsilon + \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}\varepsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) + (1+2^{-N})\varepsilon + \left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^N}}{\frac{1}{2}}\right)\varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) + (1+2^{-N})\varepsilon + (1-2^{1-N})\varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) + 2\varepsilon - 2^{-N}\varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\ell((a_n, b_n]) + 2\varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell((a_n, b_n]) + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

estimación que es válida para todo $\varepsilon > 0$, lo que entrega la desigualdad deseada.

Veamos ahora el caso en que $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$ y $(-\infty, b] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n]$. Sea $N \in \mathbb{N}$, luego

$$
(-N, b] = (-\infty, b] \cap (-N, b] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n] \cap (-N, b] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(\text{máx}\{a_n, -N\}, b_n],
$$

denotemos por $\tilde{a}_n = \text{máx}\{a_n, -N\}$, luego por el caso anterior

$$
\ell((-N, b]) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell((\tilde{a}_n, b_n]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell((a_n, b_n])
$$

de donde se deduce que

$$
b + N \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell((a_n, b_n]) \quad \forall\, N \in \mathbb{N},
$$

luego la única posibilidad es que

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell((a_n, b_n]) = +\infty = \ell((-\infty, b]).
$$

Los otros casos se dejan como ejercicio. Observar que además ℓ es σ-finita pues $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1]$.

Luego lo visto en la Teorema 1.14 nos dice que podemos extender ℓ de manera única y σ-aditiva a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. A la extensión la seguimos denotando por ℓ. Como ℓ es σ-finita, por los teoremas de Carathéodory y de Hahn concluimos que existe una única medida que extiende ℓ a $\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$. Además, del Ejercicio 1.11 se obtiene que $\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la σ-álgebra Boreliana en $\mathbb{R}$.

Veamos algunas propiedades de la medida de Lebesgue

1. Si $-\infty < a \leq b < \infty$ entonces $\ell((a, b]) = \ell((a, b)) = \ell([a, b)) = \ell([a, b]) = b - a$. Para demostrar esto basta notar que

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a, b - \frac{1}{n}], \\
[a, b] &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a - \frac{1}{n}, b], \\
[a, b) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a, b - \frac{1}{n}]
\end{aligned}
$$

y usar la continuidad de la medida.

2. $\ell(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y en general si $A \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces $\ell(A) = 0$.

3. Sea $A \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\lambda > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Definamos

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$$
$$A + a = \{x + a : x \in A\}\,.$$

Entonces

$$\ell(A + a) = \ell(A), \tag{1.4}$$
$$\ell(\lambda A) = \lambda \ell(A) \tag{1.5}$$

Para demostrar (1.4), veamos primero que si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, entonces $A + a \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, para ello consideremos

$$\mathcal{B}' = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : A + a \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}\,.$$

De la definición tenemos que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Para la otra inclusión, notemos que $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra pues

$$X = X + a \in \mathcal{B}'$$
$$(A + a)^c = A^c + a$$
$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n + a),$$

y como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}'$ deducimos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{B}'$.

Veamos ahora que $\lambda(A + a) = \lambda(A)$. Para ello, consideremos la medida $\tilde{\ell} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ definida como

$$\tilde{\ell}(A) = \ell(A + a),$$

pero si $A = (c, d] \in \mathcal{S}$, entonces $\tilde{\ell}(c, d]) = \ell((c + a, d + a]) = d - c = \ell((c, d])$, luego $\tilde{\ell} = \ell$ sobre $\mathcal{S}$, además ambas son medidas σ-finitas sobre $\mathcal{S}$. Luego por la unicidad de la extensión se debe tener que $\tilde{\ell} = \ell$.

Se deja como ejercicio verificar (1.5) (ver el Ejercicio 1.35). Ver también el Ejercicio 1.42.

1.5. Completitud de medidas

Definición 1.13. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que $N \subseteq X$ es despreciable si es que existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = 0$ y $N \subseteq A$. Denotamos por $\mathcal{N}$ a la colección de conjuntos despreciables.*

Observación 1.15.

- $\mu(A) = 0 \Rightarrow A$ es despreciable.
- Todo subconjunto de un despreciable es despreciable.
- Si $(N_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ son despreciables, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ es despreciable.

Definición 1.14. *Decimos que un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es completo si $\mathcal{B}$ contiene a todos los conjuntos despreciables.*

Teorema 1.21. *Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida exterior y sea $\mathcal{B}^*$ su σ-álgebra asociada. Entonces $\mathcal{B}^*$ es completa.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}^*$ tal que $\mu^*(A) = 0$ y sea $B \subseteq A$. Veamos que $B \in \mathcal{B}^*$. Sea $C \subseteq X$, entonces

$$\mu^*(C) = \mu^*(A) + \mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B^c) \geq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c)$$

gracias a la monotonía de μ^*, de donde obtenemos que $B \in \mathcal{B}^*$. ■

Definición 1.15. *Si ℓ^* es la medida exterior de Lebesgue, entonces denotamos por $\mathcal{B}_L$ a la σ-álgebra de Carathéodory asociada a ℓ^*. El espacio de medida de Lebesgue es entonces el espacio de medida completo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$.*

Teorema 1.22 (Completación de espacios de medida)**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sean*

$$\mathcal{B}' = \{B \triangle N : B \in \mathcal{B}, N \text{ despreciable}\}$$
$$\mathcal{B}'' = \{B \cup N : B \in \mathcal{B}, N \text{ despreciable}\},$$

entonces $\mathcal{B}' = \mathcal{B}''$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' = \mathcal{B}''$ es σ-álgebra y se denota la μ-completación de $\mathcal{B}$.

Además, para cada $B \in \mathcal{B}$ y N despreciable, se define

$$\bar{\mu}(B \triangle N) = \bar{\mu}(B \cup N) = \mu(B),$$

y se tiene que

1. *$\bar{\mu}$ es una extensión de μ a $\bar{\mathcal{B}}$.*
2. *$(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ es un espacio de medida completo.*
3. *Los conjuntos μ-despreciables son los mismos que los $\bar{\mu}$-despreciables.*

Finalmente, $\bar{\mathcal{B}}$ es la σ-álgebra mas pequeña que contiene a $\mathcal{B}$ sobre la cual se puede definir una extensión completa de μ.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}''$. Sea N un conjunto μ-despreciable, luego existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = 0$ y $N \subseteq A$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} B \triangle N &= (B \cap N^c) \cup (N \cap B^c) \\ &= \underbrace{(B \cap A^c)}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{(B \cap N^c \cap A)}_{\subseteq A} \cup \underbrace{(N \cap B^c)}_{\subseteq N \subseteq A}, \end{aligned}$$

es decir, escribimos $B \triangle N$ como una unión entre un elemento de $\mathcal{B}$ y un conjunto despreciable, es decir $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}''$.

Por otra parte, tenemos que

$$B \cup N = B \triangle \underbrace{(N \cap B^c)}_{\subseteq N},$$

es decir $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'$.

Veamos ahora que $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra. Como $\varnothing$ es despreciable, inmediatamente tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}''$, por lo que $\varnothing, X \in \mathcal{B}'$. Sea ahora $B \triangle N \in \mathcal{B}'$, entonces existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $N \subseteq A$ y $\mu(A) = 0$, de donde

$$\begin{aligned} (B \triangle N)^c &= ((B \cup N) \setminus (B \cap N))^c \\ &= ((B \cup N) \cap (B \cap N)^c)^c \\ &= ((B \cup N)^c \cup (B \cap N) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (B^c \cap N^c) \cup (B \cap N) \\
&= \underbrace{(B^c \cap N^c \cap A^c)}_{\in \mathcal{B} \text{ pues } N^c \cap A^c = A^c} \cup \underbrace{(B^c \cap N^c \cap A)}_{\subseteq A} \cup \underbrace{(B \cap N)}_{\subseteq N},
\end{aligned}
$$

luego $(B \triangle N)^c \in \mathcal{B}''$. Además, si $(B_n \cup N_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}''$ luego

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup N_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n}_{\text{despreciable}},$$

es decir $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra.

Veamos ahora que $\bar{\mu}$ está bien definida. Supongamos que $B_1 \triangle N_1 = B_2 \triangle N_2 \in \mathcal{B}'$, luego[3]

$$B_1 \triangle B_2 = N_1 \triangle N_2 \text{ que es despreciable,}$$

por lo que

$$\mu(B_1) = \mu((B_1 \setminus B_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = \mu(B_1 \cap B_2) = \mu((B_2 \setminus B_1) \cup (B_1 \cap B_2)) = \mu(B_2).$$

Veamos ahora que μ y μ' tienen los mismos conjuntos despreciables. Si N es μ-despreciable, entonces existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $N \subseteq A$ y $\mu(A) = 0$, pero

$$N = \underbrace{\varnothing}_{\in\mathcal{B}} \cup \underbrace{N}_{\text{despreciable}},$$

luego $\bar{\mu}(N) = \mu(\varnothing) = 0$, es decir $N \in \mathcal{B}'$ y es $\bar{\mu}$-despreciable. Si $N' \in \mathcal{B}'$ es $\bar{\mu}$-despreciable, entonces debe existir $A' \in \mathcal{B}'$ tal que $N' \subseteq A'$ y $\bar{\mu}(A') = 0$. Pero $A' \in \mathcal{B}'$, entonces debe existir $N \subseteq X$ que es μ-despreciable y $A \in \mathcal{B}$ tal que $A' = A \cup N$ y $\mu(A) = 0$, luego

$$N' \subseteq A \cup N \subseteq A \cup C,$$

donde $\mu(C) = 0$ y $C \in \mathcal{B}$. Pero de acá obtenemos que $\mu(A \cup C) = 0$, luego N' es μ-despreciable.

Lo anterior nos dice que $\mathcal{B}'$ contiene a todos los conjuntos $\bar{\mu}$-despreciables, luego $\mathcal{B}'$ es completa, y por definición $\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cup \varnothing) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$, luego $\bar{\mu}$ es efectivamente una extensión de μ.

Veamos que $\bar{\mu}$ es medida, en particular, debemos probar que es σ-aditiva. Sean $(B_n \cup N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}'$, luego

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup N_n\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(B_n \cup N_n).
\end{aligned}
$$

Finalmente, debemos probar que $\mathcal{B}'$ es la σ-álgebra mas pequeña que satisface lo que necesitado. Si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{B}$ y a los despreciables, entonces debe contener elementos de la forma $B \cup N$, luego $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{F}$. ■

[3] Usar que $A \triangle B = B \triangle A$ y que $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C$.

Observación 1.16. Si $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra Boreliana y $\bar{\mathcal{B}}$ su completación. Entonces $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}_L$, la σ-álgebra de Lebesgue. Mas aún, gracias a la Observación 1.14 tenemos que

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_L.$$

En efecto, supongamos que $A \in \mathcal{B}_L$ es *acotado*, luego $\ell(A) < \infty$ y la Observación 1.14 nos dice que existe $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $A \subseteq B$ y $\ell(A) = \ell(B)$. Además

$$\ell(B) = \ell(B \cap A) + \ell(B \setminus A) = \ell(A) + \ell(B \setminus A) \Rightarrow \ell(B \setminus A) = 0,$$

y como $A^c = B^c \cup B \setminus A$ entonces $A^c \in \bar{\mathcal{B}}$ y por lo tanto $A \in \bar{\mathcal{B}}$. El caso en que A es no acotado se deja como ejercicio.

Note que este resultado dice que cualquier conjunto Lebesgue medible se puede escribir como la unión disjunta de un conjunto Boreliano y un conjunto despreciable.

1.6. Un conjunto no Lesbesgue medible en $\mathbb{R}$

Consideremos a $\mathbb{Q}$ como subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ y sea $X = \mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$. Observar que cada clase de equivalencia $x + \mathbb{Q}$ es densa en $\mathbb{R}$ (es una copia trasladada de $\mathbb{Q}$, que es denso), luego para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $(x + \mathbb{Q}) \cap (0, 1) \neq \varnothing$. Usando el axioma de elección, para cada $x \in \mathbb{R}$ escogemos exactamente un elemento de $v_x \in (x + \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ y definimos

$$V = \{v_x\}_{x \in \mathbb{R}}.$$

Este conjunto se conoce como *conjunto de Vitali*.

Veamos que V no es Lebesgue-medible. Para ello, notemos primero que si $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ entonces los conjuntos $q_1 + V$ y $q_2 + V$ son disjuntos. En efecto, si $x \in (q_1 + V) \cap (q_2 + V)$ entonces

$$x = q_1 + v_1 = q_2 + v_2,$$

de donde $v_1 = x + (-q_1)$ y $v_2 = x + (-q_2)$, es decir $v_1, v_2 \in x + \mathbb{Q}$ por lo tanto $v_1 = v_2 = v_x$. De donde concluimos que $q_1 = q_2$.

Además es evidente que $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + V) = \mathbb{R}$, puesto que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $v_x \in x + \mathbb{Q}$ de donde $x = v_x + q$ para cierto $q \in \mathbb{Q}$.

Ahora, sea $Q = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ y definimos

$$U = \bigsqcup_{q \in Q} (q + V).$$

Notamos que como $V \subseteq [0, 1]$ y $q \in Q$ verifica $-1 \leq q \leq 1$ concluimos que $q + V \subseteq [-1, 2]$ entonces

$$U \subseteq [-1, 2].$$

Además, si $y \in [0, 1]$ entonces $v_y = y + \tilde{q}$ algún $\tilde{q} \in \mathbb{Q}$ por lo tanto $\tilde{q} = v_y - y \in (0, 1) - [0, 1] \subseteq [-1, 1]$, en otras palabras $y = v_y - \tilde{q} \in V - \tilde{q} = V + (-\tilde{q})$ con $-\tilde{q} \in [-1, 1]$, es decir

$$[0, 1] \subseteq \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} q + V = U,$$

es decir

$$[0, 1] \subseteq U \subseteq [-1, 2].$$

Para concluir, supongamos que V es un conjunto medible (es decir $V \in \mathcal{B}_L$), luego U ha de ser un conjunto medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles. Además, como estamos suponiendo que V es medible, entonces

$$\ell(q+V) = \ell(V)$$

pues la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Por lo tanto se debe cumplir que

$$\ell(U) = \ell\left(\bigsqcup_{q\in Q}(q+V)\right) = \sum_{q\in Q}\ell(q+V) = \sum_{q\in Q}\ell(V),$$

luego solo hay dos posibilidades, o bien $\ell(V) = 0$ y por lo tanto $\ell(U) = 0$, o bien $\ell(V) > 0$ y por lo tanto $\ell(U) = \infty$. Sin embargo como $[0,1] \subseteq U \subseteq [-1,2]$ tenemos que por la monotonía de la medida

$$1 \leq \ell(U) \leq 3.$$

1.7. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Muestre que las medidas trivial, delta de Dirac y cuenta puntos son efectivamente medidas.

Ejercicio 1.2. Demuestre el Lema 1.3.

Ejercicio 1.3. Demuestre la Proposición 1.4.

Ejercicio 1.4. Verifique que la Definición 1.7 es correcta, es decir, muestre que para $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{M}\supseteq\mathcal{C} \\ \mathcal{M} \text{ es clase monótona}}} \mathcal{M}$$

es una clase monótona.

Ejercicio 1.5. Sea X un conjunto y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. Muestre que
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$
2. Considere los conjuntos dados por
$$A_n = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n^2}{n}\right\}.$$
Demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $\limsup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Q}_+ = \{q\in\mathbb{Q} : q \geq 0\}$.
3. Suponga que los A_n son disjuntos. Muestre que
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \varnothing.$$

Cuando $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$ *definimos* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

4. Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y que $x_n \neq x$ para todo n. Muestre que

$$\liminf_{n\to\infty} \{x_n\} = \limsup_{n\to\infty} \{x_n\} = \varnothing.$$

   En particular note que $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} \neq \{x\}$.[4]

5. Muestre que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{x : \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}(x) = 1\right\}$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{x : \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}(x) = 1\right\}.$$

   Donde para $A \subseteq X$ la función 1_A está definida como

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ejercicio 1.6. Sean $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_N$ semi-álgebras. Defina

$$\mathcal{S}_1 \times \ldots \times \mathcal{S}_N = \{A_1 \times \ldots \times A_N : A_i \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Muestre que $\mathcal{S}_1 \times \ldots \times \mathcal{S}_N$ es una semi-álgebra.

Ejercicio 1.7. Considere $X = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones binarias. Para cada $N \in \mathbb{N}$, $\{b_1, \ldots, b_N\} \in \{0,1\}$ y $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$ definimos un *cilindro* en X como

$$C(b_1, \ldots, b_N; i_1, \ldots, i_N) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X : a_{i_j} = b_j\right\},$$

por ejemplo $C(1,0,1;2,4,5) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_2 = 1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1\}$.

Demuestre que $\mathcal{S} = \{C \subseteq \mathcal{P}(X) : C \text{ es un cilindro}\} \cup \{\varnothing, X\}$ es una semi-álgebra.

Ejercicio 1.8. Considere $\mathcal{S}$ la semi-álgebra de los cilindros definida en el Ejercicio 1.7. Defina $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ como

$$\mu(C(b_1, \ldots, b_N; i_1, \ldots, i_N)) = 2^{-N}.$$

Muestre que μ es una función aditiva. *Lanzamiento de monedas.*

Ejercicio 1.9. Muestre mediante un ejemplo que existen álgebras que no son σ-álgebras, y que hay semi-álgebras que no son álgebras.

Ejercicio 1.10. Muestre que si $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una sucesión creciente de álgebras, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ es álgebra.

Ejercicio 1.11. Sea X un conjunto de cardinal infinito. Decimos que $A \subseteq X$ es co-finito, si A^c tiene cardinal finito. Sea $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ finito ó co-finito}\}$.

[4] Recuerde que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k,$$

y si $\liminf_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1. Muestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra.
2. Muestre que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra si y solo si X es finito.

Ejercicio 1.12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un abierto cualquiera. Muestre que existe una cantidad numerable de intervalos abiertos $\{(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ que además son disjuntos tales que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n).$$

Ejercicio 1.13. Defina

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_2 &= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_3 &= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_4 &= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_5 &= \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_6 &= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_7 &= \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_8 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Muestre que $\sigma(\mathcal{C}_k) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, donde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denota a los borelianos en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.14. Sea X un conjunto, y sean $A_1, \dots, A_N \subseteq X$ disjuntos, tales que

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n.$$

Calcule el álgebra y la σ-álgebra generada por $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$.

Ejercicio 1.15. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra. Para $Y \subseteq X$ defina

$$\mathcal{B}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}.$$

Muestre que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ es una σ-álgebra.

Ejercicio 1.16. Dada $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, decimos que $A \in \mathcal{B}$ es un *átomo* si $B \subseteq A$ es tal que $B \in \mathcal{B}$ entonces $B = A$ o bien $B = \varnothing$. Muestre que todos los distintos átomos de $\mathcal{B}$ han de ser disjuntos entre si.

Ejercicio 1.17. Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra, y sea $\gamma : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función que satisface

- γ es **aditiva**, es decir, si $A, B \in \mathcal{B}$ son disjuntos, entonces

$$\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B),$$

- γ es σ-**sub-aditiva**, es decir, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, entonces

$$\gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma(A_n).$$

Muestre que γ es σ**-aditiva**, es decir, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ son disjuntos, entonces

$$\gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma(A_n).$$

Ejercicio 1.18. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Muestre que μ es σ-sub-aditiva (ver Ejercicio 1.17 para la definición).

Ejercicio 1.19. La diferencia simétrica se define como

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida.

1. Muestre que para cada $A, B, C \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$\mu(A\Delta B) \leq \mu(A\Delta C) + \mu(C\Delta B).$$

2. Verifique que si $A, B \in \mathcal{B}$

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A\Delta B).$$

Ejercicio 1.20. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu_n)$ espacios de medida, y sean $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$. Defina $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_k \mu_k(A).$$

Muestre que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida.

Ejercicio 1.21. Sea X un conjunto de cardinal infinito, y sea $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ el espacio de medida cuenta puntos. Muestre que existe una sucesión de subconjuntos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)$ tales que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \neq 0.$$

Ejercicio 1.22. Sea X un conjunto de cardinal infinito y sea $\mathcal{A}$ el álgebra de los subconjuntos finitos y co-finitos del Ejercicio 1.11. Defina $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ como

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito} \\ 1 & \text{si } A \text{ es co-finito.} \end{cases}$$

1. Muestre que μ es aditiva (ver Ejercicio 1.17 para la definición).
2. Construya un ejemplo que muestre que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ son disjuntos y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3. Muestre que si X es infinito numerable, entonces existen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ tales $A_n \nearrow X$, $\mu(A_n) = 0$ y $\mu(X) = 1$.
4. Muestre que μ es σ-aditiva.

Ejercicio 1.23. Sea X un conjunto no-numerable, y sea $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ la clase de conjuntos A tales que A es numerable ó A^c es numerable.

1. Muestre que Σ es una σ-álgebra.
2. Defina $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ es numerable.} \end{cases}$$
Muestre que μ es una medida.

Ejercicio 1.24.

1. Muestre que toda σ-álgebra es una clase monótona, y muestre con un ejemplo que no toda clase monótona es una σ-álgebra.
2. Sea $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de clases monótonas. Muestre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ es una clase monótona.

Ejercicio 1.25. Sea X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$.
2. $\mathcal{C} = \mathcal{M}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}$ es clase monótona.
3. $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Ejercicio 1.26. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ una sucesión de conjuntos medibles.

1. Demuestre que
$$\mu(\liminf_{n \to \infty} A_n) \leq \liminf_{n \to \infty} \mu(A_n).$$
2. Suponga que existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) < \infty$ y $A_n \subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que
$$\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) \geq \limsup_{n \to \infty} \mu(A_n).$$
3. Si
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty,$$
muestre que $\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$.

Ejercicio 1.27. En la demostración de la Teorema 1.15, verifique por inducción en N que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^*$ son disjuntos y $C \subseteq X$ entonces
$$\mu^* \left(C \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(C \cap A_n).$$
Muestre además que
$$\mu^* \left(C \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(C \cap A_n).$$

Ejercicio 1.28. Complete la Observación 1.14, es decir, suponga que μ es σ-finita en $\mathcal{A}$ y que $A \subseteq X$ con $\mu^*(A) = \infty$. Muestre que existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ y $A \subseteq B$.

Ejercicio 1.29. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una medida finita, μ^* su medida exterior asociada y $\mathcal{B}^*$ la σ-álgebra de Carathéodory. Muestre que $B \in \mathcal{B}^*$ si y solo si

$$\mu^*(B) = \mu^*(X) - \mu^*(B^c).$$

La cantidad $\mu_*(B) : \mu^*(X) - \mu^*(B^c)$ *se denota como la medida interior de* B.

Ejercicio 1.30. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad ($\mu(X) = 1$) y sea μ^* la medida exterior asociada. Sea $Y \subseteq X$ tal que $\mu^*(Y) = 1$. Considere $\mathcal{B}_Y$ (ver Ejercicio 1.15) y defina $\nu : \mathcal{B}_Y \to \mathbb{R}_+$ como

$$\nu(A \cap Y) = \mu(A).$$

Muestre que ν está bien definida y que es una medida.

Ejercicio 1.31. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase que *recubre en* X si $\varnothing \in \mathcal{C}$ y dado cualquier $A \subseteq X$ existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Sea $\tau : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función tal que $\tau(\varnothing) = 0$ y $\mathcal{C}$ es una clase que recubre. Definimos $\tau^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como

$$\tau^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}.$$

Demuestre que τ^* es una medida exterior.

Ejercicio 1.32. Considere la función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ definida como

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A \text{ y } A^c \text{ son no numerables} \\ 2 & \text{si } A^c \text{ es numerable.} \end{cases}$$

Muestre que μ^* está bien definida y que es una medida exterior.

Ejercicio 1.33. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra Boreliana en X, y considere $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida *finita*. El propósito de este ejercicio es mostrar que si $A \in \mathcal{B}$ entonces

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \{\mu(O) : O \text{ es abierto en } X, A \subseteq O\}, \text{ y} \\ \mu(A) &= \sup \{\mu(F) : F \text{ es cerrado en } X, F \subseteq A\}. \end{aligned}$$

Para ello defina

$$\mathcal{B}' = \{A \in \mathcal{B} : \forall \varepsilon > 0 \text{ existen } O \supseteq A \text{ abierto y } F \subseteq A \text{ cerrado tales que } \mu(O \setminus F) < \varepsilon\}.$$

1. Muestre que $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra. *Ayuda: Según el camino que tome, recuerde que la unión* finita *de conjuntos cerrados es cerrado; y que la intersección* finita *de abiertos es abierto.*

2. Muestre que si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $O_n = \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$ es un conjunto abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $O_n \searrow F$.

3. Muestre que si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $F \in \mathcal{B}'$. Concluya que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

4. Concluya el resultado.

Ejercicio 1.34. En la demostración de que ℓ es σ-aditiva. Vea los casos $(-\infty, \infty]$ y $(a, +\infty]$.

Ejercicio 1.35. Si $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra Boreliana. Demuestre que si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y que $\ell(\lambda A) = \lambda \ell(A)$ para todo $\lambda \geq 0$.

Ejercicio 1.36. Considere $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra Boreliana en $\mathbb{R}$, y sea $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$ una medida *finita*. Para cada $x \in \mathbb{R}$ defina

$$f_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

Muestre que:

1. f_μ es una función monotona no-decreciente.
2. $\mu((a, b]) = f_\mu(b) - f_\mu(a)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
3. f_μ es continua por la derecha.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f_\mu(x) = 0$.

Ejercicio 1.37. Sea $\mathcal{S} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ la semi-álgebra de los intervalos abierto-cerrados. Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente y continua por la derecha. Defina $\mu_F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ como

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

1. Muestre que si $a \leq b \in \mathbb{R}$ y $[a, b] \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, entonces
$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} F(b_n) - F(a_n)$$
2. Muestre que μ_F es una medida.

Ejercicio 1.38. Sea $A \subseteq \mathcal{B}_L$ un conjunto tal que $\ell(A) < \infty$. Muestre que para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de intevalos abiertos $I_1, \ldots, I_N$ tales que

$$\ell\left(E \Delta \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \leq \varepsilon.$$

Ejercicio 1.39. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue.

1. Sea $A \in \mathcal{B}_L$ y suponga que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\ell(A \cap I) \leq \alpha \ell(I)$ para todo intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Muestre que $\ell(A) = 0$.
2. Suponga que $A \in \mathcal{B}_L$ es tal que $0 < \ell(A) < \infty$. Muestre que para cada $0 < \alpha < 1$ debe existir un intervalo abierto acotado I tal que
$$\alpha \ell(I) < \ell(A \cap I).$$
3. Sea $A \subseteq \mathcal{B}_L$ tal que $0 < \ell(A) < \infty$. Muestre que existe un intervalo abierto I y $\delta > 0$ tal que
$$(A \cap I + h) \cap (A \cap I) \neq \varnothing, \quad \forall\, |h| \leq \delta.$$
4. Para $A \in \mathcal{B}_L$ definimos $\hat{A} = \{x - y : x, y \in A\}$. Si $0 < \ell(A) < \infty$ muestre que $\hat{A}$ contiene un intervalo.

Ejercicio 1.40. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue, e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, y suponga que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in I$.

1. Suponga que $I_0 \subseteq I$ es un intervalo, muestre que
$$\ell(f(I_0)) \leq M\ell(I_0).$$
2. Concluya que si $Z \in \mathcal{B}_L$ entonces
$$\ell(f(Z)) \leq M\ell(Z).$$

Ejercicio 1.41. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue y sea $E \in \mathcal{B}_L$ tal que $\ell(E) < \infty$.

1. Defina la función $f_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f_E(x) = \ell(E \cap (-\infty, x])$. Muestre que existe $M \geq 0$ tal que
$$|f_E(x) - f_E(y)| \leq M\,|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$
2. Muestre que para cada $\alpha \in (0, 1)$ existe un conjunto $E_\alpha \subseteq E$, $A_\alpha \in \mathcal{B}_L$, tal que $\ell(E_\alpha) = \alpha\ell(E)$. *Ayuda: Recuerde el teorema del valor intermedio.*

Ejercicio 1.42. Considere ℓ^* la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1. Muestre que si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y si $r \in \mathbb{R}$ entonces $\ell^*(A + r) = \ell^*(A)$ y $\ell^*(rA) = |r|\,\ell^*(A)$.
2. Concluya que si $A \in \mathcal{B}_L$ entonces $A + r, rA \in \mathcal{B}_L$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.43. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue. Sea $Z \in \mathcal{B}_L$ un conjunto tal que $\ell(Z) = 0$. Muestre que $Z^c = \mathbb{R} \setminus Z$ es denso en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.44. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles en $[0, 1]$ tales que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing.$$
Muestre que $\lim_{n\to\infty} \ell(E_n) = 0$.

Ejercicio 1.45. Muestre que existe una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de conjuntos en $\mathbb{R}$ tales que

- $E_n \supset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\ell^*(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $$\lim_{n\to\infty} \ell^*(E_n) > \ell^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$$

Ejercicio 1.46. Complete la Observación 1.16, es decir, muestre que si $A \in \mathcal{B}_L$ es no acotado, entonces se cumple que $A = B \cup N$ con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y N despreciable. *Ayuda: Considere los conjuntos* $A_n = A \cap [-n, n]$.

Ejercicio 1.47. Suponga que $X_n \nearrow X$ y que $(X, \mathcal{B})$ es un espacio medible. Defina $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{X_n}$ como en el Ejercicio 1.15.

1. Muestre que $(X_n, \mathcal{B}_n)$ es un espacio medible.

2. Muestre con un ejemplo que no necesariamente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$.

Ejercicio 1.48. Sea X un conjunto no vacío. Sea $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia creciente de σ-álgebras, es decir, $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$. Definamos

$$\mathcal{B}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n),$$

y consideremos $\mu : \mathcal{B}_\infty \to \mathbb{R}_+$ una medida *finita*. El propósito de este ejercicios es mostrar que

$$(\star) \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}_\infty \; \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, n \in \mathbb{N} \; \exists\, B \in \mathcal{B}_n \text{ tal que } \mu(A \triangle B) \leq \varepsilon.$$

Para demostrar esto se sugiere:

1. Si $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, entonces $(\star)$ es cierto.

2. Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_\infty$ una familia disjunta. Demuestre que dado $\varepsilon > 0$ existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\bigcup_{k\geq K_0} A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Defina

$$\mathcal{B}' = \{A \in \mathcal{B}_\infty : \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, n \in \mathbb{N} \; \exists\, B \in \mathcal{B}_n \text{ tal que } \mu(A \triangle B) \leq \varepsilon\},$$

y muestre que es σ-álgebra.

4. Concluya.

Ejercicio 1.49. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^2$, recuerde que el diámetro (Euclidiano) de A se define como

$$d(A) = \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in A\}.$$

Observe que $d(A) = d(\bar{A})$ y que $d(\varnothing) = 0$ (demuéstrelo). Dado $\varepsilon > 0$, decimos que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ es un *ε-recubrimiento numerable* de A si es que

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ y } d(B_n) \leq \varepsilon,$$

y denotamos al conjunto de todos los ε-recubrimientos numerables de A como $R_\varepsilon(A)$.

Definamos

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} d(B_n) : (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R_\varepsilon(A)\right\},$$

1. Muestre que si $A \subseteq B$, entonces $R_\varepsilon(B) \subseteq R_\varepsilon(A)$.

2. Muestre que para cada $A \subseteq \mathbb{R}^2$ el límite $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(A)$ existe en $\overline{\mathbb{R}_+}$.

3. Defina $\Lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como $\Lambda(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(A)$. Muestre que Λ es una medida exterior.

4. Muestre que $\Lambda(\{0\}) = 0$.

5. Muestre que si $dist(A, B) > 0$ entonces $\Lambda(A \cup B) = \Lambda(A) + \Lambda(B)$.

6. Muestre que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\Lambda(A + x) = \Lambda(A)$, donde $A + x = \{a + x : x \in A\}$

7. Muestre que para cada $k \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Lambda(kA) = |k|\,\Lambda(A)$, donde $kA = \{ka : a \in A\}$.

8. Si $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función que satisface

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2,$$

   entonces $\Lambda(\psi(A)) \leq \Lambda(A)$.

9. Demuestre que si $D = [a, b] \times \{0\}$ entonces $\Lambda(D) = b - a$ y en general para cualquier segmento de recta $L_{x,y} = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$ se tiene que $\Lambda(L_{x,y}) = \|x - y\|_2$.

10. Demuestre que si $C = [0, 1] \times [0, 1]$ entonces $\Lambda(C) = +\infty$. Concluya que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene interior no-vacío, entonces $\Lambda(A) = +\infty$.

Capítulo 2

Integración

2.1. Funciones medibles

Definición 2.1. *Sean $(X_1, \mathcal{B}_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2)$ dos espacios medibles. Decimos que una función $f : X_1 \to X_2$ es $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_2$ medible si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_1 \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_2.$$

Observación 2.1. Notar que la definición es equivalente a decir que

$$f^{-1}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{B}_1.$$

Lema 2.1. *Sea $(X_1, \mathcal{B})$ un espacio medible y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$. Si $f : X_1 \to X_2$ es una función tal que $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$ entonces f es una función $\mathcal{B}$-$\sigma(\mathcal{C})$ medible.*

Demostración. Debemos probar que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{B}$. Por hipótesis tenemos que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$, de donde obtenemos que

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{B}.$$

Aseguramos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, lo que concluiría la demostración. Primero veamos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es σ-álgebra:

- Claramente $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, luego $\varnothing \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
- Si $A \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, entonces $A = f^{-1}(B)$ para algún $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Con esto $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
- Sean ahora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, luego existen $B_n \in \sigma(\mathcal{C})$ tales que $A_n = f^{-1}(B_n)$. Con esto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Como ya sabemos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es σ-álgebra y como $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ entonces $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Para probar la otra inclusión definimos

$$\mathcal{B}' = \left\{ B \subseteq X_2 : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \right\}.$$

Claramente $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}'$, y si podemos demostrar que $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra tendremos que $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}'$ y por definición de $\mathcal{B}'$ tendríamos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Luego solo basta demostrar que $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra.

- Claramente $\varnothing \in \mathcal{B}'$.
- Si $B \in \mathcal{B}'$, entonces $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, luego $B^c \in \mathcal{B}'$.
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}'$, entonces
$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})),$$
luego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}'$.

■

Observación 2.2. Notar que de la demostración obtuvimos las siguientes propiedades:

1. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$ es σ-álgebra entonces $f^{-1}(\mathcal{B})$ es σ-álgebra.
2. $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ para cualquier $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
3. El conjunto
$$\mathcal{B}' = \left\{B \subseteq X_2 : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\right\}.$$
es la σ-álgebra mas grande de X_2 que contiene a $\mathcal{C}$ que hace que $f : X_1 \to X_2$ sea medible.

Ejemplo 2.1. Sea $f : (X, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Recordar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{C})$, para
$$\mathcal{C} = \left\{(-\infty, b) : b \in \overline{\mathbb{R}}\right\}.$$
Luego f es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ medible si y solo si $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{B}$ para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

En el caso de funciones reales extendidas $f : (X, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ debemos considerar, por ejemplo
$$\tilde{\mathcal{C}} = \left\{[-\infty, b] : b \in \overline{\mathbb{R}}\right\}.$$

Corolario 2.2. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos y $f : X_1 \to X_2$ una función continua. Entonces f es $\sigma(\mathcal{T}_1)$-$\sigma(\mathcal{T}_2)$ medible.*

Demostración. Solo notar que para cada $O \in \mathcal{T}_2$ se tiene que $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{T}_1)$, por lo que el lema anterior aplica directamente.

■

Lema 2.3. *Sean $f : X_1 \to X_2$ y $g : X_2 \to X_3$ dos funciones medibles. Entonces $g \circ f : X_1 \to X_3$ es medible.*

Demostración. Para $B_3 \in \mathcal{B}_3$ se tiene que $B_2 = g^{-1}(B_3) \in \mathcal{B}_2$, luego $(g \circ f)^{-1}(B_3) = f^{-1}(g^{-1}(B_3)) = f^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$.

■

Lema 2.4. *Sean $f, g : (X, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ funciones medibles. Entonces los conjuntos*

- $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$,
- $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$,
- $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$,
- $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$, *y*
- $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$

son medibles.

Demostración. Como $a < b$ si y solo si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r$ y $r < b$, podemos escribir

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < g(x)\},$$

que es medible por ser el resultado de operaciones numerables entre conjuntos medibles.

Intercambiando los roles de f y g obtenemos que $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ tambien es medible. Pasando a los complementos obtenemos que $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ y $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ son medibles. Finalmente

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$$

que también es medible.

■

Proposición 2.5. *Sean $f_n : (X, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ funciones medibles para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces las funciones*

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$,
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$,
- $\limsup_{n \to \infty} f_n(x)$,
- $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$, *y*
- $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$

son medibles.

Observación 2.3.

- Notar que este lema incluye los casos $\max_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(x)$ y $\min_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(x)$.
- En general no se cumple que $\sup_{a \in A} f_a(x)$ sea medible cuando el conjunto A es no numerable.

Demostración. Veamos que $f(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ es medible. Para ello basta demostrar que $f^{-1}([-\infty, b])$ es medible para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Pero

$$\begin{aligned}
f^{-1}([-\infty, b]) &= \{x \in X : f(x) \leq b\} \\
&= \left\{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq b\right\} \\
&= \{x \in X : \forall\, n \in \mathbb{N}\ f_n(x) \leq b\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq b\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, b]) \\
&\in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Para el caso de $f(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ notemos que $f^{-1}([b, \infty])$ es medible para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$ pues

$$\begin{aligned}
f^{-1}([b, \infty]) &= \{x \in X : f(x) \geq b\} \\
&= \left\{x \in X : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq b\right\} \\
&= \{x \in X : \forall\, n \in \mathbb{N}\ f_n(x) \geq b\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \geq b\}
\end{aligned}$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([b,\infty])$$
$$\in \mathcal{B}.$$

Como $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$ y $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$ tenemos que ambas funciones son medibles. Finalmente, el conjunto de los $x \in X$ donde $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, es igual al conjunto de los $x \in X$ donde $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ y por lo tanto es medible gracias al lema anterios. ■

2.1.1. Funciones simples

Definición 2.2. *Sea $(X,\mathcal{B})$ un espacio medible. Un partición finita $\mathcal{B}$-medible de X es una colección* **finita** *de conjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ tales que*

$$X = \bigsqcup_{i\in I} A_i.$$

Definición 2.3. *Sea $(X,\mathcal{B})$ un espacio medible. Para $A \in \mathcal{B}$, definimos la función indicadora (o función característica) de A como*

$$\begin{aligned} 1_A : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 2.4. *Dada $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ una partición finita $\mathcal{B}$-medible de X y números* **reales** *$\underline{a} = \{a_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$, definimos la función*

$$\begin{aligned} s = s_{\alpha,\underline{a}} : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto s = s_{\alpha,\underline{a}}(x) = \textstyle\sum_{i\in I} a_i 1_{A_i}(x). \end{aligned}$$

La función $s_{\alpha,\underline{a}}$ se llama función simple asociada a $(\alpha,\underline{a})$. Al conjunto de todas las posibles funciones simples lo denotamos como

$$\Sigma(X,\mathcal{B}) = \left\{ s_{\alpha,\underline{a}} : \alpha \text{ es particion finita } \mathcal{B}\text{-medible, y } \underline{a} \subseteq \mathbb{R} \right\}.$$

Al conjunto de funciones simples no negativas (es decir las que satisface que $\underline{a} \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$) lo denotamos por $\Sigma_+(X,\mathcal{B})$.

Lema 2.6. *Las funciones simples son $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medibles.*

Demostración. Basta notar que si $b \in \overline{\mathbb{R}}$ y si $s = \sum_{i\in I} a_i 1_{A_i}$ es una función simple, entonces

$$s^{-1}([-\infty,b]) = \bigcup_{\substack{i\in I,\\ a_i\leq b}} A_i \in \mathcal{B}.$$

■

Proposición 2.7. *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una funcion medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples positivas $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+(X,\mathcal{B})$ tal que*

$$s_n(x) \nearrow f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos los conjuntos

$$B_n = \{x \in X : f(x) \geq n\} = f^{-1}([n, \infty]),$$

y para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1\}$ definimos los conjuntos

$$A_{k,n} = \left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})),$$

que verifican $f^{-1}([0, n)) = f^{-1}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1}[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})\right) = \bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1} f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) = \bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{k,n}$ y que

$$X = f^{-1}([0, \infty]) = f^{-1}([n, \infty]) \sqcup f^{-1}([0, n)) = B_n \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{k,n}$$

Notemos además que

$$A_{k,n} = A_{2k,n+1} \bigsqcup A_{2k+1,n+1},$$

esto pues

$$\begin{aligned}\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} &\Leftrightarrow \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \quad \veebar \quad \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ &\Leftrightarrow \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \quad \veebar \quad \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Con esto en mente, definimos la función simple

$$s_n(x) = n 1_{B_n}(x) + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{A_{n,k}(x)},$$

que es el resultado de "truncar" la función f a su mínimo valor posible en cada conjunto $A_{n,k}$ y B_n.

Veamos primero que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. Supongamos primero que $x \in f^{-1}([0, n))$, entonces existe $k \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ tal que $x \in A_{k,n} = A_{2k,n+1} \sqcup A_{2k+1,n+1}$. Si $x \in A_{2k,n+1}$ entonces

$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x),$$

y si $x \in A_{2k+1,n+1}$ entonces

$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x).$$

Si $x \in f^{-1}([n, n+1))$ entonces $x \in B_n$ y $x \in A_{k,n+1}$ para algún $k \in \left\{0, 1, \ldots, (n+1)2^{n+1} - 1\right\}$ tal que $n \leq \frac{k}{2^{n+1}}$, pero esto significa que $s_n(x) = n \leq \frac{k}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$.

Finalmente, si $x \in f^{-1}([n+1, \infty])$, entonces $x \in B_n \cap B_{n+1}$, luego

$$s_n(x) = n \leq n + 1 = s_{n+1}(x).$$

Ahora, veamos que efectivamente $s_n(x) \nearrow f(x)$ para todo $x \in X$. Si $x \in X$ es tal que $f(x) = +\infty$, entonces $x \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$s_n(x) = n \nearrow +\infty.$$

Si $x \in X$ es tal que $f(x) < +\infty$, entonces debe existir $N_0 = N_0(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n$ para todo $n \geq N_0$. Entonces estamos diciendo que $x \in A_{k,n}$ para cierto $k \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ y $n \geq N_0$ arbitrario, es decir

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n},$$

y

$$s_n(x) = \frac{k}{2^n},$$

de donde

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

por lo tanto

$$s_n(x) \nearrow f(x).$$

■

Definición 2.5. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, entonces definimos*

$$f_+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$$

y

$$f_-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}.$$

Entonces f_+, f_- son funciones no-negativas, medibles y que satisfacen

$$f = f_+ - f_-.$$

Observación 2.4. La función f_+ es medible por ser el máximo entre 2 funciones medibles. La función f_- es medible pues si g es medible, entonces $-g$ también lo es. En efecto, si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces

$$\begin{aligned}(-g)^{-1}([a, \infty]) &= \{x \in X : -g(x) \geq a\} \\ &= \{x \in X : g(x) \leq -a\} \\ &= g^{-1}([-\infty, -a]).\end{aligned}$$

Por lo tanto f_- es medible por ser le máximo entre funciones medibles.

Corolario 2.8. *Dada una función medible $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma(X, \mathcal{B})$ tal que*

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

Demostración. Basta tomar $s_n^+ \nearrow f_+$ y $s_n^- \nearrow f_-$ y definir

$$s_n = s_n^+ - s_n^-.$$

Se deja como ejercicio verificar que s_n es efectivamente una función simple. ■

Definición 2.6. *Decimos que una función $f : X \to \mathbb{C}$ es medible si* $\text{Re}\, f, \text{Im}\, f : X \to \mathbb{R}$ *son funciones $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ medibles.*

2.2. Integracion de funciones medibles

Definición 2.7. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $s \in \Sigma_+(X, \mathcal{B})$ una función simple no-negativa dada por*

$$s(x) = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x).$$

Definimos la integral de s con respecto a la medida μ como[1]

$$\int_X s d\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i).$$

En primer lugar debemos asegurarnos de que esto es una buena definición, es decir, si tenemos que

$$s(x) = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j \in K} b_j 1_{B_j}(x),$$

debemos demostrar que

$$\sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) = \sum_{j \in J} b_j \mu(B_j).$$

Para ello, notemos que como $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ son particiones de X entonces $A_i = \bigsqcup_{j \in J} A_i \cap B_j$ y $B_j = \bigsqcup_{i \in I} A_i \cap B_j$ luego

$$1_{A_i}(x) = \sum_{j \in K} 1_{A_i \cap B_j}(x) \quad \text{y} \quad 1_{B_j}(x) = \sum_{i \in I} 1_{A_i \cap B_j}(x),$$

y como

$$\sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j \in J} b_j 1_{B_j}(x)$$

debemos tener

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i 1_{A_i \cap B_j}(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{j \in J} b_k 1_{B_j}(x) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_j 1_{A_i \cap B_j}(x) \end{aligned}$$

por lo tanto si $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, entonces $s(x) = a_i = b_j$ para $x \in A_i \cap B_j$, en consecuencia

$$a_i \mu(A_i \cap B_j) = b_j \mu(A_i \cap B_j) \quad \forall\, i \in I\ \forall\, j \in J.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) = \sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} \mu(A_i \cap B_j)$$

[1] En esta definición siempre supondremos que $0 \cdot +\infty = 0$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} b_j\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{j\in J} b_j\sum_{i\in I} \mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{j\in J} b_j\mu(B_j),
\end{aligned}
$$

lo que confirma que la definición es independiente de la forma de escribir la función simple.

Observación 2.5. Utilizando una idea similar se puede demostrar que si

$$s_1(x) = \sum_{i\in I} a_i 1_{A_i}(x) \quad \text{y} \quad s_2(x) = \sum_{j\in J} b_j 1_{B_j}(x)$$

son dos funciones simples, entonces existe una partición $(C_k)_{k\in K}$ y valores $\left\{a'_k\right\}_{k\in K}$, $\left\{b'_k\right\}_{k\in K}$ tales que

$$s_1(x) = \sum_{k\in K} a'_k 1_{C_k}(x), \quad y \quad s_2(x) = \sum_{k\in K} b'_k 1_{C_k}(x),$$

es decir, podemos tomar una partición común para ambas funciones simples. Los conjuntos C_k son de la forma $C_k = C_{i,j} = A_i \cap B_j$. Cuando esto ocurra, diremos que las funciones s_1 y s_2 están soportadas sobre la misma partición.

Definición 2.8. *Dada una función medible no-negativa $f : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$, definimos*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X s\,\mathrm{d}\mu : 0 \le s \le f, s \in \Sigma_+\right\}.$$

Definición 2.9. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, definimos*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+\mathrm{d}\mu - \int_X f_-\mathrm{d}\mu,$$

cada vez que la resta tenga sentido. Y cada vez que escribamos $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ estamos asumiendo que dicha cantidad existe en $\overline{\mathbb{R}}$.

Cuando dicha resta tiene sentido diremos que f es μ-integrable (o integrable si el contexto así lo permite).

Definición 2.10. *Si $f : X \to \mathbb{C}$ es medible, definimos*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\mu + i\int_X \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\mu,$$

cada vez que las integrales existan en $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que f es μ-integrable si Re f *e* Im f *son μ-integrables.*

En lo que sigue solo trabajaremos con funciones a valores reales.

Antes de continuar, notemos que la definición es "poco práctica" pues implica calcular el supremo de todas las posibles integrales de funciones simples. Algo mejor sería utilizar la sucesión $s_n \nearrow f$ y simplemente tomar el límite cuando $n \to \infty$. Para ello necesitamos un par de resultados previos.

Lema 2.9. *Sean $s_1, s_2 \in \Sigma_+$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Entonces*

1. *Si $s_1 \leq s_2$ entonces*
$$\int_X s_1 \mathrm{d}\mu \leq \int_X s_2 \mathrm{d}\mu.$$

2. $$\int_X (s_1 + \lambda s_2)\mathrm{d}\mu = \int_X s_1 \mathrm{d}\mu + \lambda \int_X s_2 \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Sean s_1, s_2 dos funciones simples, que sin perder generalidad suponemos están soportadas sobre la misma partición, es decir son de la forma

$$s_1(x) = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x) \quad \text{y} \quad s_2(x) = \sum_{i \in I} b_i 1_{A_i}(x).$$

1. Si $s_1 \leq s_2$ entonces $a_i \leq b_i$ para todo $i \in I$, luego
$$\sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) \leq \sum_{i \in I} b_i \mu(A_i).$$

2. Notar que
$$(s_1 + \lambda s_2)(x) = \sum_{i \in I} (a_i + \lambda b_i) 1_{A_i}(x).$$

■

Lema 2.10. *Supongamos que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_+$ es una sucesión de funciones simples tales que $s_n \nearrow f$, y que $s \in \Sigma_+$ es cualquier función simple tal que $0 \leq s \leq f$. Entonces*

$$\int_X s \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Por el lema anterior, tenemos que la sucesión $(\int_X s_n \mathrm{d}\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no negativa y no decreciente de números reales, luego su límite debe existir en $\overline{\mathbb{R}_+}$. El resultado es evidente si $\lim_{n \to \infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu = +\infty$, por lo que supondremos que $\lim_{n \to \infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu < \infty$.

Sea $\lambda \in (0, 1)$ y definamos

$$B_{n,\lambda} = \{x \in X : \lambda s(x) \leq s_n(x)\},$$

luego, como $s \cdot 1_{B_{n,\lambda}} + 0 \cdot 1_{B^c_{n,\lambda}} \in \Sigma_+$ por el lema anterior tenemos que

$$\int_X \lambda s 1_{B_{n,\lambda}} \mathrm{d}\mu \leq \int_X s_n 1_{B_{n,\lambda}} \mathrm{d}\mu \leq \int_X s_n(x) \mathrm{d}\mu,$$

puesto que $s \cdot 1_{B_{n,\lambda}} \leq s_n \cdot 1_{B_{n,\lambda}} \leq s_n$.

Ahora, notemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,\lambda} = X$. En efecto, como $s_n \nearrow f$ tenemos que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq f(x) - s_n(x) < \varepsilon$, pero como $s(x) \leq f(x)$, para cada $\lambda \in (0, 1)$ tenemos que $\varepsilon = f(x) - \lambda s(x) > 0$ y por lo tanto

$$f(x) - s_n(x) < f(x) - \lambda s(x) \Leftrightarrow \lambda s(x) < s_n(x),$$

es decir $x \in B_{n,\lambda}$. Además, es claro que $B_{n,\lambda} \subseteq B_{n+1,\lambda}$, por lo tanto, gracias a la continuidad de la medida, tenemos que para cualquier $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A \cap B_{n,\lambda}) \nearrow \mu(A)$$

cuando $n \to \infty$.

Finalmente, observar que si $s = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}$ entonces

$$\begin{aligned}
+\infty > \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu &\geq \lim_{n\to\infty} \int_X s_n 1_{B_{n,\lambda}} \mathrm{d}\mu \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \int_X \lambda s 1_{B_{n,\lambda}} \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} \lambda a_i \mu(A_i \cap B_{n,\lambda}) \\
&= \lambda \sum_{i\in I} a_i \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_{n,\lambda}) \\
&= \lambda \sum_{i\in I} a_i \mu(A_i) \\
&= \lambda \int_X s \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

pero como esto vale para todo $\lambda < 1$, podemos tomar el límite cuando $\lambda \to 1^-$ y obtener el resultado deseado. ■

Corolario 2.11. *Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma_+$ es una sucesión de funciones simples tales que $s_n \nearrow f$, entonces*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Como $0 \leq s_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_X f \mathrm{d}\mu &= \sup \left\{ \int_X s \mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq f, s \in \Sigma_+ \right\} \\
&\geq \int_X s_n \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

y del lema anterior, si $0 \leq s \leq f$ es cualquier función simple, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu \geq \int_X s \mathrm{d}\mu \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu \geq \sup \left\{ \int_X s \mathrm{d}\mu : s \leq f,\ s \in \Sigma_+ \right\} = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

■

Proposición 2.12. *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ funciones medibles, y $\lambda \geq 0$. Entonces*

1. *Si $f \leq g$ entonces*
$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu.$$
2. $$\int_X (f + \lambda g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \lambda \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Tomemos sucesiones de funciones simples positivas $s_n \nearrow f$ y $\bar{s}_n \nearrow g$, luego

1. Sea $k \in \mathbb{N}$. Del lema anterior tenemos que s_k es una función simple que satisface $s_k \leq f \leq g = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n$, luego debe ocurrir que
$$\int_X s_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \bar{s}_n \mathrm{d}\mu.$$
Pero como vale para cada $k \in \mathbb{N}$ concluimos que
$$\int_x f \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X s_k \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \bar{s}_n \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

2. $t_n = s_n + \lambda \bar{s}_n \nearrow f + \lambda g$.

■

Observación 2.6. Notar que en la demostración hemos visto que si f, g son funciones medibles no negativas, entonces $f+g$ es medible y λf es medible para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$, pues resultan ser límite de funciones medibles.

Definición 2.11. *Denotamos por $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ al espacio de las funciones $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medibles que son μ-integrables y que verifican que $\int_X f \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$.*

Proposición 2.13. *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, entonces*

1. $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$.
2. *Si $f \in \mathcal{L}^1$ entonces*
$$\left| \int_X f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Tenemos que $f = f_+ - f_-$ y $|f| = f_+ + f_-$, luego

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_X (f_+ + f_-)\mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \mathrm{d}\mu + \int_X f_- \mathrm{d}\mu.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty &\Leftrightarrow \int_X f_+ \mathrm{d}\mu < +\infty \ \wedge \ \int_X f_- \mathrm{d}\mu < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \int_X f \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Además, si $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = +\infty$ entonces trivialmente $\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$, mientras que si $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, entonces $\int_X f_+ \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ y $\int_X f_- \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, así la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ nos dice que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f_+ \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_X f_- \mathrm{d}\mu \right| \\ &= \int_X f_+ \mathrm{d}\mu + \int_X f_- \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

■

Proposición 2.14. *Sean $f, g \in \mathcal{L}^1$ tales que $f \leq g$. Entonces*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Basta notar que $f = f_+ - f_-$ y $g = g_+ - g_-$, y si $f \leq g$ entonces $f_+ \leq g_+$ y $g_- \leq f_-$. ■

Observación 2.7. Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles, en general la suma $f+g$ no está bien definida puesto que pueden ocurrir los casos $\infty + (-\infty)$ o $-\infty + \infty$. Es por eso que para hablar de suma de funciones medibles consideramos el conjunto (medible)

$$\begin{aligned} D_+ &= \left\{x \in X : f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}\right\} \\ &= \{x \in X : f(x) = +\infty,\ g(x) = -\infty\}^c \cap \{x \in X : f(x) = -\infty,\ g(x) = \infty\}^c \end{aligned}$$

y cada vez que se escribe "$f+g$ es medible" se debe entender que $f+g : D_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ como función $\mathcal{B}_{D_+}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible, donde $\mathcal{B}_{D_+}$ es la σ-álgebra de sub-espacio definida en el Ejercicio 1.15.

Para evitar este tecnicismo, usualmente se extiende $f+g$ a todo X por 0, es decir se considera

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si } x \in D_+, \\ 0 & \text{si } x \notin D_+, \end{cases} \tag{2.1}$$

y se verifica que h es medible (ver Ejercicio 2.2).

Mas adelante veremos que si $f, g \in \mathcal{L}^1$ entonces $\mu(D_+^c) = 0$ y por lo tanto el conjunto donde redefinimos la suma es despreciable. Esto nos dice que $h = f + g$ *casi en todas partes*.

Proposición 2.15. *Sean $f, g \in \mathcal{L}^1$, entonces para h definida en (2.1) tenemos que $h \in \mathcal{L}^1$ y*

$$\int_X h \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Consideramos h como en (2.1). Para $x \in D_+$ tenemos que

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)|\, 1_{D_+}(x) + |g(x)|\, 1_{D_+}(x) \leq |f(x)| + |g(x)|\,,$$

de donde

$$\int_X h \mathrm{d}\mu = \int_{D_+} |f+g|\, \mathrm{d}\mu \ \leq \int_X |f|\, \mathrm{d}\mu + \int_X |g|\, \mathrm{d}\mu,$$

luego $h \in \mathcal{L}^1$. Ahora

$$\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)_+ \mathrm{d}\mu - \int_X (f+g)_- \mathrm{d}\mu,$$

pero como $(f+g)_+ - (f+g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$ tenemos que

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+,$$

y si integramos a ambos lados obtenemos

$$\int_{D_+} (f+g)_+ \mathrm{d}\mu + \int_{D_+} f_- \mathrm{d}\mu + \int_{D_+} g_- \mathrm{d}\mu = \int_{D_+} (f+g)_- \mathrm{d}\mu + \int_{D_+} f_+ \mathrm{d}\mu + \int_{D_+} g_+ \mathrm{d}\mu,$$

pero como $f, g, h \in \mathcal{L}^1$ entonces todas las integrales son finitas, luego se pueden hacer las restas y concluir. ■

Proposición 2.16. *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}^1$. Entonces $\lambda f \in \mathcal{L}^1$ y*

$$\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Primero notar que

$$\int_X |\lambda f| \, d\mu = \int_X |\lambda| \, |f| \, d\mu = |\lambda| \int_X |f| \, d\mu$$

por el resultado para funciones positivas. Luego como $f \in \mathcal{L}^1$ tenemos que $|f| \in \mathcal{L}^1$, luego $\lambda f \in \mathcal{L}^1$ pues $|\lambda f| \in \mathcal{L}^1$.

Para la igualdad de las integrales, consideremos primero el caso $\lambda \geq 0$ y notemos que $(\lambda f)_+ - (\lambda f)_- = \lambda f = \lambda(f_+ - f_-) = \lambda f_+ - \lambda f_-$ de donde

$$(\lambda f)_+ + \lambda f_- = (\lambda f)_- + \lambda f_+,$$

integrando obtenemos, gracias a la Proposición 2.12, que

$$\int_X (\lambda f)_+ d\mu + \lambda \int_X f_- d\mu = \int_X (\lambda f)_- d\mu + \lambda \int_X f_+ d\mu,$$

pero como todas las integrales son finitas, podemos hacer las restas y obtener el resultado.

Si $\lambda < 0$ entonces escribimos

$$(\lambda f)_+ + (-\lambda) f_+ = (\lambda f)_+ + (-\lambda) f_-,$$

e integrando obtenemos que

$$\int_X (\lambda f)_+ d\mu + (-\lambda) \int_X f_+ d\mu = \int_X (\lambda f)_- d\mu + (-\lambda) \int_X f_- d\mu,$$

pues $-\lambda > 0$. El resultado se sigue reordenando los términos. ■

Definición 2.12. *Sean $f, g : (X, \mathcal{B}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles. Diremos que f es igual a g en casi todas partes si es que el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

es μ-despreciable, i.e.

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$

Usaremos la notación $f =_\mu g$ o $f = g$ c.t.p. para señalar esto, .

De manera análoga se definen $\leq_\mu, \geq_\mu, <_\mu$ y $>_\mu$.

Observación 2.8. Notar que si $f = g$ entonces $f =_\mu g$, y lo mismo ocurre con las otras relaciones.

Definición 2.13. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, definimos el espacio $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ como el cociente de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ bajo la relación de equivalencia $=_\mu$.*

Proposición 2.17. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ el espacio de medida completado.*

1. *Sea $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\bar{\mathcal{B}}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible, entonces existe $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible tal que $f =_\mu g$.*

2. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es tal que $f =_\mu g$, entonces g es $\bar{\mathcal{B}}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible*

Observación 2.9. Recuerde que los conjuntos μ-despreciables son los mismos que los $\bar{\mu}$-despreciables, por lo que escribir $=_\mu$ es lo mismo que escribir $=_{\bar{\mu}}$.

Demostración. 1. Supongamos primero que $g \in \Sigma_+$, es decir

$$g(x) = \sum_{i \in I} g_i 1_{G_i}(x),$$

donde $G_i \in \bar{\mathcal{B}}$, luego $G_i = F_i \cup N_i$ con $F_i \in \mathcal{B}$ y $N_i \in \mathcal{N}$. Luego podemos definir

$$f(x) = \sum_{i \in I} g_i 1_{F_i}(x),$$

luego $\{f(x) \neq g(x)\} \subseteq \bigcup_{i \in I} N_i$ que es despreciable, en otras palabras $f =_\mu g$.

Ahora supongamos que $g \geq 0$, luego existe $(\bar{s}_n) \subseteq \Sigma_+(X, \bar{\mathcal{B}}, \mu)$ tal que $\bar{s}_n \nearrow g$. De lo anterior, existe funciones simples $(s_n) \subseteq \Sigma_+(X, \mathcal{B}, \mu)$ tales que $s_n =_\mu \bar{s}_n$. Definamos

$$B_n = \{x \in X : s_n(x) = \bar{s}_n(x)\},$$

luego la construcción de s_n nos dice que $\mu(B_n^c) = 0$, y si definimos

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

tenemos que $\mu(B^c) = 0$ y $s_n 1_B(x) = \bar{s}_n 1_B(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $(s_n 1_B)_{n \in \mathbb{N}} = (\bar{s}_n 1_B)_{n \in \mathbb{N}}$ es no decreciente, luego podemos definir

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) 1_B(x),$$

que resulta ser una función $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$-medible, y además $f =_\mu g1_B =_\mu g$ pues $\mu(B^c) = 0$.

Finalmente, si g es cualquier función medible aplicamos lo anterior a g_+ y g_-.

2. Para ver que g es $\bar{\mathcal{B}}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible notemos que si $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ y si $x \in g^{-1}([-\infty, a))$ para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces

$$\begin{aligned} g(x) < a &\Leftrightarrow (g(x) < a \ \wedge \ x \in N) \ \vee \ (g(x) < a \ \wedge \ x \in N^c) \\ &\Leftrightarrow (g(x) < a \ \wedge \ x \in N) \ \vee \ (f(x) < a \ \wedge \ x \in N^c) \end{aligned}$$

pues $f(x) = g(x)$ en N^c. Así

$$g^{-1}([-\infty, a)) = \underbrace{(g^{-1}([-\infty, a)) \cap N)}_{\in \mathcal{N}_\mu} \sqcup \underbrace{(f^{-1}([-\infty, a)) \setminus N)}_{\in \mathcal{B}} \in \bar{\mathcal{B}}.$$

∎

Observación 2.10. Si $\mathcal{B}$ es completa, f es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible y $g =_\mu f$, entonces g es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible.

Observación 2.11. En virtud de este resultado, de aquí en adelante siempre supondremos que las σ-álgebras consideradas son completas, pues en caso de no serlo, podemos pasar a la completada sin grandes cambios.

Proposición 2.18. *Sea $f \in \mathcal{L}^1$, entonces el conjunto $\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$ tiene medida nula.*

Demostración. Definamos
$$B_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\},$$
luego $B_n \searrow B = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$. Notar que por definición $|f(x)| 1_{B_n}(x) \geq n 1_{B_n}(x)$, de donde
$$+\infty > \int_X |f| \, d\mu \geq \int_X |f| \, 1_{B_n} d\mu \geq \int_X n 1_{B_n} d\mu = n\mu(B_n),$$
luego la única posibilidad es que $\mu(B_n) \to 0$, pero por continuidad de la medida, tenemos que $\mu(B_n) \searrow \mu(B)$, luego $\mu(B) = 0$. ■

Observación 2.12. Notar que en virtud de esta proposición, se tiene que cada clase de equivalencia en L^1 tiene al menos un representante que es finito en todo X.

Observación 2.13. Gracias a esta proposición tenemos que si $f, g \in \mathcal{L}^1$, entonces la función h definida en la Observación 2.7 satisface que $h =_\mu f + g$. Adicionalmente, si $f, g \in L^1$ podemos suponer que ambas funciones son finitas, y por tanto $h = f + g$ se puede definir *en todo* X.

Corolario 2.19. *El espacio L^1 es un espacio vectorial.*

Proposición 2.20. *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función en $\mathcal{L}^1$. Entonces*
$$f =_\mu 0 \Leftrightarrow \int_X |f| \, d\mu = 0.$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Si $f \in \Sigma_+$ entonces
$$f(x) = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}(x),$$
donde $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de X, y $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Sea $I_0 = \{i \in I : a_i \neq 0\}$, luego
$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) \\ &= \sum_{i \in I \setminus I_0} a_i \mu(A_i) + \sum_{i \in I_0} a_i \mu(A_i) \\ &= \sum_{i \in I_0} a_i \mu(A_i).\end{aligned}$$
Por otra parte
$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i \in I_0} A_i$$
y como estamos suponiendo que $f =_\mu 0$ entonces $\mu(A_i) = 0$ para todo $i \in I_0$, por lo tanto
$$\int_X f d\mu = \sum_{i \in I_0} a_i \mu(A_i) = 0.$$

Ahora, si $f \in \mathcal{L}^1$ es cualquiera, como $|f| \geq 0$, entonces podemos tomar $s_n \nearrow |f|$ con $s_n \in \Sigma_+$. Sea $B = \{x \in X : f(x) = 0\}$, luego $0 \leq s_n 1_B \leq |f| \, 1_B = 0$ y como $\mu(B^c) = 0$ tenemos que
$$s_n = s_n 1_B + s_n 1_{B^c} = s_n 1_{B^c} =_\mu 0.$$

Por el paso anterior concluimos que $\int_X s_n \mathrm{d}\mu = 0$ y por definición

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \mathrm{d}\mu = 0.$$

($\Leftarrow$): Notemos que

$$B = \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

de donde $B_n \subseteq B_{n+1}$ y por la continuidad de la medida obtenemos que

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Pero $|f| 1_{B_n} \geq \frac{1}{n} 1_{B_n}$, luego

$$0 = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X |f| 1_{B_n} \mathrm{d}\mu \geq \int_X \frac{1}{n} 1_{B_n} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\mu(B_n) \geq 0,$$

de donde $\mu(B_n) = 0$ para todo n. ■

Definición 2.14. *Para cada $A \in \mathcal{B}$ y $f \in \mathcal{L}^1$, definimos*

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_X f 1_A \mathrm{d}\mu.$$

Observación 2.14.

- $|f 1_B| \leq |f|$ luego si $f \in \mathcal{L}^1$ entonces $f 1_B \in \mathcal{L}^1$ para todo $B \in \mathcal{B}$.
- $(f 1_B)_+ = f_+ 1_B \leq f_+$.
- $(f 1_B)_- = f_- 1_B \leq f_-$.

Lo que hace que $\int_B f \mathrm{d}\mu$ esté bien definida.

Proposición 2.21. *Sea $f \in \mathcal{L}^1$. Entonces*

$$f =_\mu 0 \Leftrightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu = 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{B}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Notar que $f =_\mu 0 \Leftrightarrow f_+ =_\mu 0 \;\wedge\; f_- =_\mu 0$, de donde para todo $A \in \mathcal{B}$ se tiene que $f_+ 1_A =_\mu 0 =_\mu f_- 1_A$.
($\Leftarrow$): Definamos $B_\pm = \{x \in X : \pm f(x) \geq 0\} \in \mathcal{B}$, pero con esto

$$f_+ = f 1_{B_+}$$
$$f_- = -f 1_{B_-},$$

y como $B_\pm \in \mathcal{B}$ podemos usar la Proposición 2.20 para concluir que $f_+ =_\mu 0 =_\mu f_-$. ■

Proposición 2.22. *Sean $f, g \in \mathcal{L}^1$.*

1. *Si $\mu(A) = 0$ entonces $\int_A f = 0$.*
2. *$f \leq_\mu g \Leftrightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \mathrm{d}\mu \quad \forall\, A \in \mathcal{B}$.*
3. *$f =_\mu g \Leftrightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A g \mathrm{d}\mu \quad \forall\, A \in \mathcal{B}$.*

4. *Si $\mathcal{B}$ es completa y $h =_\mu f$, entonces*

$$h \in \mathcal{L}^1 \quad \wedge \quad \int_X h \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Veamos 1: Sea $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = 0$ y sea $g := f 1_A$. Entonces $\{x : g(x) \neq 0\} \subseteq A$ por lo tanto $g =_\mu 0$ y

$$\int_A f = \int_X g \mathrm{d}\mu = 0.$$

Veamos ahora 2, el resto queda como ejercicio.
($\Rightarrow$): Consideremos el conjunto

$$B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\},$$

luego como $f \leq_\mu g$ tenemos que $\mu(B^c) = 0$. Para $A \in \mathcal{B}$ tenemos que $f 1_{A \cap B} \leq g 1_{A \cap B}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_A f \mathrm{d}\mu &= \int_X f 1_A \mathrm{d}\mu \\
&= \int_B f 1_A \mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_{B^c} f 1_A \mathrm{d}\mu}_{=0} \\
&= \int_X f 1_{A \cap B} \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X g 1_{A \cap B} \mathrm{d}\mu \\
&= \int_B g 1_A \mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_{B^c} g 1_A \mathrm{d}\mu}_{=0} \\
&= \int_X g 1_A \mathrm{d}\mu \\
&= \int_A g \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Como antes, definamos $B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$. Como $B^c = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ tenemos que

$$B^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X : f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n} \right\} =: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c.$$

Observar que $B_n^c \nearrow B^c$, y de la definición de B_n^c tenemos que

$$f 1_{B_n^c} \geq g 1_{B_n^c} + \frac{1}{n} 1_{B_n^c},$$

de donde por hipótesis

$$\int_{B_n^c} g \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n^c} f \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n^c} g \mathrm{d}\mu + \frac{1}{n} \mu(B_n^c),$$

luego $\frac{1}{n}\mu(B_n^c) \leq 0$, con lo que concluimos que $\mu(B_n^c) = 0$ y por tanto $\mu(B^c) = 0$. ■

2.3. Teoremas de convergencia

Teorema 2.23 (Teorema de convergencia monótona, Lema de Beppo Levi)**.** *Sea* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espacio de medida y* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión no-decreciente de funciones medibles no-negativas. Entonces*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notemos que como f_n es no decreciente, entonces $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ está bien definido (pudiendo ser $+\infty$). Además la sucesión $\int_X f_n \mathrm{d}\mu$ es también no decreciente por lo que también podemos hablar de $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$. Como $f_n(x) \leq f(x)$ para todo n, obtenemos que

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu,$$

de donde concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Para la otra desigualdad, consideremos $\lambda \in (0,1)$ y sea $s \in \Sigma_+$ una función simple tal que $0 \leq s \leq f$. Sea

$$B_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \lambda s(x)\},$$

y notemos que como f_n es no decreciente, tenemos que $B_n \subseteq B_{n+1}$. Si $x \in X$ entonces $\lambda s(x) < f(x)$ y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, luego debe existir n tal que $\lambda s(x) < f_n(x) < f(x)$, es decir $x \in B_n$, por lo tanto $B_n \nearrow X$.

Además

$$\begin{aligned}\int_X f_n \mathrm{d}\mu &\geq \int_{B_n} f_n \mathrm{d}\mu \\ &\geq \lambda \int_{B_n} s \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

pero si definimos $\nu(A) := \int_A s \mathrm{d}\mu$, entonces ν es una medida sobre $\mathcal{B}$ (ver Ejercicio 2.21), luego $\nu(B_n) \nearrow \nu(X)$ por la continuidad de las medidas.

En consecuencia obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \geq \lambda \nu(X) = \lambda \int_X s \mathrm{d}\mu,$$

lo que vale para todo $\lambda < 1$, y podemos pasar al límite $\lambda \to 1^-$ y obtener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_X s \mathrm{d}\mu,$$

pero esta desigualdad es válida para cualquier función simple $s \leq f$, por lo que tomando el supremo obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_X f \mathrm{d}\mu,$$

y el resultado está probado. ∎

Corolario 2.24. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son funciones medibles no-negativas entonces*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Basta notar que como $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $g_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \nearrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. ■

Corolario 2.25. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son medibles no negativas y que verifican $f_n \searrow f$ y que además $f_1 \in \mathcal{L}^1$ entonces*

1. $f \in \mathcal{L}^1$.
2. $$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notar que $0 \leq f \leq f_n \leq f_1$, luego inmediatamente $f, f_n \in \mathcal{L}^1$ pues $\int_X f \leq \int_X f_n \leq \int_X f_1 < \infty$. Consideremos ahora $A = \{x \in X : f_1(x) < +\infty\}$, y definamos $g_n = f_n 1_A$ y $g = f 1_A$. Como $f_1 \in \mathcal{L}^1$ tenemos que $\mu(A^c) = 0$, de donde $f_n =_\mu g_n$ y $f =_\mu g$.

Finalmente, como $0 \leq g_n(x) \leq g_1(x) < +\infty$ para todo $x \in X$, tiene sentido escribir $h_n = g_1 - g_n \geq 0$, que además satisface$h_n \nearrow g_1 - g$ y por tanto podemos aplicar el Teorema de convergencia monótona. ■

Observación 2.15. Notar que en este caso se requiere que al menos uno de los elementos de la sucesión debe pertenecer a $\mathcal{L}^1$ (en la demostración f_1). Esto en contraste con el teorema de convergencia monótona "creciente" que no requiere dicha hipótesis.

Corolario 2.26. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ tal que $f_n \nearrow f$. Luego*

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 2.27 (Lema de Fatou I)**.** *Sean (f_n) funciones medibles no-negativas. Entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Demostración. Recordar que $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Definimos

$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k,$$

que satisface $g_n \leq g_{n+1}$ y por lo tanto $g_n \nearrow f$, luego usando convergencia monótona obtenemos que

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu,$$

pero

$$\int_X g_n \mathrm{d}\mu = \int_X \inf_{k\geq n} f_k \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, k \geq n,$$

luego

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_k \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \mathrm{d}\mu,$$

de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 2.28 (Lemma de Fatou II)**.** *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ medibles y $g \in \mathcal{L}^1$.*

1. *Si $f_n \geq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

2. *Si $f_n \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Definamos $A = \{x \in X : |g(x)| < \infty\}$, y como $g \in \mathcal{L}^1$ se debe tener que $\mu(A^c) = 0$, luego podemos definir

$$h_n = f_n 1_A \text{ y } h = g 1_A,$$

luego como $f_n \geq g$ tenemos que $h_n \geq h$. Mas aún tenemos que $f_n =_\mu h_n$, $g =_\mu h$, de donde obtenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} h_n =_\mu \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

En otras palabras $h_n - h \geq 0$ y podemos aplicarle el Lema de Fatou I, es decir

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (h_n - h) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (h_n - h) \mathrm{d}\mu,$$

pero como h es finita se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} (h_n - h) = \liminf_{n\to\infty} h_n - h,$$

por lo tanto, como $h \in \mathcal{L}^1$ podemos escribir

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \mathrm{d}\mu - \int_X h \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \mathrm{d}\mu - \int_X h \mathrm{d}\mu,$$

de donde se obtiene la primera parte.

La segunda parte se deja de ejercicio. . ■

Teorema 2.29 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ para todo $x \in X$. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$, entonces*

1. *$f \in \mathcal{L}^1$.*

2. $$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. $$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Observación 2.16. En la generalidad que hemos estado trabajando (funciones que admiten valores $\pm\infty$) y hablamos de $f_n \to f$, lo que se busca es estimar $|f_n - f|$, pero esto puede no tener sentido. Para ello diremos que la resta es válida solo si $\mu(A^c) = 0$ para $A = \{x \in X : |f(x)| < +\infty, |f_n(x)| < +\infty \; \forall \, n \in \mathbb{N}\}$, dando pie a definir

$$f_n - f \overset{def}{=} f_n 1_A - f 1_A.$$

Por otra parte, cuando trabajamos con funciones de $\mathcal{L}^1$ efectivamente $\mu(A^c) = 0$ y por lo tanto siempre tiene sentido hablar de $f_n - f$ en este espacio.

Demostración. 1. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ se tiene que $|f(x)| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1$.

2. Consideremos $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, como $g \in \mathcal{L}^1$ se tiene que $\mu(A^c) = 0$, por lo que podemos considerar $\tilde{f} := f1_A =_\mu f$, $\tilde{f_n} := f_n 1_A =_\mu f_n$, $\tilde{g} := g1_A =_\mu g$. Además

$$\left|\tilde{f_n}(x) - \tilde{f}(x)\right| \leq 2\tilde{g},$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\tilde{f_n}(x) - \tilde{f}(x)\right| = 0 \in \mathcal{L}^1,$$

luego podemos usar el Lema de Fatou II para escribir

$$0 \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \int_X \left|\tilde{f_n} - \tilde{f}\right| \mathrm{d}\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} \left|\tilde{f_n} - \tilde{f}\right| \mathrm{d}\mu = 0.$$

3.
$$\left|\int_X \tilde{f_n} \mathrm{d}\mu - \int_X \tilde{f} \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X \tilde{(}f_n - \tilde{f})\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X \left|\tilde{f_n} - \tilde{f}\right| \mathrm{d}\mu.$$

■

Definición 2.15 (Convergencia c.t.p.)**.** *Decimos que $f_n \longrightarrow f$ c.t.p. si*

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Lema 2.30. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $\mu(\{x \in C : |f(x)| = \infty\}) = 0$. Para $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ defina los conjuntos*

$$A_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Entonces $f_n \to f$ c.t.p. si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}) = 0$.

Demostración. Ver Ejercicio 2.19. ■

Teorema 2.31 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, versión c.t.p.)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ c.t.p.. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para casi todo $x \in X$, entonces*

1. *$f \in \mathcal{L}^1$.*

2.
$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.
$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Ejercicio. ■

2.4. La integral de Riemann

En esta sección abordaremos la integral de Riemman, para ello necesitamos algunas consideraciones previas: Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo acotado diremos que $\mathcal{P}$ es una partición finita de $[a, b]$ si $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ donde

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

y a la cantidad $\Delta_{\mathcal{P}} = \text{máx}_{k=0,\dots,n-1} \{t_{k+1} - t_k\}$ la denominaremos el *paso de la partición*.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, definimos las *sumas superior e inferior* de f en el intervalo $[a, b]$ asociada a una partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ como

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t_{k+1} - t_k) \quad \text{y} \quad s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(t_{k+1} - t_k),$$

donde

$$M_k = \sup_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x) \quad \text{y} \quad m_k = \inf_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x).$$

Definición 2.16. *Diremos que una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}$ es una partición finita del intervalo $[a, b]$ que satisface $\Delta_{\mathcal{P}} < \delta$, entonces*

$$S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \varepsilon.$$

COMPLETAR

2.5. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sean $(X_1, \mathcal{B}_1), (X_2, \mathcal{B}_2)$ espacios de medida y suponga que $X = A \sqcup B$ para $A, B \in \mathcal{B}_1$. Muestre que $f : (X_1, \mathcal{B}_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2)$ es medible si y solo si $f\big|_A : (A, A \cap \mathcal{B}_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2)$ y $f\big|_B : (B, B \cap \mathcal{B}_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2)$ son medibles.

Ejercicio 2.2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida completo, y sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Muestre, usando la definición de medible, que

1. Si $a \in \mathbb{R}$, muestre que $af, f + a, f^2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles.
2. Muestre que $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible. *Considere la función $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida en la Observación 2.7 y muestre h es medible.*
3. $f \cdot g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible.
4. Suponga que $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible demuestre que $f/g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como
$$f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
es medible.

Ejercicio 2.3. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función y sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto denso. Muestre que f es medible si y solo si $f^{-1}([-\infty, d])$ es medible para todo $d \in D$.

Ejercicio 2.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función Borel medible, y sea $Q \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Para cada $q \in Q$ consideremos $a_q \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitrarios y definamos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus Q, \\ a_x & \text{si } x \in Q. \end{cases}$$

Muestre que $\tilde{f}$ es medible.

Ejercicio 2.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente. Muestre que f es medible.

Ejercicio 2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : (X, \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ está bien definido.

1. Muestre que $\{x \in X : f(x) > a\}$ es medible para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

2. Muestre que $f_+(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n)_+(x)$ y $f_-(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n)_-(x)$.

Ejercicio 2.7. Considere el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ y sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{B}_L$-$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ medible. Considere las siguientes definiciones:

($\star_1$) f es continua casi en todas partes si existe $N \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\ell(N) = 0$ y f es continua en $\mathbb{R} \setminus N$.

($\star_2$) f coincide con una función continua casi en todas partes si existe $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ continua tal que $\ell(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

De un ejemplo de una función que satisface ($\star_1$) pero no ($\star_2$), y otro ejemplo de una función que satisface ($\star_2$) pero no ($\star_1$).

Ejercicio 2.8. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Considere en X y en Y las respectivas σ-álgebras Borelianas $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo[2], muestre que $f^{-1}(\mathcal{B}_Y) = \mathcal{B}_X$ y que $f(\mathcal{B}_X) = \mathcal{B}_Y$.

Ejercicio 2.9. Sea $A \in \mathcal{B}_L$ un conjunto Lebesgue medible. Suponga que $F : A \times (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función tal que

- $F(\cdot, y) : A \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible para todo $y \in (a, b)$.
- $F(x, \cdot) : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua para todo $x \in A$.

1. Muestre que la función
$$f(x) := \inf_{y\in(a,b)} F(x, y)$$
es Lebesgue medible. *Ayuda: Muestre primero que* $f(x) = \inf_{\substack{q\in(a,b)\\ q\in\mathbb{Q}}} F(x, q)$

2. Muestre que $g(x) := \liminf_{y\to c} F(x, y)$ es Lebesgue medible.

Ejercicio 2.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Borel medible. Consideramos la derivada de $f' : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{si el límite existe en } \overline{\mathbb{R}}.$$

[2]Biyección continua con inversa continua.

Para $D(f') = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \in \mathbb{R}\}$ muestre que si f es continua entonces el conjunto $D(f')$ es un conjunto Boreliano. Concluya que $f' : D(f') \to \mathbb{R}$ es una función medible. *Ayuda: Considere* $F : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ *definidas como*

$$F(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$G(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ejercicio 2.11. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Definimos $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\varphi(x) = \mu(f^{-1}((x, \infty])).$$

1. Muestre que φ es no creciente.
2. Muestre que si $\mu(X) = M > 0$ entonces φ está acotada superiormente por M.
3. Muestre que si $\varphi(x_0) < \infty$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces φ es continua a la derecha en $[x_0, \infty)$.

Ejercicio 2.12. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Definimos $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\psi(x) = \mu(f^{-1}([x, \infty])).$$

1. Muestre que ψ es no creciente.
2. Muestre que si $\mu(X) = M > 0$ entonces φ está acotada superiormente por M.
3. Muestre que si $\psi(x_0) < \infty$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces ψ es continua a la izquierda en (x_0, ∞).

Ejercicio 2.13. Sean $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $f_n \nearrow f$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos

$$E_n = f_n^{-1}((a, \infty])$$
$$E = f^{-1}((a, \infty]).$$

Si $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ es una medida muestre que $\mu(E_n) \to \mu(E)$.

Ejercicio 2.14. Sean $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $f_n \to f$.

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos

$$E_n = f_n^{-1}((a, \infty])$$
$$E = f^{-1}((a, \infty]).$$

   Muestre que $\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = E$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos

$$F_n = f_n^{-1}([-\infty, a))$$
$$F = f^{-1}([-\infty, a)).$$

   Muestre que $\limsup_{n\to\infty} F_n = \liminf_{n\to\infty} F_n = F$.

Ejercicio 2.15. Sean $s_1, s_2 \in \Sigma_+$. Muestre que

$$s(x) = \max\{s_1(x), s_2(x)\} \in \Sigma_+.$$

Ejercicio 2.16. Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medible y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Muestre que el conjunto A es medible, donde A es el conjunto compuesto de todos los $x \in X$ tales que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. *Ayuda: Considere los conjuntos*

$$A_{n,m,k} = \left\{ x \in X : |f_{m+n}(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Ejercicio 2.17. Demostrar que $=_\mu$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^1$.

Ejercicio 2.18. Sean $f, g \in \mathcal{L}^1$ y defina

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

y

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Muestre que $M, m \in \mathcal{L}^1$.

Ejercicio 2.19. Demuestre el Lema 2.30.

Ejercicio 2.20. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que f es finita c.t.p. y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $\lambda \in [0, \mu(X))$ y $\varepsilon > 0$ muestre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \geq \lambda \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Ejercicio 2.21. Considere $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Para cada $A \in \mathcal{B}$ defina

$$\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Muestre que ν_f es una medida. *Ayuda: Considere primero el caso en que f es una función simple.*

Ejercicio 2.22. Demuestre que el Teorema de convergencia monótona y el Lema de Fatou son equivalentes.

Ejercicio 2.23 (Teorema de convergencia monótona c.t.p.). Suponga que $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles que satisfacen:

- $f_1(x) \geq 0$ c.t.p., y
- $f_n \leq f_{n+1}$ c.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Muestre que

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio 2.24 (Lemma de Fatou c.t.p.). Suponga que $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles que satisfacen $f_n(x) \geq 0$ c.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio 2.25. Demuestre el Teorema 2.31.

Ejercicio 2.26. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finito, y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Suponga que existe $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, es decir,

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Muestre que $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ y que

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio 2.27. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Muestre que $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \ell)$, donde ℓ es la medida de Lebesgue, y que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \mathrm{d}\ell = \int_{(a,b)} f \mathrm{d}\ell.$$

Concluya que Teorema fundamental del Cálculo vale para la integral de Lebesgue, esto es, si $f \in C^1(\mathbb{R})$ entonces

$$\int_{[a,b]} \frac{df}{dx} \mathrm{d}\ell = f(b) - f(a).$$

Ejercicio 2.28. Muestre que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0$$

es equivalente a

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Ejercicio 2.29. Se dice que f_n *converge en medida* a f si para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Muestre que si $\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces f_n converge en medida a f. Construya un ejemplo de una sucesión f_n que converge en medida a f pero que $\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu$ no converge a 0.

Ejercicio 2.30. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es *Cauchy en medida* si para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Muestre que se puede construir una subsucesión $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que satisface: si

   $$A_j = \left\{x \in X : \left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)\right| \geq 2^{-j}\right\}$$

   entonces $\mu(A_j) \leq 2^{-j}$. Concluya que $(f_{n_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$) si $x \in \bigcap_{j\geq k} A_j^c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Muestre que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida, entonces existe f medible tal que f_n converge en medida a f.

3. Muestre además que existe una subsucesión $(f_{n_j})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p..

Ejercicio 2.31 (Teorema de Egorov). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finito, y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funciones medibles tales que $f_n \to f$ c.t.p.. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \subseteq X$ tal que $\mu(A^c) < \varepsilon$ y $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, es decir, la convergencia c.t.p. es convergencia uniforme, salvo en un conjunto de medida pequeña. *Ayuda: Considere los conjuntos* $A_{n,m} = \bigcup_{k\geq n} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}$

Ejercicio 2.32. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ y sea $\varepsilon > 0$.

1. Muestre que existe s función simple tal que $s \in L^1$ y
$$\int_X |f - s| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

2. Suponga ahora que $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_L$ y $\mu = \ell$. Muestre que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, \mathrm{d}\ell < \varepsilon.$$

   Ayuda: Verifique primero que si $f = 1_A$ para $A \in \mathcal{B}_L$ entonces f se puede aproximar por una función simple de la forma
$$s = \sum_{k=1}^{N} 1_{I_k},$$
   donde I_k es un intervalo abierto (ver el Ejercicio 1.38). Luego vea que $1_{(a,b)}$ se puede aproximar por una función continua.

Ejercicio 2.33. Considere el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Para $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ considere la función $T(a) = ax + b$. Muestre que $f \circ T \in \mathcal{L}^1$ y que
$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\ell = |a| \int_{\mathbb{R}} f \circ T \mathrm{d}\ell.$$

Ejercicio 2.34. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$ una función Lebesgue integrable tal que
$$\int_{[0,1]} f_n(x) \mathrm{d}x = 1 \quad \text{y} \quad \int_{[\frac{1}{n},1]} f_n(x) \mathrm{d}x < \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si se define
$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x),$$
muestre que
$$\int_{[0,1]} g(x) \mathrm{d}x = +\infty.$$

Ejercicio 2.35. Sea $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$ una sucesión de funciones continuas tales que

- Si $m \neq n$ entonces $f_m(x) \neq f_n(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.
- Existe $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ tal que $f_n \to f$ c.t.p..

Muestre que
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.36. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida completo. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, y sea $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ otra función tal que $f = g$ c.t.p.. Muestre que g es medible y que
$$\mu(\{x \in X : f(x) > a\}) = \mu(\{x \in X : g(x) > a\})$$

Ejercicio 2.37. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{x^n}\mathrm{d}x.$$

Ayuda: Note que $(0,\infty)=(0,1]\cup(1,\infty)$.

Ejercicio 2.38. Suponiendo que dx es la medida de Lebesgue, demuestre el siguiente

Teorema. Sea $f:[a,b]\times[-1,1]:\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 (es decir, es diferenciable en sus dos variables y las derivadas son continuas). Suponga además que para cada $t\in(-1,1)$ se tiene que

$$\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\quad\text{uniformemente en } x.$$

Muestre que la función $F:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}$ definida como $F(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ es diferenciable y que

$$\frac{dF}{dt}(t)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.39. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f\in C^0(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$, para $x\in\mathbb{R}$ defina

$$F(x)=\int_{I_x} f\mathrm{d}\ell,$$

donde ℓ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y el conjunto I_x está definido como

$$I_x=\begin{cases}(0,x) & \text{si } x>0,\\ \varnothing & \text{si } x=0,\\ (x,0) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. Muestre que F es continua.

2. Muestre que F es diferenciable para todo $x\in\mathbb{R}$ y que $F'(x)=f(x)$. *Ayuda: Para* $h\neq 0$ *considere*

$$\Delta_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)$$

Capítulo 3

Introducción a los espacios L^p

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida completo (i.e. $\mathcal{B}$ contiene a todos los conjuntos μ despreciables), y sea $p > 0$, $p \neq 1$. Consideramos el espacio

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ medible y } |f|^p \in \mathcal{L}^1 \right\},$$

equipado con

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

También definimos

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ medible y existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f| \leq_\mu a \right\},$$

además definimos

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_\infty = \text{ínf}\,\{a \in \mathbb{R} : |f| \leq_\mu a\} = \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

En general, los espacios $\mathcal{L}^p$ y $\mathcal{L}^\infty$ no tienen estructura de espacio vectorial, pues $f + g$ no siempre existe. Sin embargo, en el capítulo anterior vimos que dado $f \in \mathcal{L}^p$ entonces existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p$ tal que $f =_\mu \tilde{f}$ y $\left|\bar{f}(x)\right| < \infty$. Como $=_\mu$ es una relación de equivalencia, entonces podemos definir el espacio cociente

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) \Big/ {=_\mu} = \left\{ [f]_{=_\mu} : f \in \mathcal{L}^p \right\}.$$

Si tomamos en cuenta todo lo que vimos en el capítulo anterior, entonces tenemos que

Proposición 3.1.

$$[f]_{=_\mu} + [g]_{=_\mu} = [\tilde{f} + \tilde{g}]_{=_\mu},$$
$$\lambda [f]_{=_\mu} = [\lambda \tilde{f}]_{=_\mu},$$
$$\int_X [f]_{=_\mu} \mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f} \mathrm{d}\mu,$$

donde se pueden escoger $\tilde{f} \in [f]_{=_\mu}$ y $\tilde{g} \in [g]_{=_\mu}$ finitas. En lo que sigue, cada vez que digamos $f \in L^p$ significa que escogemos $f \in [f]_{=_\mu}$ que es finita.

3.1. El espacio L^1

Proposición 3.2. *El espacio* $(L^1(X,\mathcal{B},\mu),\|\cdot\|_1)$ *es un espacio vectorial normado.*

Demostración. Solo mencionar que de la proposición anterior se obtienen las propiedades de espacio vectorial. Y de lo visto en el capítulo anterior se deducen las propiedades que debe satisfacer una norma. En particular notar que

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f =_\mu 0 \Leftrightarrow [f]_{=_\mu} = [0]_{=_\mu}.$$

Se deja como ejercicio completar los detalles. ■

Teorema 3.3. L^1 *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1$ una sucesión de Cauchy. Para demostrar que L^1 es un espacio de Banach, basta construir un subsucesión convergente.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \forall\, n,m \geq n_1.$$

Similarmente podemos encontrar $n_2 > n_1$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2^2}, \quad \forall\, n,m \geq n_2,$$

y procediendo de manera inductiva, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, n,m \geq n_k,$$

y en particular esto implica que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \geq 1.$$

Veamos que la sucesión $g_k := f_{n_k}$ es convergente en L^1. Sea $h_n(x) = \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$ y notemos que

$$\|h_n\|_1 = \left\|\sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k|\right\|_1 \leq \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k\|_1 \leq 1.$$

Además, tenemos que $0 \leq h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$ por lo que el Teorema de convergencia monótona nos dice que $h_n \nearrow h := \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$ con

$$\int h = \lim_{n\to\infty} \int h_n \leq 1,$$

es decir $h \in L^1$ por lo que sin perder generalidad podemos suponer que h es finita c.t.p. y que $h_n \to h$ c.t.p..

Por otra parte, tenemos que si $m > n \geq 2$

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_{m-1}(x)| + |g_{m-1}(x) - g_{m-2}(x)| + \ldots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|
\end{aligned}$$

$$= h(x) - h_{n-1}(x),$$

y como $h_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x)$ c.t.p. tenemos que la sucesión $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para casi todo x, por lo tanto para casi todo $x \in X$ debe existir $g(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x),$$

y además, pasando al límite $m \to \infty$ en la desigualdad $|g_m(x) - g_n(x)| \leq h(x) - h_{n-1}(x) \leq h(x)$ obtenemos que

$$|g(x)| - |g_n(x)| \leq |g(x) - g_n(x)| \leq h(x) \quad \text{c.t.p. en } X.$$

y por lo tanto $g \in L^1$. Finalmente, por el Teorema de convergencia dominada concluimos que

$$\|g - g_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puesto que $g - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ c.t.p. y $|g(x) - g_n(x)| \leq h(x)$ c.t.p. para $h \in L^1$. ■

3.2. El espacio L^∞

Lema 3.4. *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p..*

Demostración. Si $\|f\|_\infty = +\infty$ no hay nada que demostrar, por lo que supondremos $\|f\|_\infty < +\infty$. Recordar que $\|f\|_\infty = \text{ínf}\{a \geq 0 \in \mathbb{R} : |f| \leq_\mu a\}$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq a_n$ c.t.p. y

$$a_n \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Como $|f(x)| \leq a_n$ c.t.p. tenemos que el conjunto $A_n = \{x \in X : |f(x)| \leq a_n\}$ satisface $\mu(A_n^c) = 0$, y si lo juntamos con lo anterior podemos escribir

$$|f|\, 1_{A_n} \leq a_n \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n},$$

luego si definimos $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tenemos que $\mu(A^c) = 0$ y $1_A \leq 1_{A_n}$ de donde obtenemos que

$$|f|\, 1_A \leq |f|\, 1_{A_n} \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n},$$

pero esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$, y el resultado se sigue pues $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \in A$. ■

El siguiente lema nos dice que la convergencia bajo la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ es convergencia uniforme salvo por un conjunto de medida nula.

Lema 3.5. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty$ y $f \in L^\infty$. Entonces*

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathcal{B},\ \mu(A^c) = 0,\ \textit{tal que } \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración. Recordar que en L^∞ siempre podemos suponer que f_n y f son finitas en todo X (de lo contrario podemos tomar representantes en la case de equivalencia que así lo sean).
($\Rightarrow$): Por el lema anterior tenemos que $|f_n(x) - f(x)| \leq_\mu \|f_n - f\|_\infty$, es decir, si definimos

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq_\mu \|f_n - f\|_\infty\},$$

entonces $\mu(A_n^c) = 0$. Para $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tenemos que $\mu(A^c) = 0$ y

$$|f_n - f|\, 1_A \leq \|f_n - f\|_\infty ,$$

pero la cota superior no depende del $x \in A$, luego

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Leftarrow$): Por definición tenemos que

$$\|f_n - f\|_\infty = \text{ínf}\,\{a \in \mathbb{R} : |f_n - f| \leq_\mu a\} .$$

Pero

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \quad \forall\, x \in A,$$

y como $\mu(A^c) = 0$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \quad \text{c.t.p.},$$

por lo tanto

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Teorema 3.6. *L^∞ es un espacio de Banach.*

Demostración. Que $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado se deja como ejercicio. Veamos que es completo, para ello consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty$ una sucesión de Cauchy, donde suponemos sin perder generalidad que f_n es finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como toda sucesión de Cauchy debe ser acotada, podemos suponer que $\|f_n\|_\infty \leq M < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con esto en mente notar que

$$|f_n(x)| \leq_\mu \|f_n\|_\infty ,$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq_\mu \|f_n - f_m\|_\infty ,$$

luego si consideramos

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x)| \leq_\mu \|f_n\|_\infty\} ,$$
$$B_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \leq_\mu \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

tenemos que $\mu(A_n^c) = 0$ y $\mu(B_{n,m}^c) = 0$. Si definimos el conjunto

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m},$$

entonces cada f_n es acotada por M en A, y además

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

en otras palabras, $(f_n 1_A)$ es una sucesión de Cauchy en $(B(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ que se sabe es un espacio métrico completo, y por tanto debe existir $f \in B(X,\mathbb{R})$ tal que

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} |f_n(x)1_A(x) - f(x)1_A(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pero por el lema anterior esto es equivalente a decir que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Teorema 3.7. *El conjunto de las funciones simples $f = \sum_{i\in I} a_i 1_{A_i}$ es denso en $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$.*

Demostración. Ejercicio. ■

3.3. Espacios L^p, $p \in (1,\infty)$

Lema 3.8 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p, q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces $f \cdot g \in L^1$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración. Notar que si $\|f\|_p = +\infty$ o $\|g\|_q = +\infty$ entonces la desigualdad se es cierta trivialmente. De manera similar, si $\|f\|_p = 0$ o si $\|g\|_q = 0$ entonces se sigue que $f = 0$ c.t.p. o bien $g = 0$ c.t.p. y por lo tanto $fg = 0$ c.t.p. y nuevamente la desigualdad es cierta trivialmente.

Recordemos la desigualdad de Young para números: si $a, b \geq 0$, entonces[1]

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Si $\|f\|_p, \|g\|_q \in (0,\infty)$ el resultado se sigue al aplicar la desigualdad de Young para

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{y} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

en efecto, tenemos que

$$\frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

luego integrando se obtiene que

$$\int \frac{|f|\,|g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\int \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

■

Corolario 3.9 (Desigualdad de Hölder 2)**.** *Sean $p, q, r \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, y sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces $f \cdot g \in L^r$ y*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración. Ejercicio. ■

Observación 3.1. La desigualdad de Hölder también vale si $p = \infty$ en cuyo caso se interpreta que $\frac{1}{p} = 0$, es decir $q = r$ y

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_\infty \|g\|_r$$

Corolario 3.10. *Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida finita, entonces*

$$L^\infty \subseteq L^p \subseteq L^q \subseteq L^1,$$

para todo $1 < q < p < \infty$, y en general las inclusiones pueden ser estrictas (ver el Ejercicio 3.3).

[1] Para demostrar esto, notar que de la convexidad de la función exponencial tenemos que

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Como el espacio es de medida finita, entonces la función constante $f = 1_X$ pertenece a todos los espacios L^p, luego como $p > q$ podemos definir

$$r = \frac{pq}{p-q},$$

luego

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

entonces de la generalización de la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\|f\|_q \leq \|1\|_r \|f\|_p = \mu(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p,$$

lo que nos da la inclusión. ■

Observación 3.2. En general no hay inclusiones entre L^p y L^q si $p \neq q$. Notar que por ejemplo si $\mu(X) = +\infty$ entonces la función $1 = 1_X \in L^\infty$ pero $1 \notin L^p$ para ningún $p < \infty$.

Teorema 3.11 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean $f, g \in L^p$ con $p > 1$, entonces $f + g \in L^p$ con*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Notar que para cada $x \in X$

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| \, |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq (|f(x)| + |g(x)|) \, |f(x) + g(x)|^{p-1},$$

de donde de la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int |f + g|^p &\leq \int (|f| + |g|) \, |f + g|^{p-1} \\
&= \int |f| \, |f + g|^{p-1} + \int |g| \, |f + g|^{p-1} \\
&\leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}} \\
&= \left[\left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int |f + g|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

de donde se concluye la desigualdad. ■

Teorema 3.12 (Teorema de convergencia dominada en L^p)**.** *Sea $1 < p < \infty$, $(f_n) \subseteq L^p$ una sucesión, $g \in L^p$ y f medible tales que $|f_n| \leq_\mu g$ y $f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p.. Entonces*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración. Notar que como $|f_n| \leq g$ c.t.p. y como $f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p, entonces tenemos que $|f| \leq g$ c.t.p. y por tanto $f \in L^p$.

Ahora $|f_n - f|^p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ c.t.p. y $|f_n - f|^p \leq 2^{p-1} \left(|f_n|^p + |f|^p \right) \leq 2^p |g|^p$ c.t.p. y como $g \in L^p$ podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada a la sucesión $|f_n - f|^p \in L^1$ para concluir que $\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Teorema 3.13 (Teorema de Fischer–Riesz)**.** *El espacio L^p es un espacio de Banach.*

Demostración. La demostración es análoga a la del caso $p = 1$, por lo que solo veremos donde están las modificaciones.

Dada una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ le construimos una subsucesión convergente $g_k = f_{n_k}$ tal que

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \geq 1.$$

La sucesión g_k es convergente en L^p pues si consideramos $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$ entonces de la desigualdad de Minkowski deducimos que

$$\|h_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p \leq 1.$$

Además, tenemos que $0 \leq |h_n(x)|^p \leq |h_{n+1}(x)|^p$ por lo que el Teorema de convergencia monótona nos dice que $|h_n|^p \nearrow |h|^p := \left|\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\right|^p \in L^1$ y podemos suponer que h es finita c.t.p. y que $h_n \to h$ c.t.p..

Tal como en el caso $p = 1$, la sucesión $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy c.t.p. en $\mathbb{R}$ y por tanto es convergente c.t.p. a $g(x)$ que además verifica

$$|g(x)| - |g_n(x)| \leq |g(x) - g_n(x)| \leq h(x) \quad \text{c.t.p. en } X.$$

y por lo tanto $|g(x)| \leq |g_n(x)| + |h(x)|$, es decir $g \in L^p$. Finalmente, por el Teorema de convergencia dominada en L^p concluimos que

$$\|g - g_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puesto que $g - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ c.t.p. y $|g_n(x)| \leq h(x) + |g(x)|$ c.t.p. para $h, g \in L^p$. ∎

Observación 3.3. Notar que para $p = 2$, el espacio $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de Hilbert real (resp. complejo) para el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_X fg\,\mathrm{d}\mu \quad (\text{resp. } \langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu).$$

Terminamos este capítulo con un resultado de densidad

Teorema 3.14. *Si $p \in [1, \infty)$ entonces el conjunto de las funciones simples*[2] $f = \sum_{i\in I} a_i 1_{A_i}$ *con* $\mu(A_i) < \infty$ *es denso en* $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Demostración. Ejercicio. ∎

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Considere $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ el espacio de medida cuenta puntos.

1. Muestre que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es medible no negativa, entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f\,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

[2] En algunos libros, a las funciones simples soportadas en conjuntos de medida finita se les denomina "step functions".

2. Concluya que si $p \in [1,\infty)$ entonces $L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu)$ es isométricamente isomorfo a ℓ^p, el espacio de sucesiones p-sumables.

Ejercicio 3.2. Muestre las siguientes propiedades

1. $f, g \in L^\infty \Rightarrow f \cdot g \in L^\infty$ con $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.
2. $f \in L^\infty, g \in L^1 \Rightarrow f \cdot g \in L^1$ con $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

Ejercicio 3.3. Considere el espacio de medida $((0,1),\mathcal{B}_l,\ell)$ y sean $1 \leq q < p \leq \infty$. Construya un ejemplo de $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ de modo que $f \in L^q((0,1))$ pero $f \notin L^p((0,1))$. *Ayuda: Considere funciones del tipo $f(x) = x^a(1-\ln x)^b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ apropiados.*

Ejercicio 3.4. Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida finito y sea $f : X \to (0,\infty)$ una función medible cualquiera. Muestre que

$$\mu(X)^2 \leq \left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_X \frac{1}{f}\mathrm{d}\mu\right).$$

Ejercicio 3.5. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_L,\ell)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\ell = 1,$$

y para cada $x \in [-1,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ defina $u_n(x) = nf(nx)$. Muestre que si $\varphi \in C([-1,1])$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} u_n \varphi \mathrm{d}\ell = \varphi(0).$$

Ejercicio 3.6. Sean $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida y $f \in L^1(\mu)$.

1. Sea $A_n := \{x \in X : \frac{1}{n} < |f(x)| \leq n\}$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

2. Deduzca que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{B}$ con $\mu(A) < \infty$ tal que $\sup_{x\in A} |f(x)| < \infty$ μ-ctp) y

$$\int_{X\setminus A} |f| < \varepsilon.$$

Ejercicio 3.7. Sea $f \in L^1([0,1],\mathcal{B}_L,\ell)$. Muestre que

$$\int_0^{1-\varepsilon} |f(x+\varepsilon) - f(x)| \,\mathrm{d}\ell(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ayuda: Muestre primero el resultado para $f = 1_I$ con $I = (a,b) \subseteq [0,1]$ un intervalo abierto. Ver el Ejercicio 2.32.

Ejercicio 3.8. Sea $f \in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$. Muestre que

$$\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \underset{\mu(A)\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ayuda: Muestre primero el resultado para $f = 1_B$ con $B \in \mathcal{B}$.

Ejercicio 3.9. Suponga que $f : X \to (0,\infty)$ es una función medible. Se define el ínfimo esencial como

$$\operatorname{ess\,inf} f = \sup\{c > 0 : f(x) \geq c \text{ c.t.p}\}.$$

Muestre que $\operatorname{ess\,inf} f = \dfrac{1}{\operatorname{ess\,sup} \frac{1}{f}}$.

Ejercicio 3.10. Sea $f \in L^1([0,2\pi], \mathcal{B}_L, \ell)$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\mathrm{d}\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}\ell(x) = 0.$$

Ayuda: Suponga primero que $f = 1_I$ para $I \subseteq [0,2\pi]$ intervalo.

Ejercicio 3.11. Considere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

1. Para $p \geq 1$ calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 |f_n|^p \,\mathrm{d}\ell$.
2. Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente ni en L^∞.

Ejercicio 3.12. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (\operatorname{sen}(x))^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 3.13. Suponga que $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para algún $1 \leq p < \infty$. Suponga adicionalmente que $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ para todo $x \in X$ con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty \leq M$. Muestre que $\|f_n g_n - fg\|_p \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Ejercicio 3.14. Demuestre la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: Si $p, q, r \in [1,+\infty]$ son tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

entonces

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Ejercicio 3.15. Demuestre el Teorema 3.7.

Ejercicio 3.16. Demuestre el Teorema 3.14.

Ejercicio 3.17. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera y sea $E \in \mathcal{B}$ un conjunto medible. Suponga que $f \in L^1(X)$ y que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\mu = \mu(E).$$

Ayuda: Considere los conjuntos $\{0 < f(x) < 1\}$ y $\{f(x) \geq 1\}$.

Ejercicio 3.18. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y suponga que $f \in L^p(X)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Muestre que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Para probar esto verifique que:

1. Demuestre el resultado suponiendo que $\|f\|_\infty = 0$.

2. Para cada $p \geq 1$ y $\alpha > 0$ verifique que
$$\|f\|_p^p \geq \alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

3. Si $\|f\|_\infty > 0$, y para cada $0 < \alpha < \|f\|_\infty$, muestre que $\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p$. *Ayuda: Recuerde que* $f \in L^1$.

4. Si $0 < \|f\|_\infty < +\infty$ entonces $\|f\|_\infty \geq \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p$. *Ayuda: Recuerde que* $f \in L^1$.

5. Concluya.

Ejercicio 3.19. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < \infty$. Sea $f \in L^\infty(X)$ tal que $\|f\|_\infty > 0$ y considere, para $p \geq 1$,
$$\alpha_p = \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu.$$
El ejercicio anterior demuestra $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{a_p} = \|f\|_\infty$, el propósito de este ejercicio es *demostrar de forma independiente* que
$$\lim_{p\to\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \|f\|_\infty .$$
Para ello

1. Verifique que $\alpha_{p+1} \leq \alpha_p \|f\|_\infty$.

2. Muestre que $\alpha_p \leq \alpha_{p+1}^{\frac{p}{p+1}} \mu(X)^{\frac{1}{p+1}}$.

3. Para $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ defina el conjunto $A_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ y demuestre que
$$\alpha_{p+1} \geq \mu(A_\varepsilon)(\|f\|_\infty - \varepsilon)^{p+1}.$$

4. Concluya.

Ejercicio 3.20. Suponga que $f_n, f \in L^1(X, \mathcal{B}\mu)$ son funciones no-negativas tales que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p. y $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \mathrm{d}\mu$. Muestre que $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Ejercicio 3.21. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finito. Diremos que una familia $F \subseteq L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ es *uniformemente integrable* si

- $$\sup\left\{\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu : f \in F\right\} < \infty.$$

- $$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \text{uniformemente en } f \in F.$$

Muestre que si $f_n, f : X \to \mathbb{R}_+$ son tales que $f_n, f \in L^1$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ para todo $x \in X$, y
$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \mathrm{d}\mu,$$
Entonces la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

Capítulo 4

Medidas producto

Dados dos espacios de medida $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ nos interesa equipar al espacio producto $X_1 \times X_2$ con una estructura de medida: una σ-álgebra y una medida. Para ello establecemos los siguientes requisitos:

- Si $A \in \mathcal{B}_1$ y $B \in \mathcal{B}_2$ entonces $A \times B$ debe ser medible.
- La medida de $A \times B$ debe ser $\mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$.

Notar que gracias al Ejercicio 1.6 sabemos que la familia

$$\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2\}$$

es una semi-álgebra[1], por lo que gracias a los teoremas de Carathéodory y Hahn podemos considerar el siguiente esquema para construir una medida en $X_1 \times X_2$ que satisfaga lo anterior:

1. Definir $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como
$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$
2. Considerar la σ-álgebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{S})$.
3. Extender μ a $\mathcal{B}$ utilizando los teoremas de extensión.

Sin embargo, para que este esquema funcione, debemos primero garantizar que $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ es efectivamente una medida[2], y para obtener esto utilizaremos la teoría de integración que desarrollamos en los capítulos anteriores.

Definición 4.1. *Sea $A \subseteq X_1 \times X_2$. Para cada $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$ se definen las fibras de A como*

- $A_1(a_2) = \{x \in X_1 : (x, a_2) \in A\}$.
- $A_2(a_1) = \{y \in X_2 : (a_1, y) \in A\}$.

Lema 4.1. *Sea $A \subseteq X_1 \times X_2$.*

1. *Si $A = A_1 \times A_2$, entonces*
$$A_1(a_2) = \begin{cases} A_1 & \text{si } a_2 \in A_2, \\ \varnothing & \text{si } a_2 \notin A_2. \end{cases}$$
y
$$A_2(a_1) = \begin{cases} A_2 & \text{si } a_1 \in A_1, \\ \varnothing & \text{si } a_1 \notin A_1. \end{cases}$$

[1] Pero no necesariamente un álgebra (y por tanto tampoco σ-álgebra)

[2] Hay que demostrar que es σ-aditiva

2. $(A_i(a_j))^c = (A^c)_i(a_j)$ *para* $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$.

3. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)_i(a_j) = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)_i(a_j)$ *para* $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$.

Demostración. Ejercicio. ■

Lema 4.2. *Sea $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, entonces para cualquier $(a_1,a_2) \in X_1 \times X_2$ se tiene que $A_1(a_2) \in \mathcal{B}_1$ y $A_2(a_1) \in \mathcal{B}_2$.*

Demostración. Consideremos la colección de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : A_1(a_2) \in \mathcal{B}_1,\ \forall\, a_2 \in X_2,\ A_2(a_1) \in \mathcal{B}_2,\ \forall\, a_1 \in X_1\}\,.$$

Evidentemente si $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, entonces $A \in \mathcal{C}$, luego $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$.

Además, gracias al Lema 4.1 tenemos que $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ y $(A_n) \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, de donde obtenemos que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra.

Con esto $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, es decir, la propiedad que queríamos demostrar es cierta. ■

Proposición 4.3. *Sean $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$, dos espacios de medida σ-finitos. Para cada $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ se tiene que*

$$\varphi_A : X_1 \to \overline{\mathbb{R}_+},\ \varphi_A(x_1) := \mu_2(A_2(x_1)) \text{ es una función } \mathcal{B}_1\text{-medible, y}$$
$$\psi_A : X_2 \to \overline{\mathbb{R}_+},\ \psi_A(x_2) := \mu_1(A_1(x_2)) \text{ es una función } \mathcal{B}_2\text{-medible.}$$

Demostración. En primer lugar, notemos que gracias al lema anterior se tiene que $A^i(x_j) \in \mathcal{B}_i$ y por lo tanto las funciones φ_A y ψ_A están bien definidas. Para ver que las funciones son medibles, supongamos primero que las medidas μ_1 y μ_2 son finitas.

Consideremos

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : \varphi_A \text{ es } \mathcal{B}_1 \text{ medible y } \psi_A \text{ es } \mathcal{B}_2 \text{ medible}\}\,,$$

y demostremos que $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \mathcal{M}$.

En primer lugar, notemos que si $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ entonces

$$\varphi_A(x_1) = \mu_2(A_2(x_1)) = \mu_2(A_2)1_{A_1}(x_1),\ \text{y}$$
$$\psi_A(x_2) = \mu_1(A_1(x_2)) = \mu_1(A_1)1_{A_2}(x_2),$$

luego las funciones son medibles. En otras palabras, $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{M}$.

Ahora si $A \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$, y como $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ es una semi-álgebra, tenemos que debe existir una familia disjunta y finita $(A^k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ de la forma $A^k = A_1^k \times A_2^k$ y que satisfacen

$$A = \bigsqcup_{k\in K} A^k,\,.$$

Como además $\mu_i(A_i(x_j)) = \sum_{k\in K} \mu_i((A^k)_i(x_j))$ tenemos que

$$\varphi_A = \sum_{k\in K} \varphi_{A^k}$$
$$\psi_A = \sum_{k\in K} \psi_{A^k},$$

que resultan ser medibles por ser suma de funciones medibles no negativas. Con esto, hemos demostrado que $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{M}$. Para concluir que $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{M}$ demostraremos que $\mathcal{M}$ es clase monótona y aplicamos el teorema de la clase monótona para concluir que $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \mathcal{M}$.

Supongamos que tenemos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ tales que $A_n \nearrow A$. Notar que $(A_n)_2(x_1) \nearrow A_2(x_1)$, luego por la monotonía de la medida tenemos que

$$\mu_2((A_n)_2(x_1)) \nearrow \mu_2(A_2(x_1)),$$

de donde obtenemos que

$$\varphi_A(x_1) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{A_n}(x_1) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{A_n}(x_1),$$

que es una función $\mathcal{B}_1$ medible (el supremo de funciones medibles es medible). De manera similar se verifica que ψ_A es $\mathcal{B}_2$ medible, y se obtiene que $A \in \mathcal{M}$.

Si por otra parte $A_n \searrow A$, como las medidas son finitas[3] tenemos que

$$\mu_2((A_n)_2(x_1)) \searrow \mu_2(A_2(x_1)),$$

luego

$$\varphi_A(x_1) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{A_n}(x_1),$$

y así φ_A es $\mathcal{B}_1$ medible. Análogamente se concluye que ψ_A es $\mathcal{B}_2$ medible y por lo tanto $A \in \mathcal{M}$.

Para el caso general de medidas σ-finitas argumentamos de la siguiente forma. Para $i = 1, 2$ consideremos $(X_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_i$ tales que

$$\mu_i(X_{i,n}) < +\infty \quad \text{y} \quad X_{i,n} \nearrow X_i.$$

Para cada n, consideramos las σ-álgebras restringidas[4] a cada $X_{i,n}$, es decir

$$\mathcal{B}_{i,n} = \mathcal{B}_1\Big|_{X_{i,n}} = \{A \cap X_{i,n} : A \in \mathcal{B}_i\},$$

y con esto en mente, si $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, consideremos $A_n = A \cap X_{1,n} \times X_{2,n}$. Del caso finito tenemos que φ_{A_n} es $\mathcal{B}_{1,n}$ medible. Si definimos

$$\bar{\varphi}_n = \begin{cases} \varphi_{A_n}(x_1) & \text{si } x_1 \in X_{1,n} \\ 0 & \text{si } x_1 \notin X_{1,n}. \end{cases}$$

entonces $\bar{\varphi}_A$ es $\mathcal{B}_1$ medible para cada n y además

$$\varphi_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{\varphi}_{A_n},$$

de donde φ_A es $\mathcal{B}_1$ medible. El caso de ψ_A es análogo. ■

Para evitar eventuales confusiones, en lo que sigue utilizaremos la siguiente notación: si $f : X_i \to \overline{\mathbb{R}}$ es μ_i integrable entonces

$$\int_{X_i} f \mathrm{d}\mu_i = \int_{X_i} f(x_i)\mathrm{d}\mu_i(x_i).$$

Teorema 4.4. *Para $i = 1, 2$ sean $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ dos espacios de medida σ-finitos. Entonces existe una única medida $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ definida sobre $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ tal que*

[3] Recordar que la continuidad decreciente para las medidas requiere finitud de la medida de algún conjunto.
[4] Ver el Ejercicio 1.15.

1. *Si* $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ *entonces*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

2. μ *es* σ*-finita.*

3. *Para todo* $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ *se tiene que*

$$\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_1(x_2))\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

Demostración. De la proposición anterior tenemos que se pueden definir las siguientes funciones $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \to \overline{\mathbb{R}_+}$ dadas por

$$\nu_1(A) = \int_{X_1} \varphi_A(x_1)\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$
$$\nu_2(A) = \int_{X_2} \psi_A(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_2) = \int_{X_2} \mu_1(A_1(x_2))\mathrm{d}\mu_2(x_2),$$

que gracias al Ejercicio 2.21 son medidas. Recordar además que si $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ entonces

$$\varphi_A(x_1) = \mu_2(A_2)1_{A_1}(x_1),$$

luego

$$\nu_1(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_2)1_{A_1}(x_1)\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \mu_2(A_2)\mu_1(A_1).$$

Análogamente $\nu_2(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, lo que demuestra la parte de existencia de la medida μ, ya que podemos tomar $\mu := \nu_1$ o $\mu := \nu_2$.

Veamos ahora que si una medida arbitraria $\nu : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ satisface que $\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ entonces ν debe ser σ-finita. En efecto, consideremos los conjuntos $X_{i,n} \nearrow X_i$ de la demostración anterior, luego es claro que

$$X_{1,n} \times X_{2,n} \nearrow X_1 \times X_2,$$

y como $\nu(X_{1,n} \times X_{2,n}) = \mu_1(X_{1,n})\mu_2(X_{2,n}) < +\infty$ tenemos que ν es σ-finita.

Notemos ahora que como ν_1 es una medida entonces $\nu_1\Big|_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2}$ es también una medida, luego $\tau(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \nu_1\Big|_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2}(A_1 \times A_2)$ es una medida σ-finita sobre la semi-álgebra $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Para concluir, notamos que del teorema de Hahn-Caratheodory, la extensión de τ a $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ debe ser única, de donde concluimos que $\nu_1 = \nu_2 = \mu_1 \otimes \mu_2$. ∎

Corolario 4.5. *Sea* $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. *Las siguientes son equivalentes*

1. $\mu_1 \otimes \mu_2(A) = 0$.

2. $\varphi_A = 0$ μ_1*-c.t.p., es decir* $x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$ *es nula para* μ_1*-casi todo* $x_1 \in X_1$.

3. $\psi_A = 0$ μ_2*-c.t.p., es decir* $x_2 \mapsto \mu_1(A_1(x_2))$ *es nula para* μ_2*-casi todo* $x_2 \in X_2$.

Demostración. Se sigue de

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_1(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_2(x_2))\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

∎

Observación 4.1. Es importante mencionar que incluso en el caso en que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sean completas (algo que hemos venido suponiendo siempre), en general la σ-álgebra $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ no tiene por que ser completa. En efecto, basta notar que si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \sigma$-álgebra de Lebesgue, y si consideramos V un conjunto no Lebesgue medible, entonces $A = V \times \{0\}$ no es medible en $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, pero es despreciable, pues $V \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}$ y $\ell \otimes \ell(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$.

Con esto en mente, denotaremos $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ y $\mu_1 \bar{\otimes} \mu_2$ a la σ-álgebra completada y la respectiva medida completada.

En los siguientes resultados trabajaremos con σ-álgebras que no son necesariamente completas.

Lema 4.6. *Sea $A \in \mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$, entonces*

1. $A_2(x_1) \in \overline{\mathcal{B}_2}$, *para μ_1 casi todo $x_1 \in X_1$.*

2. $A_1(x_2) \in \overline{\mathcal{B}_1}$, *para μ_2 casi todo $x_2 \in X_2$.*

3. *La función*
$$x_1 \to \overline{\mu_2}(A_2(x_1))$$
es $\overline{\mathcal{B}_1}$ medible.

4. *La función*
$$x_2 \to \overline{\mu_1}(A_1(x_2))$$
es $\overline{\mathcal{B}_2}$ medible.

5. $$\mu_1 \bar{\otimes} \mu_2(A) = \int_{X_1} \overline{\mu_2}(A_2(x_1)) \mathrm{d}\overline{\mu_1}(x_1) = \int_{X_2} \overline{\mu_1}(A_1(x_2)) \mathrm{d}\overline{\mu_2}(x_2).$$

Demostración. Si $A \in \mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ entonces existen $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ y $N \in \mathcal{N}_{\mu_1 \otimes \mu_2}$ tal que $A = B \cup N$. Recordar que como $N \in \mathcal{N}_{\mu_1 \otimes \mu_2}$, debe existir $C \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ tal que $\mu_1 \otimes \mu_2(C) = 0$ y $N \subseteq C$.

Del corolario anterior tenemos que $\mu_2(C_2(x_1)) =_{\mu_1} 0$, es decir, existe $H_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que H_1^c es μ_1-despreciable y
$$\mu_2(C_2(x_1)) = 0 \quad \forall\, x_1 \in H_1.$$

Ahora, como $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ tenemos que $B_2(x_1) \in \mathcal{B}_2$ para todo $x_1 \in X_1$, luego como
$$A_2(x_1) = B_2(x_1) \cup N_2(x_1), \quad N_2(x_1) \subseteq C_2(x_1),$$
entonces $A_2(x_1) \in \overline{\mathcal{B}_2}$ para todo $x_1 \in H_1$.

Por otra parte tenemos que
$$\overline{\mu_2}(A_2(x_1)) = \mu_2(B_2(x_1)) \quad \forall\, x_1 \in H_1,$$
pero la función $x_1 \to \mu_2(B_2(x_1))$ es $\mathcal{B}_1$ medible, luego $x_1 \to \overline{\mu_2}(A_2(x_1))$ es $\overline{\mathcal{B}_1}$ medible.

Finalmente, si $\mu_1 \bar{\otimes} \mu_2(A) = \mu_1 \otimes \mu_2(B)$, luego
$$\begin{aligned}
\mu_1 \bar{\otimes} \mu_2(A) &= \mu_1 \otimes \mu_2(B) \\
&= \int_{X_1} \mu_2(B_2(x_1)) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \mu_2(B_2(x_1)) \mathrm{d}\overline{\mu_1}(x_1)
\end{aligned}$$

$$= \int_{X_1} \overline{\mu_2}(A_2(x_1))\mathrm{d}\overline{\mu_1}(x_1).$$

Las demostraciones relativas a $A_1(x_2)$ son análogas. ∎

Teorema 4.7. *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible. Entonces*

$$f(\cdot, x_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}} \text{ es } \mathcal{B}_1 \text{ medible para todo } x_2 \in X_2$$
$$f(x_1, \cdot) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}} \text{ es } \mathcal{B}_2 \text{ medible para todo } x_1 \in X_1.$$

Si f es $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ medible, entonces $f(\cdot, x_2)$ es $\overline{\mathcal{B}_1}$ medible para casi todo $x_2 \in X_2$ y $f(x_1, \cdot)$ es $\overline{\mathcal{B}_2}$ medible para casi todo $x_1 \in X_1$.

Demostración. Supongamos primero que f es una función simple $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-medible, luego

$$f = \sum_{i \in I} a_i 1_{A^i}$$

con $A^i \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, pero como $1_{A^i}(x_1, x_2) = 1_{(A^i)_2(x_1)}(x_2) = 1_{(A^i)_1(x_2)}(x_1)$ tenemos que

$$f(\cdot, x_2) = \sum_{i \in I} a_i 1_{(A^i)_1(x_2)}(\cdot),$$

que resulta ser una función simple sobre X_1, en particular es $\mathcal{B}_1$ medible. Lo mismo ocurre para $f(x_1, \cdot)$.

Ahora, si f es una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible cualquiera, sabemos que existe una sucesión de funciones simples $f_n \to f$, y además es claro que

$$f_n(\cdot, x_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\cdot, x_2),$$

y como cada $f_n(\cdot, x_2)$ es $\mathcal{B}_1$ medible, también debe serlo el límite.

Si ahora f es $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ medible, entonces debe existir $\tilde{f}$ que es $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible tal que $f = \tilde{f}$ μ c.t.p. para $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Se deja como ejercicio ver que esto es suficiente para concluir. ∎

4.1. Teoremas de Tonelli y Fubini

Volvamos a suponer que los espacios $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ son completos y σ-finitos para $i = 1, 2$.

Teorema 4.8 (Tonelli)**.** *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible, entonces*

1. $$x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \text{ es una función } \mathcal{B}_1\text{-medible.}$$

2. $$x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1) \text{ es una función } \mathcal{B}_2\text{-medible.}$$

3. *Además*

$$\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

Demostración. Supongamos primero que $f \in \Sigma_+$, es decir

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i \in I} a_i 1_{A^i}(x_1, x_2), \tag{4.1}$$

luego para $x_1 \in X_1$ fijo se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) &= \sum_{i \in I} a_i \int_{X_2} 1_{A^i}(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \\
&= \sum_{i \in I} a_i \int_{X_2} 1_{(A^i)_2(x_1)}(x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \\
&= \sum_{i \in I} a_i \mu_2((A^i)_2(x_1)),
\end{aligned}$$

pero $x_1 \overset{\varphi_{A^i}}{\longmapsto} \mu_2((A^i)_2(x_1))$ es una función $\mathcal{B}_1$-medible gracias a la Proposición 4.3.

Si ahora $f \geq 0$ es arbitraria, podemos tomar una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_+$ tales que $f_n \nearrow f$. Gracias al teorema de convergencia monótona tenemos que para cada $x_1 \in X_1$

$$\int_{X_2} f_n(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

de donde $x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$ es $\mathcal{B}_1$-medible por ser límite de funciones $\mathcal{B}_1$-medibles. Análogamente se verifica que $x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$ es $\mathcal{B}_2$-medible.

Finalmente, veamos que se las integrales iteradas coinciden con la integral sobre el espacio producto. Como antes, si f es una función simple como en (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \sum_{i \in I} a_i \mu_1 \otimes \mu_2(A^i) \\
&= \sum_{i \in I} a_i \int_{X_1} \mu_2((A^i)_2(x_1)) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\sum_{i \in I} a_i \mu_2((A^i)_2(x_1)) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1),
\end{aligned}$$

es decir el resultado es cierto para funciones simples.

Si ahora $f \geq 0$ es medible, entonces como antes existe $f_n \nearrow f$ con f_n simple. Nuevamente, gracias al teorema de convergencia monótona tenemos que la igualdad anterior aplicada a f_n debe preservarse en el límite, es decir

$$\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

La otra igualdad es análoga. ■

El resultado anterior vale si se toma f una función $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ medible, con las siguientes modificaciones

Teorema 4.9 (Tonelli en la completación)**.** *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}_+}$ una función $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ medible, entonces*

1.

$$x_1 \to \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \text{ *es una función* } \mathcal{B}_1\text{-*medible para casi todo* } x_1 \in X_1.$$

2.
$$x_2 \to \int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \text{ es una función } \mathcal{B}_2\text{-medible para casi todo } x_2 \in X_2.$$

3. *Además*
$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \bar{\otimes} \mu_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

Un corolario simple que se puede obtener del teorema de Tonelli ocurre cuando $(X_1, \mathcal{B}, \mu_1) = (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ son el espacio de medida cuenta puntos, en cuyo caso las funciones medibles son sucesiones y las integrales son series (ver Ejercicio 3.1).

Corolario 4.10. *Sea $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ una bi-sucesión de números reales no negativos. Entonces*
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{n,k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,k} = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{a,k}.$$

Teorema 4.11 (Fubini)**.** *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ si y solo si alguna de las integrales iteradas*
$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1), \int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$$
es finita, en cuyo caso
$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

Demostración. Si f es una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible entonces $|f| \geq 0$ satisface las hipótesis del teorema de Tonelli, luego
$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} |f| \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2),\end{aligned}$$
de donde obtenemos que si una de las integrales es finita, entonces las otras dos son finitas.

Finalmente, si f es integrable, entonces podemos aplicar el teorema de Tonelli a f_+ y f_- para escribir las integrales iteradas. ■

Tal como en el teorema de Tonelli, el resultado de Fubini sigue siendo válido (con obvias modificaciones) si es que f es una función $\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2$ medible.

4.2. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue. Definimos inductivamente

$$\mathcal{B}_L^1 = \mathcal{B}_L, \quad \mathcal{B}_L^{N+1} = \mathcal{B}_L^N \otimes \mathcal{B}_L$$
$$\ell^1 = \ell, \quad \ell^{N+1} = \ell^N \otimes \ell,$$

lo que nos da un espacio de medida $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L^N, \ell^N)$. Cuando el contexto lo permita no usaremos el super-índice N en esta definición, esto es, denotaremos por $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L, \ell)$ al espacio de medida anteriormente construido.

Definición 4.2. *Definimos el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ como la completación de $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L, \ell)$, y lo denotamos igual. Cuando el contexto lo permita también utilizaremos la notación "$\mathrm{d}x$" para denotar a la medida de Lebesgue.*

Lema 4.12. *Si $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1)$ y $\mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{C}_2)$, entonces*

$$\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2.$$

Demostración. ($\subseteq$): Evidente, pues $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.
($\supseteq$): Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$, para ello definamos

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{A \subseteq X_1 : A \times X_2 \in \mathcal{B}\},$$

y notemos que $\mathcal{C}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_1$. Además, $\tilde{\mathcal{B}}_1$ es σ-álgebra pues

- $A^c \times X_2 = (A \times X_2)^c$,
- $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \times X_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times X_2)$,

y como $\mathcal{B}$ es σ-álgebra se concluye lo afirmado.

Por lo anterior se cumple que $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_1$, en otras palabras si $A \in \mathcal{B}_1$ entonces $A \times X_2 \in \mathcal{B}$. Similarmente se demuestra que si $B \in \mathcal{B}_2$ entonces $X_1 \times B \in \mathcal{B}$. Notando que $A \times X_2 \cap X_1 \cap B = A \times B$, luego $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$.

Finalmente, como $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ tenemos que lo anterior demuestra que $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$, lo que termina el resultado. ∎

Observación 4.2. El lema anterior nos dice que $\mathcal{B}_L$ se puede construir como la completación de la σ-álgebra generada por ejemplo por

- $\mathcal{C}_1 = \left\{\prod_{i=1}^N I_i : I_i \subseteq \mathbb{R} \text{ es un intervalo abierto}\right\}$.
- $\mathcal{C}_2 = \left\{\prod_{i=1}^N I_i : I_i \subseteq \mathbb{R} \text{ es un intervalo cerrado}\right\}$.
- $\mathcal{S} = \left\{\prod_{i=1}^N (a_i, b_i] : -\infty \leq a_i < +\infty, -\infty < b_i \leq +\infty\right\}$.

Los siguientes lemas son enunciados sin demostración y se dejan como ejercicio al lector.

Lema 4.13. *Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos separables, entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{T}_{d_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T}_{d_2}) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_{d_1} \times \mathcal{T}_{d_2}),$$

donde $\mathcal{T}_d$ denota la topología generada por la métrica d.

Observación 4.3. El lema sigue siendo cierto si se considera un producto numerable de espacios métricos separables. Mas aún, se puede cambiar la hipótesis de espacios métricos separables, por espacios topológicos cuyas topologías tengan bases numerables (segundo axioma de numerabilidad).

Lema 4.14. *Para $i = 1, 2$ sean $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ espacios de medidas σ-finitos. Entonces*

$$\mathcal{B}_1 \bar{\otimes} \mathcal{B}_2 = \overline{\overline{\mathcal{B}_1} \otimes \overline{\mathcal{B}_2}}.$$

Observación 4.4. Como consecuencia de los Lemas 4.13 y 4.14 obtenemos que $\mathcal{B}_L = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}}$, la completación de la σ-álgebra Boreliana[5] en $\mathbb{R}^N$.

Proposición 4.15. *Si $A \in \mathcal{B}_L$, entonces*

$$\ell^N(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^N(C_n) : (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right\}.$$

Demostración. Sabemos que $\mathcal{S}$ es una semi-álgebra y que además si $A \in \mathcal{S}$ entonces

$$\ell^N(A) = \prod_{i=1}^{n} \ell((a_i, b_i]).$$

Si definimos $\mu_L : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ como

$$\mu_L(A) := \prod_{i=1}^{n} \ell((a_i, b_i]),$$

y dado que ya sabemos que ℓ^N es σ-aditiva y σ-finita sobre $\mathcal{S}$ entonces concluimos que μ_L también lo es. Por lo tanto, gracias a los teoremas de Carathéodory y de Hahn, cualquier extensión de μ_L ha de coincidir con ℓ^N en $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$.

Por otra parte, el lemma anterior nos dice que $\mathcal{B}_L^N$ es la completación de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ y por definición ℓ^N es la completación de $\ell^N = \mu_L$. En particular, ℓ^N debe ser igual a la medida exterior asociada a μ_L en $\mathcal{B}_L^N$, esto es, si $A \in \mathcal{B}_L^N$ entonces

$$\ell(A) = \mu_L^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(C_n) : (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right\}.$$

■

Teorema 4.16. *Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}^N$. Consideremos la función $H(x) = ax + b$, entonces*

1. *$H(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ y $H(\mathcal{B}_L^N) = \mathcal{B}_L^N$.*
2. *Para todo $A \in \mathcal{B}_L^N$, $\ell(H(A)) = |a|^N \ell(A)$.*
3. *Una función $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ es (Lebesgue) medible si y solo si $f \circ H$ es (Lebesgue) medible.*
4. *Una función $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ es (Lebesgue) integrable si y solo si $f \circ H$ es (Lebesgue) integrable, en cuyo caso*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \mathrm{d}x = |a|^N \int_{\mathbb{R}^N} f \circ H \mathrm{d}x.$$

[5]La generada por la topología de la norma

Demostración. Las demostración de *1.* y *2.* son análogas a las vistas en el caso 1-dimensional y se dejan de ejercicio al lector.

La parte *3.* se obtiene de observar que $f^{-1}(A)$ es medible si y solo si $H^{-1} \circ f^{-1}(A)$ es medible y le hecho de que $\mathcal{B} = H(\mathcal{B})$ tanto para $B = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ como para $\mathcal{B} = \mathcal{B}_L$.

Para *4.* supongamos primero que f es una función simple no-negativa, es decir

$$f = \sum_{i \in I} a_i 1_{A_i}, \quad a_i \geq 0,$$

luego es claro que

$$f \circ H = \sum_{i \in I} a_i 1_{H^{-1}(A_i)}$$

y como $H^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}b$, de la parte *2.* deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \circ H \mathrm{d}x = \sum_{i \in I} a_i \ell(H^{-1}(A_i)) = \frac{1}{|a|^N} \sum_{i \in I} a_i \ell(A_i) = \frac{1}{|a|^N} \int_{\mathbb{R}^N} f \mathrm{d}x.$$

Si ahora f es medible no-negtiva, podemos tomar una sucesión de funciones simples no-negativas tales que $f_n \nearrow f$, luego por convergencia monótona obtenemos que f es integrable si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \mathrm{d}x < +\infty,$$

pero por el caso anterior esto ocurre si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \circ H \mathrm{d}x < +\infty,$$

luego, nuevamente por convergencia monótona, pues $f_n \circ H \nearrow f \circ H$ obtenemos que f es integrable si y solo si $f \circ H$ es integrable, y en este caso

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \mathrm{d}x = |a|^N \int_{\mathbb{R}^N} f \circ H \mathrm{d}x.$$

Finalmente, aplicamos lo precedente f_+ y f_- para obtener el resultado para $f = f_+ - f_-$.

■

Terminamos esta sección con el teorema del cambio de variables en el contexto de la integral de Lebesgue

Teorema 4.17. *Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función lineal invertible.*

1. *Si $f \geq 0$ es medible o si $f \in L^1(F(\Omega))$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{d}x = |\det T| \int_{\mathbb{R}^N} f \circ T(x) \mathrm{d}x.$$

2. *Para cada $E \in \mathcal{B}_L$ se tiene que $\ell(T(E)) = |\det T| \, \ell(E)$.*

Antes de demostrar este teorema, notemos que $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función lineal invertible si y solo si $T \in GL(N, \mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles de $N \times N$ con coeficientes reales. Además, de álgebra lineal se sabe que si $T \in GL(N, \mathbb{R})$, entonces T se puede escribir como una composición finita del siguiente tipo de operadores

- $T_1(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{j+1}, x_j \ldots, x_N)$, $j \in 1, \ldots, N-1$,
- $T_2(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_j + x_k, \ldots, x_N)$, $k \neq j$, y
- $T_3(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, cx_j, \ldots, x_N)$, $c \neq 0$,

que son las matrices elementales que se utilizan en la reducción Gaussiana.

Demostración. Hecha la observación anterior, es suficiente demostrar el teorema solo para T_i, $i = 1, 2, 3$, pues si el teorema es cierto para T y para S, entonces también lo es para $T \circ S$, en efecto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{d}x &= |\det T| \int_{\mathbb{R}^N} f \circ T(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det T|\,|\det S| \int_{\mathbb{R}^N} f \circ T \circ S(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T \circ S)| \int_{\mathbb{R}^N} f \circ (T \circ S)(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para T_1 notar que el enunciado del teorema solo dice que hay que intercambiar el orden de las variables x_j y x_{j+1}, lo que se puede hacer gracias al teorema de Fubini. Además $\det T_1 = -1$.

Para T_2, nuevamente gracias a Fubini, primero podemos integrar respecto a la variable x_j y usar la propiedad en dimensión $N = 1$ de que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones, esto es

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_j = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_j + x_k, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_j,$$

luego la identidad se sigue de integrar respecto al resto de las variables y que $\det T_2 = 1$.

Finalmente, para T_3, nuevamente gracias al resultado en dimensión $N = 1$ de la homogeneindad de grado 1 de la medida de Lebesgue obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_j = |c| \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, cx_j, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_j,$$

y como $\det T_3 = c$ se sigue el resultado al integrar respecto a las demás variables.

La segunda parte del teorema se obtiene al tomar $f = 1_{T(E)}$ pues en este caso $1_{T(E)}(T(x)) = 1_E$

$$\frac{\ell(T(E))}{|\det T|} = \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^N} f\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f \circ T\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} 1_E\mathrm{d}x = \ell(E).$$

■

El teorema anterior se puede generalizar al caso en que $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to T(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^N$ es un difeomorfismo de clase C^1, pero no demostraremos este teorema en este curso.

Teorema 4.18. *Suponga que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto y que $T : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es un difeomorfismo de clase C^1 (es decir, T es invertible, y tanto T como T^{-1} son de clase C^1). Entonces*

1. *Para cada $E \in \mathcal{B}_L$ entonces $T(E) \in \mathcal{B}_L$ y se cumple que $\ell(T(E)) = \int_E |\det DT(x)|\,\mathrm{d}x$.*
2. *Si $f \geq 0$ es medible o si $f \in L^1(T(\Omega))$, entonces*

$$\int_{T(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f \circ T(x)\,|\det DT(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4.3. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Si $\mathcal{C}_i$ es una colección de conjuntos tales que $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$, entonces

$$\bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{B}_i = \sigma(\{C_1 \times \ldots \times C_N : C_i \in \mathcal{C}_i\}).$$

Ejercicio 4.2. Considere $(X, \mathcal{B})$, $(X_i, \mathcal{B}_i)$ espacios medibles para $i = 1, \ldots, N$, y considere $p_i : \prod_{k=1}^{N} X_k \to X_i$, la proyección sobre la i-ésima coordenada.

Demuestre que una función $f : X \to \prod_{k=1}^{N} X_k$ es $\mathcal{B}$-$\otimes_{k=1}^{N}\mathcal{B}_k$ medible si y solo si $p_i \circ f$ es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_i$ medible para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Ejercicio 4.3. Verifique que se tienen las siguientes propiedades:

1. Si $A = A_1 \times A_2$, entonces
$$A_1(a_2) = \begin{cases} A_1 & \text{si } a_2 \in A_2, \\ \varnothing & \text{si } a_2 \notin A_2. \end{cases}$$
y
$$A_2(a_1) = \begin{cases} A_2 & \text{si } a_1 \in A_1, \\ \varnothing & \text{si } a_1 \notin A_1. \end{cases}$$
2. $(A_i(a_j))^c = (A^c)_i(a_j)$.
3. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)_i(a_j) = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)_i(a_j)$.

Ejercicio 4.4. Suponga que $f, g : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles tales que $f = g$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-c.t.p.. Verifique que $f(\cdot, x_2) =_{\mu_1} g(\cdot, x_2)$ y que $f(x_1, \cdot) =_{\mu_2} g(x_1, \cdot)$.

Ejercicio 4.5. Sean $f : (X_1, \mathcal{B}_1) \to \mathbb{R}$ y $g : (X_2, \mathcal{B}_2) \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Considere la función $h : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ definida como $h(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$.

1. Demuestre que h es $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible.
2. Si $f \in L^1(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ y $g \in L^1(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, muestre que $h \in L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ y que
$$\int_{X_1\times X_2} h \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \left(\int_{X_1} f \mathrm{d}\mu_1\right)\left(\int_{X_2} g \mathrm{d}\mu_2\right).$$
Observación: Los espacios $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ son σ-finitos y completos para $i = 1, 2$.

Ejercicio 4.6. Demuestre los Lemas 4.13 y 4.14.

Ejercicio 4.7. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_L, \ell)$ el espacio de medida de Lebesgue, y sea ℓ_e la medida exterior asociada a ℓ, y sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\ell_e(A) = 0$. Considere ahora $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_L^2, \ell^2)$ el espacio Lebesgue en $\mathbb{R}^2$, con ℓ_e^2 la medida exterior asociada a ℓ^2. Muestre que $\ell_e^2(A \times B) = 0$ para todo $B \subseteq \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.8 (Lema de Whitney). Sea $U \subsetneq \mathbb{R}^N$ un abierto. Muestre que U se puede escribir como una unión numerable de cubos cerrados casi disjuntos, esto es

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,$$

donde $C_n = \prod_{i=1}^{N}[a_n, b_n]$ y $\ell(C_n \cap C_m) = 0$ cada vez que $n \neq m$.

Ayuda: Considere el enrejado de $\mathbb{R}^N$ compuesto por $\mathbb{Z}^N$ y sus sucesivas bisecciones.

Ejercicio 4.9. Demuestre que si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ entonces

1. $\inf\{\ell(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\} = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,\ C_n \text{ es un cubo cerrado}\right\}$,
2. $\inf\{\ell(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\} = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,\ C_n \text{ es un cubo abierto}\right\}$.

Ayuda: Recuerde que $\ell((a,b)) = \ell([a,b]) = \ell((a,b])$.

Ejercicio 4.10. Considere ℓ^* la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

1. Muestre que si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y si $r \in \mathbb{R}$ entonces $\ell^*(A + r) = \ell^*(A)$ y $\ell^*(rA) = |r|^N \ell^*(A)$.
2. Concluya que si $A \in \mathcal{B}_L$ entonces $A + r, rA \in \mathcal{B}_L$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Este ejercicio generaliza lo visto en el Ejercicio 1.42.

Ejercicio 4.11. Complete los detalles faltantes en la demostración del Teorema 4.16.

Ejercicio 4.12 (Desigualdad de Minkowski para integrales). Sean $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ espacios de medida σ-finitos y sea $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty)$ una función $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ medible. Si $1 \leq p < \infty$, muestre que

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^p \mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)^p \mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Ejercicio 4.13. Considere el espacio de Lebesgue $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_L, \mathrm{d}x)$ y $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función Lebesgue medible tal que

$$C_g := \int_0^\infty \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x < \infty.$$

Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_L, \mathrm{d}x)$ definimos la función

$$Tf(x) = \int_0^\infty g(xy) f(y) \mathrm{d}y.$$

1. Muestre que $Tf \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_L(\mathbb{R}_+), \mathrm{d}x)$.
2. Lo anterior muestra que $T : L^2 \to L^2$ es un operador bien definido. Muestre que T es lineal y que

$$\|T\| \overset{def}{=} \sup\left\{\|Tf\|_2 : f \in L^2, \|f\|_2 \leq 1\right\} = C_g.$$

Ejercicio 4.14. 1. Verifique que $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}x = +\infty$.

2. Use el teorema de Fubini para demostrar que

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{\operatorname{sen} x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Ayuda: Le puede servir considerar $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} \mathrm{d}y$.

Ejercicio 4.15. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^p(X)$, donde $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito. Para cada $0 \leq t < \infty$ considere el conjunto

$$E_t = \{x \in X : |f(x)| > t\}$$

y defina la medida ν sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ como la única medida que satisface $\nu((a,b]) = \mu(E_a \setminus E_b)$.

1. Verifique que ν está bien definida.

2. Demuestre que si $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es Borel medible, entonces

$$\int_X g \circ f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\infty)} g(s) \mathrm{d}\nu(s).$$

   Ayuda: Muestre primero el resultado para $g(s) = 1_A(s)$ para $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

3. Si $\mathrm{d}t$ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ demuestre que

$$\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = p \int_{[0,\infty)} t^{p-1} \mu(E_t) \mathrm{d}t = \int_{[0,\infty)} s^p \mathrm{d}\nu(s)$$

   vale para todo $p \geq 1$. *Ayuda: Note que $1_{E_t}(x) = 1_{E_x}(t) = 1_E(x,t)$ donde*

$$E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : |f(x)| \geq t\}$$

   y $E_x = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \geq t\}$.

Capítulo 5

Medidas en espacios topológicos

5.1. Medidas regulares

Definición 5.1. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff tales que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$. Diremos que μ es regular si*

1. *Si K es compacto, entonces $\mu(K) < +\infty$.*

2. *μ es regular exterior, esto eso, si $A \in \mathcal{B}$, entonces*

$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \supseteq A}} \mu(U).$$

3. *μ es regular interior, esto eso, si $A \in \mathcal{T}$, entonces*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compacto} \\ K \subseteq A}} \mu(K).$$

Observación 5.1. Una medida Boreliana que es finita sobre los conjuntos compactos, regular exterior y regular interior sobre los abiertos se suele llamar medida de Radon.

Proposición 5.1. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida regular. Entonces para cada $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) < +\infty$*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ compacto}}} \mu(K).$$

Demostración. Es claro que si $K \subseteq A$ entonces $\mu(K) \leq \mu(A)$, luego

$$\mu(A) \geq \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ compacto}}} \mu(K).$$

Para la otra desigualdad, supongamos primero que existe $K_0 \supseteq A$ compacto. Ahora, como la medida es regular tenemos que

$$\mu(K_0 \setminus A) = \inf_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \supseteq K_0 \setminus A}} \mu(U),$$

luego, dado $\varepsilon > 0$, debe existir un abierto $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que $U_0 \supseteq K_0 \setminus A$ y

$$\mu(U_0) \leq \mu(K_0 \setminus A) + \varepsilon.$$

Definamos el compacto $K = K_0 \setminus U_0 = K_0 \cap U_0^c \subseteq K_0 \cap (K_0 \cap A^c)^c = K_0 \cap (K_0^c \cup A) = K_0 \cap A = A$ y notemos que

$$\begin{aligned}
A \setminus K &= A \cap (K_0 \cap U_0^c)^c \\
&= A \cap (K_0^c \cup U_0) \\
&= (A \cap K_0^c) \cup (A \cap U_0) \\
&= A \cap U_0 \\
&\subseteq U_0 \cap (A \cup K_0^c) \\
&\subseteq U_0 \cap (A^c \cap K_0)^c \\
&= U_0 \setminus (K_0 \setminus A)
\end{aligned}$$

y por lo tanto, como las cantidades en cuestión son finitas,

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu(U_0 \setminus (K_0 \setminus A)) = \mu(U_0) - \mu(K_0 \setminus A) \leq \varepsilon,$$

de donde

$$\mu(A) = \mu(A \setminus K) + \mu(A \cap K) \leq \varepsilon + \mu(K),$$

lo que prueba que

$$\mu(A) \leq \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ compacto}}} \mu(K).$$

En general, podemos tomar $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq U_0$ y

$$\mu(U_0) \leq \mu(A) + 1 < +\infty,$$

luego $U_0 \in \mathcal{T}$ y tiene medida finita, por lo tanto, si tomamos $\varepsilon > 0$ debe existir $K_0 \subseteq U_0$ compacto tal que

$$\mu(U_0) \leq \mu(K_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero $A \cap K_0 \subseteq K_0$, entonces podemos aplicar el caso anterior a $A \cap K_0$, es decir para $\varepsilon > 0$ dado existe $K_1 \subseteq A \cap K_0$ compacto tal que

$$\mu(A \cap K_0) \leq \mu(K_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, $K_1 \subseteq A \cap K_0 \subseteq A$ es compacto y

$$\begin{aligned}
A \setminus K_1 &= (A \cap K_1^c \cap K_0) \cup (A \cap K_1^c \cap K_0^c) \\
&= ((A \cap K_0) \setminus K_1) \cup ((A \cap K_1^c) \setminus K_0) \\
&\subseteq ((A \cap K_0) \setminus K_1) \cup (U_0 \setminus K_0),
\end{aligned}$$

de donde

$$\mu(A \setminus K_1) \leq \mu(U_0 \setminus K_0) + \mu((A \cap K_0) \setminus K_1) \leq \varepsilon,$$

y el resultado se sigue. ■

Teorema 5.2. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff tales que*

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$.
- *Existen $(K_n) \subseteq X$ compactos tales que*[1] $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

[1] Si un espacio topológico satisface esta propiedad se dice que es σ-compacto.

- *$\mu(K) < +\infty$ para todo $K \subseteq X$ compacto.*

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. *μ es regular*
2. *Para todo $A \in \mathcal{B}$*
$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \supseteq A}} \mu(U).$$
3. *Para todo $A \in \mathcal{B}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $U \supseteq A$, abierto, tal que*
$$\mu(U \setminus A) \leq \varepsilon.$$
4. *Para todo $A \in \mathcal{B}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq A$, cerrado, tal que*
$$\mu(A \setminus F) \leq \varepsilon.$$

En cualquiera de las afirmaciones anteriores, i.e. si μ es regular, se tiene que
$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compacto} \\ K \subseteq A}} \mu(K)$$
y
$$\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}(X)}.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Directo de la definición.
(2) $\Rightarrow$ (3): Como X es una unión numerable de compactos, entonces μ es σ-finita pues estamos suponiendo que los compactos tienen medida finita, luego debe existir una partición disjunta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ con $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$, luego por (2) deben existir $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ tales que $A \cap A_n \subseteq U_n$ y
$$\mu(U_n) \leq \mu(A \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$
y como $\mu(A \cap A_n) \leq \mu(A_n) < +\infty$ entonces
$$\mu(U_n \setminus (A \cap A_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Notar que
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap A_n)\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus (A \cap A_n),$$
luego
$$\begin{aligned}
\mu\left(\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right] \setminus \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap A_n)\right]\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus (A \cap A_n)\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus (A \cap A_n)) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon 2^{-n} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

en otras palabras, si tomamos el abierto $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y como $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n$ hemos demostrado que

$$\mu(U \setminus A) \leq \varepsilon.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Dado $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{B}$ debe existir $U \supseteq A^c$ tal que

$$\mu(U \setminus A^c) \leq \varepsilon$$

luego podemos tomar $F = U^c$, luego $F \subseteq A$ y

$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap F^c) = \mu(A \cap U) = \mu(U \setminus A^c) \leq \varepsilon.$$

(4) $\Rightarrow$ (1):

Sea $A \in \mathcal{B}$. Si $\mu(A) = +\infty$, luego para todo $U \supseteq A$ abierto, entonces $\mu(U) \geq \mu(A) = +\infty$, por lo tanto

$$\inf_{\substack{U\in\mathcal{T}\\ U\supseteq A}} \mu(U) = +\infty = \mu(A).$$

Si $\mu(A) < +\infty$, tomemos $\varepsilon > 0$, luego existe $F \subseteq A^c$ cerrado tal que

$$\mu(A^c \setminus F) \leq \varepsilon.$$

En otras palabras, si tomamos $U = F^c$, tenemos que $A \subseteq U$ y como $\mu(A) < +\infty$

$$\mu(U \setminus A) = \mu(U) - \mu(A) \leq \varepsilon,$$

es decir

$$\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

de donde

$$\inf_{\substack{U\in\mathcal{T}\\ U\supseteq A}} \mu(U) \leq \mu(A).$$

Como la otra desigualdad es evidente, entonces μ es regular exterior.

Probemos ahora que si $A \in \mathcal{B}$, entonces

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compacto}\\ K\subseteq A}} \mu(K).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $F \subseteq A$ cerrado tal que

$$\mu(A \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

consideremos los compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, y definamos

$$C_n = \bigcup_{j=1}^{n} K_n \cap F.$$

Luego $C_n \subseteq A$, C_n es compacto y $C_n \nearrow F$, en consecuencia la continuidad de la medida nos dice que

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Si $\mu(F) = +\infty$, entonces $\mu(A) = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = +\infty$, por lo tanto

$$\sup_{\substack{K \text{ compacto} \\ K\subseteq A}} \mu(K) \geq \mu(C_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si $\mu(F) < +\infty$ notemos que $A = F \cup (A \setminus F)$, luego

$$\mu(A) = \mu(F) + \mu(A \setminus F) \leq \mu(F) + \varepsilon.$$

Sin embargo, como $\mu(C_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(F) < +\infty$, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(C_{n_0}) \geq \mu(F) - \frac{\varepsilon}{2}$, de donde obtenemos que

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(C_{n_0}) + \varepsilon \leq \sup_{\substack{K \text{ compacto} \\ K\subseteq A}} \mu(K) + \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración.

Finalmente, veamos que $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}(X)}$. Sea $A \in \mathcal{B}$, luego de las equivalencias anteriores, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir un abierto U_n y un cerrado F_n que satisfacen: $F_n \subseteq A \subseteq U_n$ y

$$\mu(U_n \setminus A) \leq \frac{1}{n}, \quad \mu(A \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}.$$

De aquí obtenemos que

$$\mu(U_n \setminus F_n) = \mu((U_n \setminus A) \cup (A \setminus F_n)) \leq \frac{2}{n},$$

por lo que si definimos

$$G_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n, \quad F_\sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

entonces $G_\delta, F_\sigma \in \mathcal{B}(X)$ y $G_\delta \setminus F_\sigma \subseteq U_n \setminus F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\mu(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0,$$

y además $F_\sigma \subseteq A$, por lo tanto $A = F_\sigma \cup (A \setminus F_\sigma) \subseteq F_\sigma \cup (G_\delta \setminus F_\sigma)$. En otras palabras, A es la unión de un conjunto $F_\sigma \in \mathcal{B}$ y $A \setminus F_\sigma$, que es μ-despreciable respeto a $\mathcal{B}(X)$. ∎

Corolario 5.3. $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L, \ell)$ *es un espacio de medida regular.*

Demostración. Como los compactos son conjuntos acotados en $\mathbb{R}^N$, es claro que todo compacto tiene medida finita y que $\mathbb{R}^N$ es σ-compacto. Veamos que

$$\ell(A) = \inf_{\substack{A\subseteq U \\ U \text{ abierto}}} \ell(U),$$

para todo $A \in \mathcal{B}_L$. Denotamos por $\nu(A) = \inf \{\ell(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\}$ y notamos que para cada abierto $U \supseteq A$ se tiene que

$$\ell(A) \leq \ell(U),$$

y por tanto

$$\ell(A) \leq \nu(A).$$

Ahora, si suponemos que $\ell(A) < \infty$ y para $\varepsilon > 0$, entonces existe $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$, $R_n = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i]$ de modo que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(R_n) \leq \ell(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cada rectángulo R_n se puede agrandar de modo obtener un rectángulo abierto $\tilde{R}_n = \prod_{i=1}^{N}(a_i, \tilde{b}_i)$ con $b_i < \tilde{b}_i$ tal que

$$\ell(\tilde{R}_n) \leq \ell(R_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La σ-sub-aditividad de ℓ nos garantiza que

$$\ell(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{R}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\tilde{R}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(R_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell(A) + \varepsilon,$$

y por lo tanto, como $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{R}_n$ que es abierto, entonces

$$\nu(A) \leq \ell(A) + \varepsilon,$$

y la desigualdad se sigue recordando que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. Gracias al teorema anterior se sigue que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L, \ell)$ es un espacio de medida regular. ■

Proposición 5.4. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida regular sobre un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y σ-compacto. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Observación 5.2. Un espacio localmente compacto que verifica el segundo axioma de numerabilidad es σ-compacto.

Demostración. Ejercicio. ■

Corolario 5.5. *Si $1 \leq p < \infty$ tenemos que $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_L, \ell)$.*

Proposición 5.6. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea μ una medida finita sobre los Borelianos de X. Entonces μ es una medida de Radon.*

Demostración. Ejercicio. ■

5.2. El teorema de representación de Riesz-Markov

A lo largo de este capítulo, trabajaremos en $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. El propósito final de esta unidad es encontrar espacios de medida en este tipo de espacios tales que la medida sea Boreliana y regular. Para ello consideramos el espacio

$$C_c(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y tiene soporte compacto}\}$$

y funcionales lineales positivos sobre $C_c(X)$, esto es, funciones de la forma $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ que son lineales y satisfacen

$$f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0.$$

A modo de ejemplo, consideremos $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida Boreliano tal que $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subseteq X$ compacto. Bajo estas condiciones es claro que $C_c(C) \subseteq L^1(X)$ y que además el funcional $L_\mu : C_c(X) \to \mathbb{R}$ definido como

$$L_\mu(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

es un operador lineal positivo. El teorema principal de este capítulo dice que *cualquier* operador lineal positivo ha de ser de esta forma, en el sentido de que si L es un operador lineal positivo sobre $C_c(X)$, entonces existe un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ regular (ver Definición 5.1) y

$$L(f) = L_\mu(f) \quad \forall f \in C_c(X).$$

Antes de enunciar el teorema, hacemos la siguiente

Definición 5.2. *Dado $U \subseteq X$ abierto y $f \in C_c(X)$ decimos que $f \prec U$ si se satisfacen las siguientes condiciones*

- $\operatorname{supp} f \subseteq U$, *y*
- $0 \leq f \leq 1_U$.

Teorema 5.7 (Teorema de representación de Riesz-Markov)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y sea $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una σ-álgebra $\mathcal{B}$ que contiene a los Borelianos de X y una única medida $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ tal que*

1. *μ es finita sobre los compactos de X,*
2. *μ es regular exterior en $\mathcal{B}$ y regular interior en $\mathcal{T}$,*
3. *La σ-álgebra $\mathcal{B}$ es completa, y*
4. $$L(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in C_c(X).$$

Demostración. Haremos la demostración de este teorema en varios pasos.

I. Unicidad de μ. Consideremos dos medidas μ_1 y μ_2 que satisfacen las consecuencias del teorema, y veamos que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para todo compacto $K \subseteq X$. Sea $K \subseteq X$ un compacto, como μ_1 es regular, dado $\varepsilon > 0$ ha de existir $U \supseteq K$ abierto tal que

$$\mu_1(U) \leq \mu_1(K) + \varepsilon,$$

ahora, gracias al lema de Urysohn para espacios Hausdorff localmente compactos, existe una función $f \in C_c(X)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ si $x \in K$ con $\operatorname{supp} f \subseteq U$ (ver por ejemplo [9, Theorem 2.12]) de acuerdo a nuestra definición, esto significa que $f \prec U$ y además se satisface que $1_K \leq f$. Ahora, como las medidas satisfacen $L = L_{\mu_1} = L_{\mu_2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_2(K) &= \int_X 1_K \mathrm{d}\mu_2 \\
&\leq \int_X f \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \int_X f \mathrm{d}\mu_1 \\
&\leq \int_X 1_U \mathrm{d}\mu_1 \\
&= \mu_1(U) \\
&\leq \mu_1(K) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

y como lo anterior vale para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que

$$\mu_2(K) \leq \mu_1(K),$$

y por la simetría del argumento, concluimos que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para cualquier K compacto en X. Por la regularidad de las medidas, concluimos que $\mu_1(U) = \mu_2(U)$ para todo abierto U, y *a fortiori* en todo conjunto medible.

II. Definición de μ. Primero vamos a definir μ sobre los abiertos de X de la siguiente forma

$$\mu(U) = \sup\{L(f) : f \prec U\}, \tag{5.1}$$

y notemos que si $U_1 \subseteq U_2$ y si $f \prec U_1$ entonces $f \prec U_2$, luego $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$. Lo anterior nos permite extender μ a todo $\mathcal{P}(X)$ como

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \in \mathcal{T}\},$$

pues se satisface que $\mu(U) = \mu^*(U)$ para todo $U \in \mathcal{T}$.

Veamos que μ^* es una medida exterior. Claramente $\mu^*(\varnothing) = 0$ y como μ es monótona sobre los abiertos, entonces μ^* también ha de serlo. Solo nos queda ver la σ sub-aditividad. Supongamos primero que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con U_n abierto y demostremos que

$$\mu(U) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$

Sea $f \prec U$ y sea $K = \operatorname{supp} f$ que es compacto y $K \subseteq U$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{n=1}^N U_n$. Consideremos $g_1, \ldots, g_N$ una partición de la unidad (ver por ejemplo [9, Theorem 2.13]) subordinada al cubrimiento $\bigcup_{n=1}^N U_n$, esto es

- $g_n \in C_c(U_n) \subseteq C_c(X)$, y
- $\sum_{n=1}^N g_n = 1$.

Gracias a la partición de la unidad y la linealidad de L, podemos escribir $f = \sum_{n=1}^N f g_n$ y

$$L(f) = \sum_{n=1}^N L(f g_n),$$

como $f g_n \prec U_n$ tenemos que $L(f g_n) \leq \mu(U_n)$, y por tanto

$$L(f) \leq \sum_{n=1}^N \mu(U_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$

Dado que la desigualdad anterior vale para todo $f \prec U$ concluimos que

$$\mu(U) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$

Como consecuencia de la desigualdad anterior obtenemos que

$$\text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \in \mathcal{T}\} = \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n) : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,\ U_n \in \mathcal{T}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

y gracias al Ejercicio 1.31 concluimos que μ^* es una medida exterior.

Ahora que tenemos una medida exterior, consideramos $\mathcal{B}$ como la σ-álgebra de Caratheodory asociada de μ^* (que sabemos es completa gracias al Teorema 1.21) y la medida μ es la restricción de μ^* a $\mathcal{B}$. Para poder concluir necesitamos que:

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$,
- μ es finita sobre los compactos de X,
- μ es regular exterior y regular interior sobre los abiertos, y
- $L = L_\mu$.

III. Los abiertos son medibles. Si $A \subseteq X$ es tal que $\mu^*(A) < +\infty$, debemos demostrar que si $U \in \mathcal{T}$ entonces

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Supongamos primero que $A \in \mathcal{T}$, luego $A \cap U \in \mathcal{T}$ es μ-finito y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ debe existir $f \prec A \cap U$ tal que

$$\mu(A \cap U) \leq L(f) + \varepsilon.$$

Sea $K = \operatorname{supp} f$, luego $A \cap K^c \in \mathcal{T}$ es también μ-finito y por lo tanto debe existir $g \prec A \cap K^c$ tal que

$$\mu(A \cap K^c) \leq L(g) + \varepsilon.$$

Con lo anterior tenemos que $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$ y por lo tanto

$$\operatorname{supp}(f + g) = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subseteq (A \cap U) \cup (A \cap K^c) \subseteq A$$

y además $f + g \in [0, 1]$, en otras palabras $f + g \prec A$, y por lo tanto

$$\mu(A) \geq L(f + g) = L(f) + L(g) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) - 2\varepsilon$$

lo que nos da la desigualdad deseada pues $\mu^* = \mu$ sobre los abiertos. Ahora si $A \subseteq X$ es arbitrario y si $\mu^*(A) < \infty$ entonces por definición, dado $\varepsilon > 0$ debe existir $V \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq V$ y $\mu^*(V) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$, pero de lo anterior y de la monotonía de μ^* tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \mu^*(V) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que demuestra que $U \in \mathcal{B}$.

IV. μ es regular exterior. Notar que de la definición tenemos inmediatamente que

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf \{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \in \mathcal{T}\},$$

para todo $A \in \mathcal{B}$, es decir μ es regular exterior.

V. μ es finita sobre los compactos. Sea K un compacto en X y sea $U \supseteq K$ un abierto tal que $\overline{U}$ es compacto en X (ver [9, Theorem 2.7]) luego podemos construir una función $f \in C_c(X)$ tal que $f(x) = 1$ si $x \in K$ y $f(x) = 0$ si $x \in U^c$ donde además $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ (ver [9, Theorem 2.12]). Sea ahora $V = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\right\}$ que es abierto y satisface $K \subseteq V$, luego

$$\mu(K) \leq \mu(V)$$

y por otra parte, si $g \prec V$ entonces $g \leq 1_V \leq 2f$. Por lo tanto, como L es positivo se cumple que

$$0 \leq L(2f - g) \Rightarrow L(g) \leq 2L(f)$$

lo que implica que
$$\mu(K) \leq \mu(V) = \sup\{L(g) : g \prec V\} \leq 2L(f) < \infty.$$

VI. μ es regular interior. Debemos probar que si $U \in \mathcal{T}$ entonces

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \text{ compacto}\}$$

Sea $U \in \mathcal{T}$. Si $\mu(U) = 0$ entonces es evidente que

$$0 \leq \sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \text{ compacto}\} \leq \mu(0) = 0,$$

luego basta probar el resultado para $U \in \mathcal{T}$ tal que $\mu(U) > 0$. Como

$$\mu(U) = \sup\{L(f) : f \prec U\}$$

entonces para todo $0 < \alpha < \mu(U)$ debe existir $f \prec U$ tal que $L(f) \geq \alpha$. Sea $K = \operatorname{supp} f$ y consideremos $V \supseteq K$ un abierto, entonces

- $L(f) \leq \mu(V)$, pues $f \prec V$,
- $L(f) \leq \mu(K) = \inf\{\mu(V) : K \subseteq V,\ V \in \mathcal{T}\}$, y
- $\alpha \leq L(f) \leq \mu(K) \leq \mu(U)$, pues $K \subseteq U$ y $U \in \mathcal{T}$.

Como lo anterior vale para todo $\alpha < \mu(U)$ y, como $\sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \text{ compacto}\} \leq \mu(U)$, concluimos que
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \text{ compacto}\}.$$

VII. μ representa al funcional L. Finalmente, debemos demostrar que

$$L(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

para todo $f \in C_c(X)$. Primero notemos que, gracias a la linealidad de L y de la integral, basta probar el resultado para $f \in C_c(X)$ tal que $f(x) \geq 0$, pues si $f \in C_c(X)$ podemos escribir $f = f_+ - f_-$ con $f_+, f_- \in C_c(X)$ y $f_+, f_- \geq 0$. Además, dada $f \in C_c(X)$ con $f \geq 0$, entonces existe $M > 0$ tal que $0 \leq \tilde{f} = \frac{1}{M} f \leq 1$, y nuevamente por la linealidad de L y de la integral, solo debemos probar el resultado para $\tilde{f}$.

Supongamos entonces que $f \in C_c(X)$ satisface $0 \leq f \leq 1$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, n$ consideremos las funciones continuas (ver Ejercicio 5.6)

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \geq \dfrac{k}{n}, \\ nf(x) - k + 1 & \text{si } \dfrac{k-1}{n} \leq f(x) < \dfrac{k}{n}, \\ 0 & \text{si } f(x) < \dfrac{k-1}{n}, \end{cases} \tag{5.2}$$

y notemos que si para cada $x \in X$ entonces

- si $f(x) = 0$ se tiene que $f_k(x) = 0$ para todo k,

- si $\frac{k_0-1}{n} \leq f(x) < \frac{k_0}{n}$ para algún $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ entonces si $k \leq k_0 - 1$ entonces $\frac{k}{n} \leq \frac{k_0-1}{n} \leq f_k(x)$ luego $f_k(x) = 1$. De manera similar, si $k \geq k_0 + 1$ entonces $f_k(x) < \frac{k_0}{n} \leq \frac{k-1}{n}$ por lo tanto $f_k(x) = 0$. Lo anterior nos dice que podesmo escribir

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq k_0 - 1, \\ nf(x) - k_0 + 1 & \text{si } k = k_0, \\ 0 & \text{si } k_0 + 1 \leq k \leq n, \end{cases}$$

y en cualquier caso notamos que

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{k_0} + \sum_{k=1}^{k_0-1} f_k + \sum_{k=k_0+1}^{n} f_k = nf(x).$$

Ahora, para cada $k = 1, \dots, n$ consideremos los conjuntos compactos $K_k = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{k}{n}\right\}$ y $K_0 =$ $\operatorname{supp} f$, que satisfacen $K_k \subseteq K_{k-1}$ y nos permite escribir

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_k, \\ nf(x) - k + 1 & \text{si } x \in K_{k-1} \setminus K_k, \\ 0 & \text{si } x \in K_{k-1}^c, \end{cases}$$

de donde es claro que $1_{K_k} \leq f_k \leq 1_{K_{k-1}}$ y en consecuencia

$$\mu(K_k) \leq \int_X f_k \mathrm{d}\mu \leq \mu(K_{k-1}). \tag{5.3}$$

Veamos que también se satisface

$$\mu(K_k) \leq L(f_k) \leq \mu(K_{k-1}). \tag{5.4}$$

En efecto, como $0 \leq f_k \leq 1_{K_{k-1}}$, entonces para cualquier abierto $U \supseteq K_{k-1}$ se cumple que $f \prec U$ y por lo tanto $L(f_k) \leq \mu(U)$. Como esto es válido para todo abierto $U \supseteq K_{k-1}$ concluimos que

$$L(f_k) \leq \operatorname{ínf}\{\mu(U) : U \supseteq K,\ U \in \mathcal{T}\} = \mu(K_{k-1}).$$

Por otra parte, para cada $0 < \varepsilon < 1$ consideramos el conjunto abierto

$$V_\varepsilon = \{x \in X : f_k(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

Si $g \in C_c(X)$ es tal que $g \prec V_\varepsilon$ entonces $g \leq \frac{1}{1-\varepsilon} f_k$ y por lo tanto $L(g) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} L(f_k)$. Pero como V_ε es abierto, podemos calcular $\mu(V_\varepsilon)$ usando y (5.1) obtenemos que

$$\mu(V_\varepsilon) = \sup\{L(g) : g \prec V_\varepsilon\} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} L(f_k).$$

Como además $1_{K_k} \leq f_k$ tenemos que $K_k \subseteq V_\varepsilon$ y la monotonía de μ nos dice que

$$\mu(K_k) \leq \mu(V_\varepsilon) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} L(f_k)$$

lo que al hacer ε tender a 0 demuestra la otra desigualdad en (5.4) .

Si juntamos (5.3) y (5.4) obtenemos que

$$\left|\int_X f_k \mathrm{d}\mu - L(f_k)\right| \leq \mu(K_{k-1}) - \mu(K_k),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \mathrm{d}\mu - L(f)\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_X f_k \mathrm{d}\mu - L(f_k)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_X f_k \mathrm{d}\mu - L(f_k)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mu(K_{k-1}) - \mu(K_k)) \\
&= \frac{1}{n}(\mu(K_0) - \mu(K_n)) \\
&= \frac{1}{n}\mu(K_0)
\end{aligned}$$

pero como $K_0 = \operatorname{supp} f$ es compacto, entonces $\mu(K_0) < \infty$, y por lo tanto, al pasar al límite $n \to \infty$ obtenemos lo deseado. ■

5.3. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Demuestre el Proposición 5.4. *Ayuda: Note que basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{B}$ existe $g \in C_c(X)$ tal que $\|1_A - g\|_p \leq \varepsilon$.*

Ejercicio 5.2 (Teorema de Lusin). Sea $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces existe un conjunto medible $A \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mu(A) < \varepsilon,$$

y $f1_{A^c}$ es continua.

Ejercicio 5.3. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida regular y $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Muestre que la medida

$$\nu(E) = \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$$

es una medida regular. Para ello

1. Demuestre el resultado suponiendo que μ es finita. *Ayuda: Use el Ejercicio 3.8.*

2. Generalice lo anterior al caso de que μ es σ-finita.

3. Concluya. *Ayuda: Note que $\nu(A) = \nu(A \cap \{x \in X : |f(x)| > 0\})$ y considere los conjuntos $X_n = \left\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$*

Ejercicio 5.4. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ un espacio de **medida finita** sobre los borelianos de $\mathbb{R}$. El propósito de este ejercicio es demostrar que μ es regular. Para ello

1. Muestre que si $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y si $R = (a, b]$ (entendiendo que $(a, \infty] = (a, \infty)$), entonces

$$\mu(R) = \inf_{\substack{U \supseteq R \\ U \text{ abierto}}} \mu(U).$$

2. Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, muestre que para cada $\varepsilon > 0$ existen $R_k = (a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, tales que

$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R_k).$$

Ayuda: Recuerde los teoremas de Carathéodory y Hahn relativo a extensiones y unicidad de medidas.

3. Concluya.

Ejercicio 5.5. Demuestre la Proposición 5.6. Para ello defina

$$\mathcal{B}' = \{A \in \mathcal{B} : \forall \varepsilon > 0 \text{ existen } O \supseteq A \text{ abierto y } F \subseteq A \text{ cerrado tales que } \mu(O \setminus F) < \varepsilon\}.$$

1. Muestre que $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra.

2. Muestre que si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $O_n := \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}^{\dagger}$ es un conjunto abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $O_n \searrow F$.

3. Muestre que si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $F \in \mathcal{B}'$. Concluya que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

4. Demuestre que μ es regular exterior y regular interior..

Ejercicio 5.6. Muestre que las funciones f_k definidas en (5.2) son continuas y que tienen soporte compacto en X.

Ejercicio 5.7. Para $f \in C_c(\mathbb{R})$ denotamos la integral de Riemann de f como $R\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}x$.

1. Muestre que $L : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definido como

$$L(f) = R\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}x$$

es un funcional lineal positivo.

2. Si ℓ denota la medida de Lebesgue y si μ_L es la medida de Riesz-Markov asociada el funcional L, muestre que $\mu_L(A) = \ell(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

3. Concluya que

$$R\int_a^b f \mathrm{d}x = \int_a^b f \mathrm{d}\ell$$

para todo f acotada y Riemman integrable en el intervalo acotado $[a, b]$. *Ayuda: Muestre primero que si $f = 1_{(c,d)}$ con $(c, d) \subseteq [a, b]$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in C_c((a, b))$ tal que* $0 \leq g \leq 1$ *y*

$$R\int_a^b |f - g| \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Comparar con el Ejercicio 2.27.

†Recuerde que si $Y \subseteq X$ entonces

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}.$$

Capítulo 6

Medidas con signo y el teorema de Radon-Nykodym

6.1. Medidas con signo

Hasta ahora hemos trabajado con funciones de conjuntos $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, y cuando éstas son σ-aditivas, entonces las denominamos medidas. Sin embargo, nada impide de hacer una teoría sobre funciones σ-aditivas a valores reales, no necesariamente no-negativos.

Definición 6.1. *Dado un espacio medible $(X, \mathcal{B})$, decimos que $\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida con signo si*

- $\nu(A) \in (-\infty, \infty]$ *ó* $\nu(A) \in [-\infty, \infty)$ *para todo* $A \in \mathcal{B}$,
- $\nu(\varnothing) = 0$, *y*
- ν *es σ-aditiva.*

Al trío $(X, \mathcal{B}, \nu)$ lo llamaremos espacio de medida con signo.

Ejemplo 6.1.

- Sean μ_1, μ_2 medidas (positivas) donde al menos una de las dos es finita. Entonces

$$\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$$

es una medida con signo.

- Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita, y sea f una función medible tal que $f_+ \in \mathcal{L}^1$ o $f_- \in \mathcal{L}^1$, entonces

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

es una medida con signo en $(X, \mathcal{B})$.

Lema 6.1. *Sea $A \subseteq B$ conjuntos medibles. Si $|\nu(B)| < \infty$ entonces $|\nu(A)| < \infty$.*

Demostración. Sin perder generalidad supongamos que $\nu > -\infty$. Pero por la aditividad de ν podemos escribir

$$\nu(B) = \nu(B \setminus A) + \nu(A)$$

entonces la única posibilidad para que $\nu(B)$ sea finito es que tanto $\nu(B \setminus A)$ como $\nu(A)$ sean finitos. ∎

Observación 6.1. Notar que no necesariamente se cumple que $A \subseteq B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B)$.

Proposición 6.2 (Continuidad).

- *Si* $A_n \nearrow A$ *entonces* $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$.
- *Si* $A_n \searrow A$ *y* $\nu(A_1) \in \mathbb{R}$ *entonces* $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$

Demostración. Solo haremos la primera parte, la segunda se deja como ejercicio al lector.

Si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $A_{n-1} \subseteq A_n$ podemos escribir $A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \sqcup A_{n-1}$ y por lo tanto

$$\nu(A_n) = \nu(A_n \setminus A_{n-1}) + \nu(A_{n-1}),$$

como esto vale para todo n concluimos por inducción que

$$\nu(A_N) = \nu(A_1) + \sum_{n=2}^{N} \nu(A_n \setminus A_{n-1}),$$

y si definimos $A_0 = \varnothing$ entonces

$$\nu(A_N) = \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n \setminus A_{n-1}),$$

pero como $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n-1}$, de la σ-aditividad de ν obtenemos que

$$\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \nu(A_N),$$

lo que demuestra el resultado. ■

Lema 6.3. *Si ν es una medida con signo y si $\left|\nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right| < \infty$ entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\nu(A_n)|$$

es convergente.

Demostración. Sin perder generalidad supondremos que $\nu(A) > -\infty$ para todo $A \in \mathcal{B}$. Definamos

$$A_n^+ = \begin{cases} A_n & \text{si } \nu(A_n) \geq 0, \\ \varnothing & \text{si } \nu(A_n) < 0 \end{cases}$$

y

$$A_n^- = \begin{cases} A_n & \text{si } \nu(A_n) \leq 0, \\ \varnothing & \text{si } \nu(A_n) > 0. \end{cases}$$

Luego las series

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\pm}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n^{\pm}),$$

convergen en $\overline{\mathbb{R}}$ pues consisten solo de términos del mismo signo, mas aún, la serie que consiste de los términos no-positivos debe ser finita pues ν no alcanza el valor $-\infty$. Finalmente, tenemos que

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n^+) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n^-),$$

pero como el lado izquierdo es finito, la única posibilidad es que la serie de los valores no-negativos también sea finita, y por lo tanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\nu(A_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n^+) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n^-)$$

es finita. ■

Definición 6.2. *Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de medida con signo. Diremos que $A \in \mathcal{B}$ es un conjunto positivo (respectivamente negativo) para ν si para todo $B \subseteq A,\ B \in \mathcal{B}$ se cumple que*

$$\nu(B) \geq 0 \text{ (respectivamente } \nu(B) \leq 0).$$

Un conjunto se dice despreciable si es positivo y negativo a la vez.

Lema 6.4. *Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ conjuntos positivos (respectivamente negativos, despreciables). Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conjunto positivo (respectivamente negativo,despreciable).*

Demostración. Sea $B \subseteq A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

donde

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

Por lo tanto

$$B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap B_n$$

de donde se obtiene que

$$\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B \cap B_n),$$

pero $B \cap B_n \subseteq A_n$ luego como A_n es positivo (respectivamente negativo, despreciable) entonces $\nu(B \cap B_n) \geq 0$ (respectivamente ≤ 0, $= 0$), de donde se concluye el resultado. ■

Teorema 6.5 (Teorema de descomposición de Hahn)**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de medida con signo. Entonces existen un conjunto positivo P y un conjunto negativo N tales que $X = P \sqcup N$.*

Más aún, si existe otro conjunto positivo P' y otro conjunto negativo N' tales que $X = P' \sqcup N'$, entonces $P \Delta P'$ y $N \Delta N'$ son despreciables.

Demostración. Sin perder generalidad supondremos que $\nu > -\infty$. Definamos

$$\mathcal{I} = \inf \{\nu(A) : A \in \mathcal{B},\ \text{A es negativo}\},$$

notemos que $\mathcal{I} \leq 0$ pues $A = \varnothing$ es un conjunto negativo y $\nu(\varnothing) = 0$. De la definición de $\mathcal{I}$ podemos encontrar una sucesión de conjuntos negativos A_n tales que

$$\nu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}.$$

Si definimos $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces $\nu(A) = \mathcal{I}$ por la continuidad de la medida con signo ν. Notemos además que gracias al Lema 6.4 el conjunto N es negativo.

Veamos que $P = N^c$ es un conjunto positivo. En caso de no serlo, ha de existir $B \subseteq P$ tal que $\nu(B) < 0$. Si B es un conjunto negativo, entonces $N \cup B$ es un conjunto negativo y

$$\nu(N \cup B) = \nu(N) + \nu(B) < \mathcal{I}$$

lo que es una contradicción con la definición de ínfimo. En consecuencia B no puede ser un conjunto negativo, es decir, existen un subconjunto $C \subseteq B$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$\nu(C) \geq \frac{1}{k},$$

lo que implica que si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m \geq k$ entonces $\nu(C) \geq \frac{1}{m}$, y por tanto podemos definir

$$k_1 := \min\left\{k \in \mathbb{N} : \text{ existe } C \subseteq B \text{ tal que } \mu(C) \geq \frac{1}{k}\right\} \leq k.$$

Denotamos $C_1 \subseteq B$ a un conjunto tal que $\nu(C_1) \geq \frac{1}{k_1}$, y observamos que como $-\infty < \nu(B) < 0$ entonces por el Lema 6.1 tenemos que $\nu(C_1)$ es finito y por tanto

$$\nu(B) = \nu(B \setminus C_1) + \nu(B_1) \Rightarrow \nu(B \setminus C_1) = \nu(B) - \nu(C_1) \leq \nu(B) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Si denotamos por $B_1 := B$ entonces el conjunto $B_2 := B_1 \setminus C_1$ satisface entonces que $B_2 \subseteq B_1 \subseteq A^c$ y $\nu(B_2) < 0$, y por tanto podemos repetir el argumento precedente. En caso de que B_2 sea negativo, entonces llegamos a la contradicción deseada, de lo contrario podemos encontrar $C_2 \subseteq B_2$ y $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $B_3 = B_2 \setminus C_2 \subseteq B_2$ satisface $\nu(B_3) \leq \nu(B_2) - \frac{1}{k_2}$.

Si seguimos de manera inductiva este proceso, o bien encontramos un $B_n \subseteq B$ que es negativo y se obtiene la contradicción, o bien obtenemos conjuntos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ y enteros $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

- $B_1 = B$,
- $C_n \subseteq B_n$,
- $k_n := \min\left\{k \in \mathbb{N} : \text{ existe } C \subseteq B_n \text{ tal que } \mu(C) \geq \frac{1}{k}\right\}$, y
- $B_{n+1} = B_n \setminus C_n = B \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k$ satisface

$$\nu(B_{n+1}) \leq \nu(B_n) - \frac{1}{k_{n+1}} < 0.$$

Notar que los conjuntos C_n son disjuntos entre si, pues $C_{n+1} \subseteq B_{n+1} = B_n \setminus C_n$, por lo tanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(C_n) = \nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right),$$

pero como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq B$ y $\nu(B)$ es finita se tiene que $\nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$ también ha de serlo gracias al Lema 6.1. Por lo tanto se debe cumplir que $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Definimos

$$B_\infty = \lim_{n\in\mathbb{N}} B_n = B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,$$

y observamos que B_∞ es negativo. En efecto, notemos que si $D \subseteq B_\infty$ entonces $D \subseteq B \setminus \bigcup_{n=1}^{N} C_n = B_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$ entonces

$$\nu(D) < \frac{1}{k_N - 1}, \tag{6.1}$$

pues de lo contrario se tendría que $D \subseteq B_N$ y $\nu(D) \geq \frac{1}{k_N - 1}$ lo que contradice la definición de k_N. En consecuencia, como (6.1) vale para todo N tenemos que $\nu(D) \leq 0$, lo que concluye la demostración.

Finalmente, si P' y N' son otra descomposición de X, entonces $P \setminus P' \subseteq P$ y como P es un conjunto positivo, entonces $P' \cap P$ también es positivo. Por otra parte $P \cap P' \subseteq N'$ y como N' es un conjunto negativo, entonces $P \setminus P'$ también es negativo. En conclusión $P \setminus P'$ es un conjunto despreciable. El mismo argumento aplica para $P' \setminus P$, $N \setminus N'$ y $N' \setminus N$. ■

Definición 6.3. *Dadas dos medidas con signo $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, decimos que ν_1 y ν_2 son mutuamente singulares si existen $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ tales que*

- $X = A_1 \sqcup A_2$,
- A_1 *es ν_2-despreciable, y*
- A_2 *es ν_1-despreciable.*

Denotamos por $\nu_1 \perp \nu_2$ a dos medidas mutuamente singulares.

Observación 6.2. Informalmente se suele decir que ν_i está *soportada* en A_i, $i = 1, 2$.

Teorema 6.6 (Teorema de descomposición de Jordan)**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de medida con signo. Entonces existe un único par de medidas (positivas) $\nu^+, \nu^- : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ tales que*

- $\nu = \nu^+ - \nu^-$,
- $\nu^+ \perp \nu^-$.

Mas aún, al menos una de las dos medidas es finita. En caso de que ν sea finita (respectivamente σ-finita), ν^+ y ν^- también son finitas (respectivamente σ-finitas).

Demostración. Sea $X = P \sqcup N$ la descomposición de Hahn, y definamos

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P),$$
$$\nu^-(A) = -\nu(A \cap N).$$

Claramente $\nu = \nu^+ - \nu^-$ pues ν es aditiva, además $\nu^+ \perp \nu^-$ pues si $A \subseteq N$ entonces $\nu^+(A) = \nu(A \cap P) = 0$, y de manera similar si $B \subseteq P$ entonces $\nu^-(B) = 0$.

Ahora si $\nu = \tilde{\nu}^+ - \tilde{\nu}^-$ con $\tilde{\nu}^+ \perp \tilde{\nu}^-$ entonces existen P', N' tales que $X = P' \sqcup N'$, P' es $\tilde{\nu}^-$ despreciable y N' es $\tilde{\nu}^+$ despreciable. Esto implica que si $A \subseteq P'$ y $B \subseteq N'$ entonces

$$\nu(A) = \tilde{\nu}^+(A) \geq 0,$$
$$\nu(B) = -\tilde{\nu}^-(B) \leq 0,$$

es decir, P' es positivo y N' es negativo. En consecuencia P', N' es otra descomposición de Hahn de X y por el Teorema 6.5 concluimos que $\nu(P \Delta P') = \nu(N' \Delta N) = 0$ y por lo tanto si $A \in \mathcal{B}$ tenemos que

$$\tilde{\nu}^+(A) = \tilde{\nu}^+(A \cap P') = \nu(A \cap P') = \nu(A \cap P' \cap P) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A),$$

y similarmente $\tilde{\nu}^-(A) = \nu^-(A)$.

Finalmente si suponemos que $\nu > -\infty$ entonces $\nu^-(X) = -\nu(X \cap P) < \infty$, por lo tanto ν^- es finita. Que ν^+ y ν^- sean finitas (respectivamente σ-finitas) si ν lo es se deja como ejercicio al lector. ■

Definición 6.4. *Dada una medida con signo ν, definimos la variación total de la ν como la medida $|\nu|$ definida como*

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

Definición 6.5. *Dadas dos medidas con signo μ y ν, decimos que ν es absolutamente continua respecto de μ si para todo conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $|\mu|(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$. Denotamos esta relación como $\nu \ll \mu$.*

Lema 6.7. *Son equivalentes*

1. *$\nu \ll \mu$.*
2. *$\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.*
3. *$|\nu| \ll |\mu|$.*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 6.8. *Sea ν una medida con signo finita y sea μ una medida con signo tales que $\nu \ll \mu$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{B}$ satisface $|\mu|(A) < \delta$ entonces $|\nu|(A) < \varepsilon$.*

Demostración. Argumentemos por contradicción y supongamos que existe $\varepsilon > 0$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto medible A_n tal que $|\nu|(A_n) > \varepsilon$ y $|\mu|(A_n) < \frac{1}{2^n}$. Si definimos

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

tenemos que

$$|\mu|(A) \leq \sum_{k\geq n} |\mu|(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

y por lo tanto $|\mu|(A) = 0$. Pero

$$|\nu|(A_n) = \lim_{n\to\infty} |\nu| \left(\bigcup_{k\geq n} A_n \right) \geq \limsup_{n\to\infty} |\nu|(A_n) > \varepsilon,$$

lo que contradice $\nu \ll \mu$. ■

6.2. Teorema de Radon-Nykodym

Dado $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}_+$ una función medible, vimos que

$$\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

definida como

$$\nu(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu$$

define una medida, mas aún se demostró la siguiente

Proposición 6.9. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}_+$ una función medible. Si consideramos $\nu : \beta \to \overline{\mathbb{R}_+}$ definida como*

$$\nu(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu,$$

entonces

1. *ν es una medida.*

2. *$f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$ si y solo si $fg \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.*

3. $$\int_X f \mathrm{d}\nu = \int_X fg \mathrm{d}\mu.$$

Cuando sucede esto, decimos que g es una densidad de ν respecto a μ. Observar que si $A \in \mathcal{B}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces

$$\nu(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu = 0,$$

es decir $\nu \ll \mu$. El siguiente teorema nos dice que si $\nu \ll \mu$ entonces debe existir una función g tal que $\mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\mu$.

Teorema 6.10. *[Radon-Nykodym] Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible, y sea μ una medida y ν una medida con signo, ambas σ-finitas sobre $\mathcal{B}$ tales que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, μ-integrable tal que*

$$\nu(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu$$

para todo $A \in \beta$. Además, g es única μ-c.t.p.. La función g se dice que es la derivada de Radon-Nykodym de ν con respecto a μ y a veces se denota como $\frac{d\nu}{d\mu}$, o bien que $\mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\mu$.

Para demostrar este teorema necesitamos la siguiente

Proposición 6.11. *Sean μ, ν medidas finitas. Entonces $\nu \perp \mu$ o bien existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto medible A tal que $\mu(A) > 0$ y A es un conjunto positivo para la medida (con signo) $\nu - \varepsilon\mu$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la medida con signo $\rho_n := \nu - \frac{1}{n}\mu$, y sea $X = P_n \cup N_n$ la descomposición de Hahn asociada. Definamos

$$P_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n, \quad N_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n,$$

y notemos que $N_0 \subseteq N_n$. Por lo tanto $\rho_n(N_0) \leq 0$ y

$$0 \leq \nu(N_0) \leq \frac{1}{n}\mu(N_0).$$

Como μ es finita, concluimos que $\nu(N_0) = 0$. Como $N_0^c = P_0$, entonces o bien $\mu(P_0) = 0$ (en cuyo caso $\mu \perp \nu$) o bien $\nu(P_0) > 0$.

En consecuencia existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(P_{n_0}) > 0$. El resultado se sigue considerando $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ y $A = P_{n_0}$. ■

Demostración del Teorema 6.10. Supongamos primero que μ y ν son medidas finitas. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \to \mathbb{R}_+ : f \text{ es medible y } \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \nu(A) \ \forall A \in \mathcal{B} \right\},$$

y definamos

$$\alpha = \sup \int_X f \mathrm{d}\mu : f \in \mathcal{F}.$$

De la definición del supremo podemos encontrar una sucesión de funciones medibles $f_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \nu(X) < \infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$g_n = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \quad \text{y} \quad g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,$$

por lo tanto $g_n \nearrow g$ y

$$\int_X g_n \mathrm{d}\mu \geq \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Observe además que $g_n \in \mathcal{F}$, esto pues si $h = \max\{h_1, h_2\}$ con $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$, entonces para $B = \{x \in X : h_1(x) < h_2(x)\}$ podemos escribir para $A \in \mathcal{B}$

$$\int_A h\mathrm{d}\mu = \int_{A\cap B} h\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap B^x} h\mathrm{d}\mu = \int_{A\cap B} h_2\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap B^x} h_1\mathrm{d}\mu \leq \nu(A\cap B) + \nu(A\cap B^c) = \nu(A).$$

Ahora bien, como $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\mathrm{d}\mu$, $\int g_n\mathrm{d}\mu \geq \int f_n\mathrm{d}\mu$ y $g_n \in \mathcal{F}$ concluimos por convergencia monótona que $g \in \mathcal{F}$ y

$$\int_X g = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\mathrm{d}\mu = \alpha.$$

En particular $g \in L^1(\mu)$ y por lo tanto $g < \infty$ μ-c.t.p.. Así, si definimos $f = g1_{\{x\in X: g(x)<\infty\}}$ entonces

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \alpha.$$

Veamos que f es la función buscada. Como $f \in \mathcal{F}$ tenemos que $\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\nu - f\mathrm{d}\mu$ es una medida (no-negativa). Veamos que $\rho \perp \mu$: de no ser así tenemos que $\rho \ll \mu$ y podemos usar la Proposición 6.11 para determinar la existencia de $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) > 0$ y

$$\varepsilon\mu(B\cap A) \leq \rho(B\cap A) = \nu(B\cap A) - \int_{B\cap A} f\mathrm{d}\mu$$

para todo $B \in \mathcal{B}$. Ahora para $g = f + \varepsilon 1_A$ tenemos que

$$\int_B g\mathrm{d}\mu = \int_B f\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A\cap B) \leq \int_B f\mathrm{d}\mu + \nu(B\cap A) - \int_{B\cap A} f\mathrm{d}\mu = \int_{B\cap A^c} f\mathrm{d}\mu + \nu(B\cap A) \leq \nu(B),$$

y por lo tanto $g \in \mathcal{F}$, pero

$$\int_X g\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha,$$

lo que contradice la definición de α.

Pero $\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\nu - f\mathrm{d}\mu \ll \mathrm{d}\mu$, en consecuencia $\rho = 0$ (ver Ejercicio 6.5), lo que concluye la demostración en este caso.

Si μ y ν son medidas σ-finitas, entonces $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ con X_k disjuntos y $\mu(X_k) < \infty$ y $\nu(X_k) < \infty$. Si definimos $\mu_k(A) = \mu(A\cap X_k)$ y $\nu_k(A) = \nu(A\cap X_k)$, entonces lo hecho anteriormente nos dice que existe f_k función medible no-negativa tal que

$$\nu_k(A) = \int_A f_k\mu_k \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

La función $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ satisface entonces la propiedad deseada.

Finalmente, si ν es una medida con signo y μ es σ-finita, basta escribir $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y aplicar lo anterior a ν^+ y ν^-. ■

Corolario 6.12 (Teorema de descomposición de Lebesgue)**.** *Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y sea μ una medida y ν una medidas con signo sobre $\mathcal{B}$ que son σ-finitas. Entonces existen medidas con signo ν_0 y ν_1, ambas σ-finitas, tales que*

- $\nu = \nu_0 + \nu_1$,
- $\nu_0 \perp \mu$, *y*
- $\nu_1 \ll \mu$.

Demostración. De la demostración del Teorema 6.10 recordemos que probamos que existe f medible no negativa tal que

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\nu - f\mathrm{d}\mu,$$

y que $\rho \perp \mu$. Luego el resultado se sigue escribiendo $\nu_0 = \rho$ y $\mathrm{d}\nu_1 = f\mathrm{d}\mu$. ■

6.3. Ejercicios

Ejercicio 6.1. Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de medida con signo y sea $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la descomposición de Jordan de μ. Para f medible defina

$$\int_X f\mathrm{d}\nu = \int_X f\mathrm{d}\nu^+ - \int_X f\mathrm{d}\nu^-,$$

cada vez que las integrales y la resta tengan sentido. Muestre que

$$|\nu|(A) = \sup\left\{\left|\int_A f\mathrm{d}\nu\right| : f \text{ medible y } 0 \leq f \leq 1\right\}.$$

Ejercicio 6.2. Muestre que la relación "$\ll$" es reflexiva y transitiva.

Ejercicio 6.3. Dado $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}_+$ una función medible. Muestre que si

$$\nu(A) = \int_A g\mathrm{d}\mu.$$

entonces $\nu \ll \mu$.

Ejercicio 6.4. Sean μ y ν dos medidas. Muestre que $\mu \ll \mu + \nu$.

Ejercicio 6.5. Suponga que μ y ν son medidas tales que $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$. Muestre que $\nu = 0$.

Ejercicio 6.6. Demuestre una generalización del Teorema de Radon-Nikodym suponiendo ahora que μ es una medida con signo. *Ayuda: Escriba $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

Ejercicio 6.7. Suponga que μ, ν son medidas finitas que satisfacen $\nu \ll \mu$. Defina $\rho = \mu + \nu$ y considere $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$. Muestre que $0 \leq f < 1$ μ-c.t.p. y

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f} \quad \rho\text{-c.t.p.}.$$

Ejercicio 6.8. Suponga que $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \rho$ para medidas σ-finitas. Demuestre que

$$\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} \quad \rho\text{-c.t.p.}.$$

Ejercicio 6.9. Suponga que $\nu \ll \mu$ para medidas σ-finitas. Muestre que

$$\int f \mathrm{d}\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} \mathrm{d}\mu$$

para toda función medible finita.

Ejercicio 6.10. Suponga que $\nu_1 \ll \mu_1$ y $\nu_2 \ll \mu_2$. Muestre que $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y

$$\frac{d(\nu_1 \otimes \nu_2)}{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

Bibliografía

1. Bartle, R. G. *The elements of integration* x+129 (John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966).
2. Berezansky, Y. M., Sheftel, Z. G. y Us, G. F. *Functional analysis. Vol. II* Translated from the 1990 Russian original by Peter V. Malyshev, xvi+293. isbn: 3-7643-5345-7 (Birkhäuser Verlag, Basel, 1996).
3. Cohn, D. L. *Measure theory* Second, xxi+457. isbn: 978-1-4614-6955-1. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6956-8 (Birkhäuser/Springer, New York, 2013).
4. Folland, G. B. *Real analysis* Second. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication, xvi+386. isbn: 0-471-31716-0 (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999).
5. Halmos, P. R. *Measure Theory* xi+304 (D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950).
6. Hewitt, E. y Stromberg, K. *Real and abstract analysis* A modern treatment of the theory of functions of a real variable, Third printing, Graduate Texts in Mathematics, No. 25, x+476 (Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975).
7. Royden, H. L. *Real analysis* Third, xx+444. isbn: 0-02-404151-3 (Macmillan Publishing Company, New York, 1988).
8. Rudin, W. *Principles of mathematical analysis* Third, x+342 (McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976).
9. Rudin, W. *Real and complex analysis* Third, xiv+416. isbn: 0-07-054234-1 (McGraw-Hill Book Co., New York, 1987).
10. Stein, E. M. y Shakarchi, R. *Real analysis* Measure theory, integration, and Hilbert spaces, xx+402. isbn: 0-691-11386-6 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005).