Matemática Aplicada (Agronomía)

Hernán Castro Z.

http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro.

hcastro@inst-mat.utalca.cl.

Última actualización: 20 de Abril del 2014

Apunte financiado parcialmente por **Proyecto de investigación asociativa ACT 56**

Índice general

Prefacio

Este apunte ha sido elaborado para el curso “Matemática Aplicada” que se dicta para la carrera de Agronomía en la Universidad de Talca.

Dado que el curso es un compendio de materias expuestas en diversos libros, lo que se ha hecho es recopilar dichas materias, organizarlas en la manera en que se exponen en el curso, además de incorporar diversos ejercicios en cada sección.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias, tanto como la lista de ejercicios puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos aún no están completos.

Capítulo 1

Repaso

1.1. Algunas herramientas de cálculo

1.1.1. Derivadas

Definición 1.1. *Dada una función f definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, definimos la* derivada *de f en $x_0 \in I$ como*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observación 1.1.

- El límite en la definición de la derivada, puede no existir. Si este es el caso, decimos que la función no es diferenciable en x_0.
- Es importante recordar que la derivada de una función tiene varias interpretaciones. En primer lugar, si tenemos dos variables x, y relacionadas por una función f, es decir, $y = f(x)$, entonces $f'(x_0)$ representa la tasa instantánea de cambio de la variable y con respecto a la variable x en el instante x_0.
- Otra interpretación de la derivada se puede obtener al observar el gráfico de la función f. En este caso, el valor $f'(x_0)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Ver figura 1.1 para visualizar este punto.

Para efectos prácticos, no utilizamos la definición formal de la derivada, por el contrario, debemos conocer las derivadas de ciertas funciones básicas, y las reglas para obtener derivadas de funciones generadas a partir de estas funciones básicas.

Dentro de las funciones básicas consideramos: polinomios, funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales. Así como se debe saber calcular la derivadas de funciones generadas a partir de las anteriores mediante operaciones entre funciones: sumas, restas, productos (regla del producto), cocientes (regla del cociente), composiciones (regla de la cadena).

El siguiente ejemplo ilustra alguno casos:

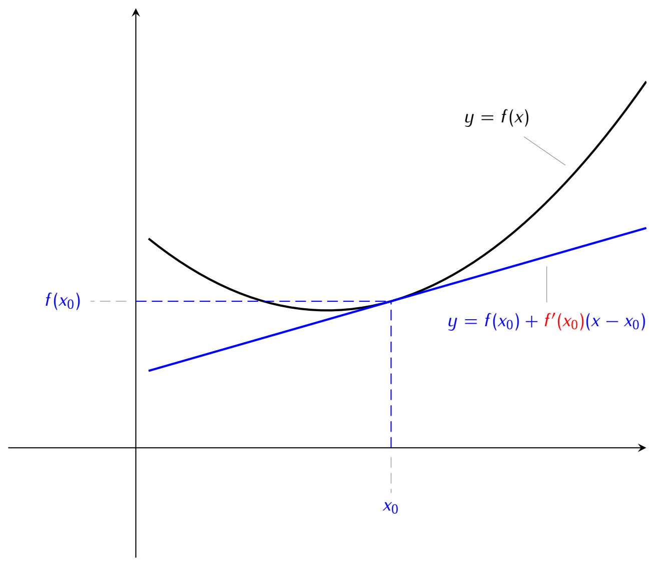


Figura 1.1: La derivada es la pendiente de la recta tangente.

Ejemplo 1.1. Encontrar la derivada de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}}{\ln(\tan x) + x^5}$.

Solución. Para encontrar la derivada iremos paso a paso:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}}{x \cdot \ln x + x^5}\right)' \\
&= \frac{\left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right)' \cdot \left(x \cdot \ln x + x^5\right) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot \left(x \cdot \ln x + x^5\right)'}{\left(x \cdot \ln x + x^5\right)^2} \\
&= \frac{\left((\operatorname{sen} x)' + \left(e^{x^2+4}\right)'\right) \cdot \left(x \cdot \ln x + x^5\right) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot \left((x \cdot \ln x)' + \left(x^5\right)'\right)}{\left(x \cdot \ln x + x^5\right)^2} \\
&= \frac{\left(\cos x + 2x \cdot e^{x^2+4}\right) \cdot \left(x \cdot \ln x + x^5\right) - \left(\operatorname{sen} x + e^{x^2+4}\right) \cdot \left((\ln x + 1) + 5x^4\right)}{\left(x \cdot \ln x + x^5\right)^2}
\end{aligned}
$$

Otro tipo de derivadas que debemos ser capaces de calcular, es aquella que requiere derivación implícita: cuando la variable dependiente y la variable independiente están relacionadas mediante una ecuación.

Ejemplo 1.2. Calcular la derivada de y en términos de x e y, cuando $x^2y + \tan y = \log_2(xy)$.

Solución. En esto casos debemos derivar ambos lados de la ecuación con respecto a la variable x, asumiendo que y depende de x. El principal cuidado que debemos tener es que siempre asumimos que y

es una función que depende de x, por lo que la derivada de y es entonces $\dfrac{dy}{dx}$, y para obtener la derivada de funciones de y debemos usar la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2y+\tan y\right) &= \frac{d}{dx}\left(\log_2(xy)\right) \\ 2xy+x^2\frac{dy}{dx}+\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{xy\ln 2}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right), \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{x\ln 2}-2xy}{x^2+\sec^2 y-\dfrac{1}{y\ln 2}}.$$

1.1.2. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Calcule las derivadas de:

1. $f(x)=\operatorname{sen}(x^2)$.
2. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$.
3. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^5}+\sqrt[3]{x+1}+x\cos x$.
4. $f(x)=e^{2x}$.
5. $f(x)=2^{2x}$.
6. $f(x)=\ln(x^5)$.
7. $f(x)=(\ln(x))^5$.
8. $f(x)=\log_2 x$.
9. $f(t)=\dfrac{A}{1+Ce^{-kt}}$, donde A, C y k son constantes positivas.

Ejercicio 1.2. Dada la relación entre x e y, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $x^2+y^2=R^2$, donde R es una constante positiva.
2. $yx^2+\ln y=\cos(xy)$.
3. $\dfrac{x^2+\frac{1}{3}y^3}{x-y}=10$.

1.1.3. Algunos conceptos relativos a la derivada.

Definición 1.2 (Números y puntos críticos). *Dado un intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$, decimos que $c\in I$ es un **número crítico** para la función $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ si:*

1. *$f'(c)$ no esta definido, ó*
2. *$f'(c)$ está definido y $f'(c)=0$.*

*Además, si c es un número crítico, decimos que el par $(c,f(c))$ es un **punto crítico** para la función.*

Ejemplo 1.3. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=\cos x$ en el intervalo $[0,3\pi)$.

Solución. La derivada de la función f está dada por $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, que está definida en todo el intervalo, luego para encontrar los puntos críticos, debemos resolver la ecuación

$$-\operatorname{sen} x = 0.$$

Si resolvemos la ecuación nos damos cuenta que el conjunto solución está dado por todos los múltiplos enteros de π, es decir $\{\dots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots\}$, de los cuales sólo $\{0, \pi, 2\pi\}$ pertenecen al intervalo en cuestión. Luego los puntos críticos son exactamente: $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ y $(2\pi, 1)$. ■

Ejemplo 1.4. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1)$.

Solución. En este caso, la función $|x|$ no es diferenciable en $c = 0$ (¿Por qué?). Por lo que tenemos que 0 es un punto crítico. Por otra parte, cuando $x \neq 0$, la derivada de $|x|$ nunca se anula (¿Por qué?), de donde deducimos que el único punto crítico de la función es $(0, 0)$. ■

Definición 1.3 (Monotonía de funciones)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que:*

- *una función es creciente, si cada vez que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *una función es decreciente, si cada vez que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.*

Ejemplo 1.5. Determine donde la función $f(x) = x^2 - x$ es creciente, y donde es decreciente.

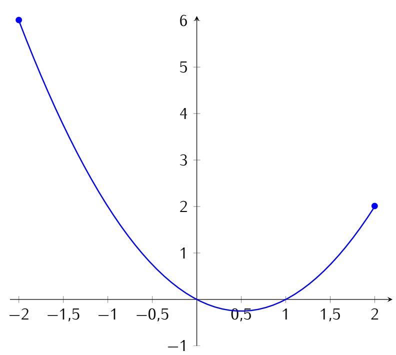


Figura 1.2: Gráfico de $f(x) = x^2 - x$ en $[-2, 2]$.

¿Cómo determinamos si una función es creciente o decreciente?

Teorema 1.1 (Test de la primera derivada para determinar monotonía)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que:*

- *f es creciente en el intervalo I, si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.*
- *f es decreciente en el intervalo I, si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.*

Solución (Ejemplo 1.5). Calculamos la derivada de f y obtenemos $f'(x) = 2x - 1$. Para determinar el tipo de monotonía de la función, debemos analizar el signo de f. Para ello encontramos los puntos críticos, en este caso solo hay uno $x = \dfrac{1}{2}$, y dividimos el intervalo en cuestión usando los puntos críticos:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$2x-1$	$-$	decreciente
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$2x-1$	$+$	creciente

■

Definición 1.4 (Extremos relativos). *Decimos que una función f tiene un*

- *máximo relativo en x_0, si es que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x e un intervalo $a < c < b$.*
- *mínimo relativo en x_0, si es que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x e un intervalo $a < c < b$.*

Ejemplo 1.6. Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x$.

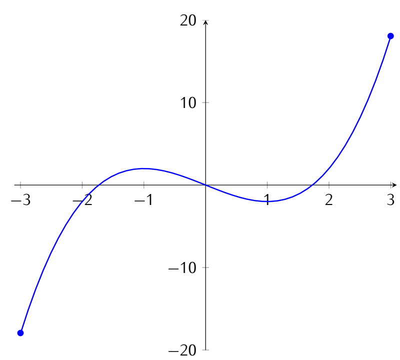


Figura 1.3: Gráfico de $x^3 - 3x$ en $[-3, 3]$.

¿Cómo encontrar extremos relativos?

Teorema 1.2 (Test de la primera derivada para extremos relativos). *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que:*

- *x_0 es un máximo relativo para f, si es que $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0.*
- *x_0 es un mínimo relativo para f, si es que $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0.*

Solución (Ejemplo 1.6). Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 3$, de donde obtenemos 2 puntos críticos: $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. Tenemos la siguiente tabla:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$
$(-\infty, -1)$	$3(x+1)(x-1)$	$+$
$(-1, 1)$	$3(x+1)(x-1)$	$-$
$(1, \infty)$	$3(x+1)(x-1)$	$+$

de donde concluimos que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. ■

Definición 1.5 (Convexidad y concavidad). *Decimos que*

- *una función f es convexa, si es que $f'(x)$ es creciente en el intervalo.*
- *una función f es cóncava, si es que $f'(x)$ es decreciente en el intervalo.*

Teorema 1.3 (Test de la segunda derivada para determinar convexidad o concavidad). *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función dos veces diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que:*

- *f es convexa en el intervalo I, si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$.*
- *f es cóncava en el intervalo I, si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$.*

Definición 1.6 (Puntos de inflexión). *Decimos que f tiene un punto de inflexión en el c si es que la convexidad de la función cambia, es decir, si es que*

- *f es convexa a la izquierda de c y cóncava a la derecha de c, ó*
- *f es cóncava a la izquierda de c y convexa a la derecha de c.*

Teorema 1.4 (Test de la segunda derivada para encontrar puntos de inflexión). *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos si que c es un punto de inflexión, entonces*

- *$f''(c)$ no existe, ó*
- *$f''(c)$ existe y $f''(c) = 0$.*

Ejemplo 1.7. Sea $f(x) = x^3 - 3x$ definida sobre todos los reales. Determine donde la función es cóncava y donde es convexa. Además encuentre los puntos de inflexión.

Solución. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 3$, por lo que $f''(x) = 6x$ para todo x. Por lo tanto tenemos un posible punto de inflexión en $(0, 0)$.

intervalo	$f''(x)$	signo de $f''(x)$
$(-\infty, 0)$	$6x$	$-$
$(0, \infty)$	$6x$	$+$

De donde deducimos que f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Además $(0, 0)$ es un punto de inflexión. ■

Teorema 1.5 (Test de la segunda derivada para extremos relativos)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función 2 veces diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que si $x_0 \in I$ satisface $f'(x_0) = 0$, entonces*

- *x_0 es un máximo relativo para f, si es que $f''(x_0) > 0$.*
- *x_0 es un mínimo relativo para f, si es que $f''(x_0) < 0$.*

Ejemplo 1.8. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$ definida sobre todos los reales. Encuentre los extremos relativos de esta función e identifique los máximos y mínimos relativos.

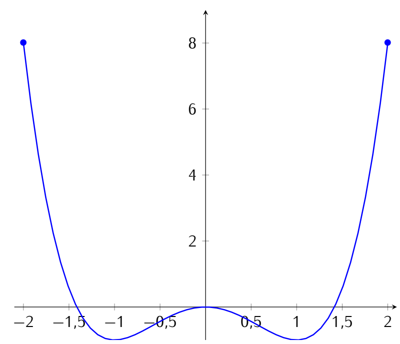


Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $[-2, 2]$.

Solución. Primero identificamos los puntos críticos usando la derivada de f, que se puede escribir como $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x + 1)(x - 1)$, de donde deducimos que hay solo 3 números críticos: $c = -1$, $c = 0$ y $c = 1$.

Para identificar los extremos relativos, calculamos la segunda derivada, $f''(x) = 12x^2 - 4$ y evaluamos los puntos críticos, donde obtenemos

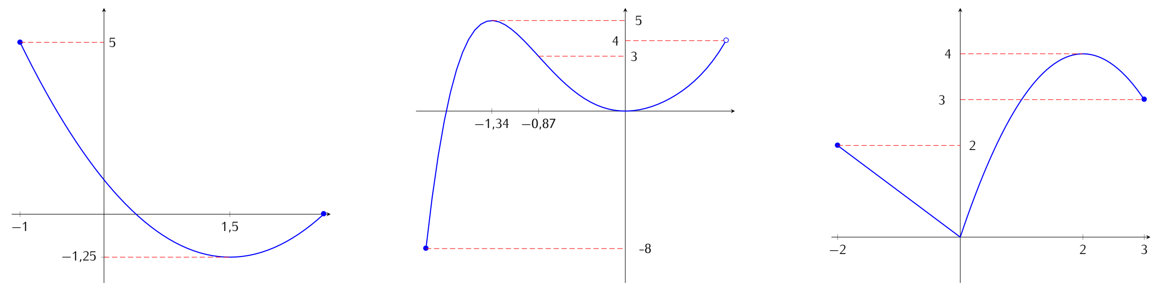
$f''(x)$	$f''(c)$
$12x^2 - 4$	8
$12x^2 - 4$	-4
$12x^2 - 4$	8

De donde concluimos que f tiene mínimos relativos cuando $c = -1$ y $c = 1$; y un máximo relativo cuando $c = 0$. ■

1.1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.3. Dado los gráficos de la figura 1.5, identifique: intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad, concavidad, puntos críticos, puntos de inflexión, extremos relativos y absolutos.

Ejercicio 1.4. Dada la función $f(x)$, determine: puntos críticos; intervalos de crecimiento y decrecimiento; intervalos de convexidad y concavidad y puntos de inflexión. Finalmente haga un bosquejo del gráfico de la función utilizando la información anterior.



(a) (b) (c)

Figura 1.5: Gráficos para el ejercicio 1.3

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1, 2)$.
2. $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ en $[-2, 2]$.
3. $f(x) = -\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{3}x - 2$ en $[0, 4]$.
4. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x-5)$ definida sobre todos los reales.
5. $f(x) = e^{-x} + x$ en $[0, 10]$.

1.2. Optimización en una variable

Definición 1.7 (Máximos y mínimos absolutos). *Sea f una función definida en un intervalo I que contiene a un número c. Decimos que:*

- *$f(c)$ es el máximo absoluto de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I, y*
- *$f(c)$ es el mínimo absoluto de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.*

Habitualmente, los extremos absolutos coinciden con los extremos relativos, sin embargo, hay ocasiones donde esto no ocurre. A continuación veremos como determinar los extremos absolutos de una función

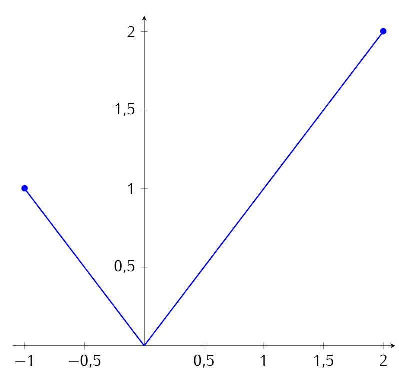


Figura 1.6: Gráfico de $f(x) = |x|$ en $[-1, 2]$

dada. En primer lugar, consideraremos el caso en que el intervalo I es un intervalo cerrado $[a, b]$.

Teorema 1.6 (Teorema del Valor extremo)**.** *Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza sus valores extremos en el intervalo.*

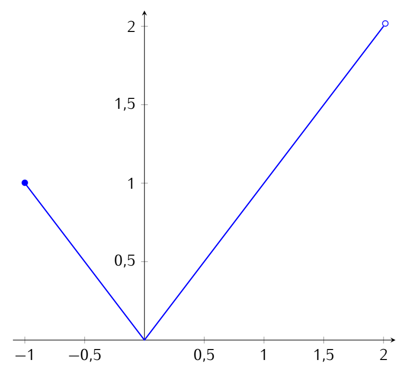


Figura 1.7: Gráfico de $f(x) = |x|$ en $[-1, 2)$. Notar que esta función no alcanza su máximo.

Gracias a este teorema, encontrar valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es relativamente directo:

1. Verificamos que la función es continua y que el intervalo es cerrado.
2. Encontramos los números críticos para la función f.
3. Calculamos los valores de f en los números críticos; además calculamos $f(a)$ y $f(b)$,
4. El mayor de los valores obtenidos en el paso anterior es el máximo absoluto, y el menor de los valores es el mínimo absoluto.

Ejemplo 1.9. Encontrar los valores extremos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ en el intervalo $[-3, 0]$.

Solución. Siguiendo el procedimiento, primero nos damos cuenta que la función es un polinomio, por lo tanto es continua. Luego debemos encontrar los números críticos de f, para ello calculamos $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$ y nos percatamos que solo hay dos posibles candidatos: $c = -1$ y $c = 2$. Sin embargo, $c = 2$ no pertenece al intervalo, por lo cual no lo consideramos. Finalmente calculamos los valores de f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$f(x)$	c	$f(c)$
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	-3	-52
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	-1	0
$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$	0	-7

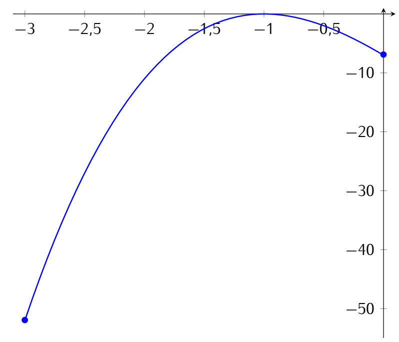


Figura 1.8: Gráfico de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ en $[-3, 0]$

De donde deducimos que el máximo absoluto es 0 y se alcanza cuando $x = -1$. El mínimo absoluto es -52 y se alcanza cuando $x = -3$.

■

También estaremos interesados en encontrar los valores extremos de funciones que no están definidas en intervalos cerrados, en cuyo caso, no tenemos garantizada la existencia de dichos valores extremos, ya que el Teorema del valor extremos no aplica.

Para encontrar los valores extremos en estos casos, procedemos a encontrar los números críticos y evaluamos la función en ellos, junto con los extremos del intervalo (si los hubiese). Sin embargo, para poder concluir, necesitamos hacer una análisis extra, usando la primera o la segunda derivada de la función: Análisis del gráfico.

Ejemplo 1.10. Sea $f(t) = t^3 - \dfrac{21}{2}t^2 + 30t + 20$. Encuentre, si es que los hubiese, el máximo y mínimo absoluto de la función f en el intervalo $t \geq 2$.

Solución. En este caso el intervalo es no-acotado, por lo que la existencia de los valores extremos no está garantizada. Para buscar los valores extremos, primero determinamos los números críticos: $f'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 3(t^2 - 7t + 10) = 3(t-2)(t-5)$. De donde deducimos que hay 2 números críticos: $t = 2$ y $t = 5$. Para saber si estamos en presencia de máximos o mínimos, debemos estudiar mas a fondo la función. En primer lugar analizamos la primera derivada en cada sub-intervalo

intervalo	$f'(t)$	signo de $f'(t)$
$(2, 5)$	$3(t-2)(t-5)$	$-$
$(5, \infty)$	$3(t-2)(t-5)$	$+$

de donde podemos deducir de inmediato que $t = 5$ es un mínimo absoluto, ya que f es decreciente para todo $t < 5$ y creciente para todo $t > 5$. Por otra parte, para $t = 2$ tenemos un máximo local que NO es un máximo absoluto, pues para $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = +\infty$ (ver Figura 1.9). ■

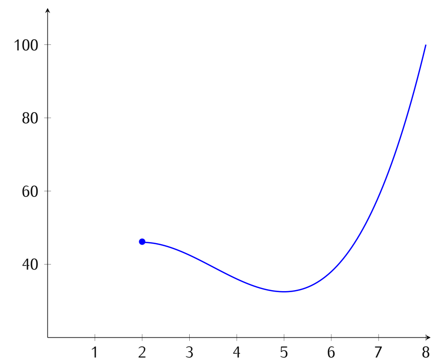


Figura 1.9: Gráfico de $f(t) = t^3 - \dfrac{21}{2}t^2 + 30t + 20$ para $t \geq 2$.

En resumen, podemos tenemos la siguiente guía para resolver problemas de optimización:

1. Identificar que es lo que se quiere maximizar o minimizar. Una vez hecho esto, asignar nombres a las variables de interés.
2. Expresar mediante ecuaciones o desigualdades las relaciones entre las variables. Usualmente una figura puede ayudar en este proceso.
3. Reducir la cantidad a ser optimizada para obtener una función de una sola variable independiente. Además se deben identificar posibles restricciones a dicha variable.
4. Si denotamos por $f(x)$ a la cantidad a ser optimizada, encontramos $f'(x)$ y determinamos todos los puntos críticos. Luego identificamos el valor requerido (máximo o mínimo) usando los métodos anteriormente expuestos.
5. Interpretar el resultado en términos del problema original.

Solución (Ejemplo 2.1). Recordar que ya realizamos los primeros 3 pasos y habíamos llegado a la conclusión de que queríamos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + \dfrac{800}{x}, \\ \text{sujeto a que } x > 0. \end{cases} \tag{P'}$$

Para resolver entonces consideramos $f(x) = 2x + \frac{800}{x}$ y calculamos $f'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}$, de donde obtenemos que el único punto crítico relevante está dado por $x = \sqrt{400} = 20$. Además observamos que cuando $x < 20$, la función es decreciente ($f'(x) < 0$) y cuando $x > 20$ la función es creciente ($f'(x) > 0$), de donde concluimos que $x = 20$ determina un mínimo absoluto para f. En otras palabras, necesitamos $2 \cdot 20 + \dfrac{800}{20} = 80$ metros de cerca y el corral tiene las dimensiones expresadas en la Figura 1.10.

■

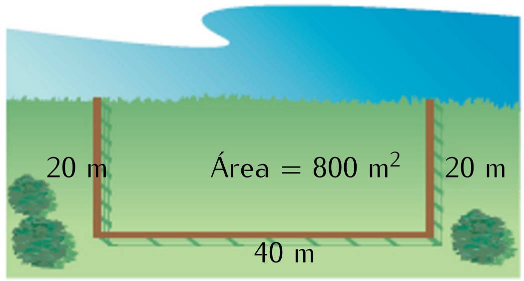


Figura 1.10: Dimensiones de la cerca ideal.

Ejemplo 1.11. Encontrar los valores extremos de la función $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ cuando $x > 0$.

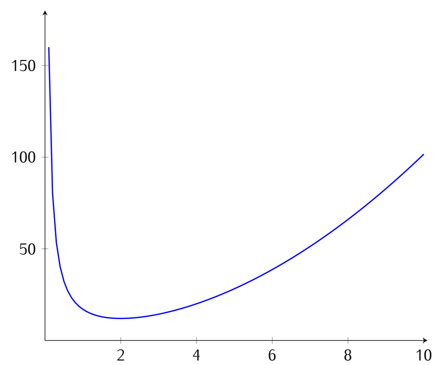


Figura 1.11: Gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ para $x > 0$.

Solución. Notar que la función es discontinua solo cuando $x = 0$, valor que no está incluido en el intervalo. Dicho esto, podemos calcular la derivada

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2\left(x^3 - 8\right)}{x^2}.$$

De aquí deducimos que $x = 2$ es el único número crítico para la función (observar que 0 no se encuentra en el intervalo de interés).

Para determinar si $x = 2$ es un extremo relativo, utilizaremos el test de la primera derivada:

intervalo	$f'(x)$	signo de $f'(x)$
$(0,2)$	$\dfrac{2\left(x^3-8\right)}{x^2}$	$-$
$(2,\infty)$	$\dfrac{2\left(x^3-8\right)}{x^2}$	$+$

De donde podemos concluir que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$, además dado que la función es siempre decreciente cuando $x < 2$ y siempre creciente cuando $x > 2$, podemos concluir que en realidad f tiene un mínimo absoluto cuando $x = 2$. Por otra parte, dado que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, concluimos que f no tiene máximo absoluto. ■

Ejemplo 1.12. Un agricultor estima que si planta 60 naranjos, entonces la cosecha será de 400 naranjas por árbol. La cosecha disminuirá 4 naranjas por árbol si es que se planta 1 árbol adicional. ¿Cuántos árboles deben plantarse para maximizar la cosecha?

Solución. Nuestro objetivo es maximizar la cosecha, por lo que debemos expresar la cosecha como una función:

$$\text{cosecha total} = (\text{cantidad de árboles}) \cdot (\text{cosecha por árbol}),$$

Observemos que la cantidad de árboles puede ser expresada como $60 + x$, donde cada x denota un árbol plantado en adición a los 60, y que la cantidad de naranjas puede ser expresada como $400 - 4x$, es decir, nuestra función queda:

$$C(x) = (60 + x)(400 - 4x) = 4(6000 + 40x - x^2).$$

A continuación identificamos restricciones sobre las variables, que en nuestro caso es x. Como dijimos, cada x representa un árbol plantado, con la observación de que x puede ser negativo, en cuyo caso indica que se debe cortar un árbol. Dado que inicialmente tenemos 60 árboles, la restricción es que $x \geq -60$ (no podemos cortar mas árboles de los que tenemos).

Es decir nuestro problema queda

$$\begin{cases} \text{maximizar } C(x) = 4(6000 + 40x - x^2) \\ \text{sujeto a que } x \geq -60. \end{cases}$$

Para resolver esto, calculamos $C'(x) = 8(20 - x)$, y deducimos que solo hay un número crítico: $c = 20$. Dado que nuestro intervalo es no acotado, debemos hacer determinar si este número crítico es un máximo o mínimo usando los test de la primera o segunda derivada.

Si calculamos la segunda derivada, notamos que $C''(x) = -8 < 0$ para todo x, por lo tanto deducimos que $c = 20$ es un máximo relativo. Para determinar si es que es un máximo absoluto observamos que la función es creciente para todo $x < 20$ y decreciente para todo $x > 20$. En conclusión, podemos decir que la cosecha se maximiza si plantamos 20 árboles adicionales, es decir, si tenemos una plantación de 80 árboles. ■

1.2.1. Ejercicios

Ejercicio 1.5. El granjero del ejemplo 2.1, al no saber técnicas de optimización, compró para su corral de caballos 200 metros de cerca. Como vimos anteriormente, la cantidad óptima necesitada es de solo 80 metros, por lo que le sobraron 120 metros de cerca. Ante esto, decide que es tiempo de construir un nuevo corral para sus chanchos y vacas. Dado que esta vez no quiere desaprovechar nada, le pregunta a los estudiantes de este curso ¿Cuál es el área máxima que puede cercar utilizando los 120 metros de cerca?. Resuelva este problema bajo el supuesto de que los corrales son rectangulares y que están dispuestos como indica la figura 1.12.

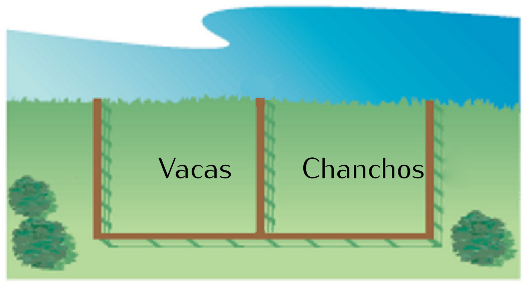


Figura 1.12: Corral para chanchos y vacas.

Ejercicio 1.6. Se desea construir una caja con tapa utilizando un cartón rectangular que mide 5 metros por 8 metros. La caja se realiza cortando las regiones sombreadas y luego doblando por la lineas punteadas (Ver figura 1.13). ¿Cuáles son las dimensiones x, y, z que maximizan el volumen de la caja?

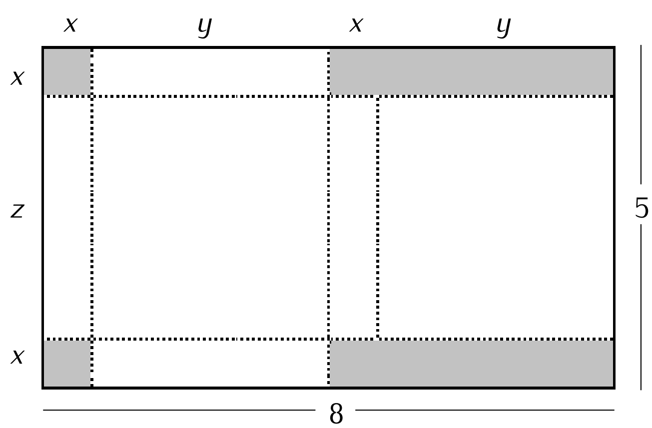


Figura 1.13: Diagrama para el ejercicio 1.6.

Ejercicio 1.7. Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen, y su base es paralela al eje x con los extremos ubicados en la curva $12y = 36 - x^2$. Determine las dimensiones del triángulo de área máxima bajo dichas condiciones. Ver figura 1.14.

Ejercicio 1.8. El gerente de una fábrica estima que cuando q miles de unidades de un producto son producidas cada mes, el costo de la producción será de $C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$ miles de pesos. Además estima que las q unidades serán vendidas a un precio de $p(q) = 22{,}2 - 1{,}2q$ miles de pesos por unidad.

1. Determine el nivel de producción que le otorgará la mayor ganancia a la empresa. ¿Cuánto es dicha máxima ganancia?. Hint: La ganancia es igual a los ingresos menos los costos.

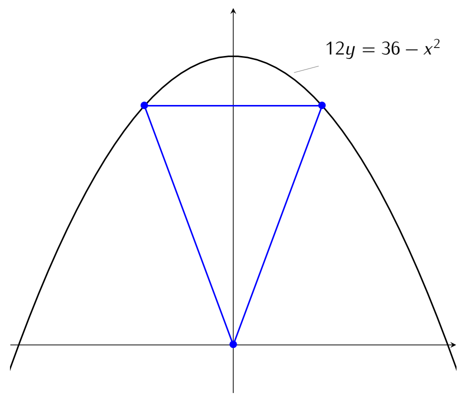


Figura 1.14: Diagrama para el ejercicio 1.7

2. ¿A qué nivel de producción se minimiza el costo promedio por unidad? Hint: El costo promedio está dado por $\dfrac{C(q)}{q}$.

Ejercicio 1.9. La ley de Poiseuille dice que la rapidez de la sangre que fluye a r centímetros del eje central de una arteria de radio R está dada por

$$S(r) = c(R^2 - r^2),$$

donde c es una constante positiva. Determine a que distancia del eje central de la arteria la sangre fluye con mayor rapidez. Hint: R y c son constantes conocidas, por lo que su respuesta debe ser en términos de c y R.

Ejercicio 1.10. La reacción del cuerpo humano a algunas sustancias psicotrópicas se puede modelar mediante la ecuación

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

donde D es la dosis y C es una constante que indica la máxima dosis que se puede dar. La tasa de cambio de R con respecto a D se denomina *sensibilidad*.

1. Encuentre el valor de D para el cual la sensibilidad es mayor. ¿Cuál es la máxima sensibilidad? Hint: Su respuesta debe estar en términos de C.

2. ¿Cual es la reacción cuando se utiliza la dosis obtenida anteriormente?

Ejercicio 1.11. Debemos construir un tambor cilíndrico para guardar V cm^3 de agua (V es una cantidad fija conocida). En virtud que queremos que el tambor nos dure bastante tiempo, decidimos que este sea construido con acero inoxidable, pero como dicho material es caro, decidimos colocarle una tapa de plástico. El costo del acero inoxidable es \$300 por centímetro cuadrado, en tanto que el costo del plástico es de \$100 por centímetro cuadrado. Determine las medidas del tambor (alto y radio de la base) que nos hacen gastar la menor cantidad de dinero.

Ejercicio 1.12. Una empresa de buses interurbanos arrienda sus buses de 50 pasajeros para viajes especiales a grupos de mas de 35 personas. Si un grupo de 35 personas solicita el servicio, entonces cada persona debe pagar \$6.000. Para grupos mas grandes, el costo por pasajero se reduce en \$50 por cada persona adicional a los 35 (es decir, si hay 36 personas, cada persona cancela \$5950, si hay 37, entonces cada persona cancela \$5900, etc.). Determine la cantidad de pasajeros que hacer que la empresa de buses reciba la mayor cantidad de dinero. Hint: Recuerde que deben viajar un número *entero* de personas.

Ejercicio 1.13. Una empresa de bebidas gaseosas desea introducir al mercado el formato de bebidas de 500 cm^3 enlatadas. Determine las dimensiones de la lata de modo que esta utilice la menor cantidad de material para su construcción. Hint: la superficie de un cilindro se puede calcular como la suma de la superficie de las tapas, mas la superficie del contorno.

Ejercicio 1.14. Determine las dimensiones de la lata en el ejercicio 1.13, si es que el costo de las tapas es el doble que el costo de la superficie del contorno. Hint: recuerde que quiere minimizar costos.

1.3. Razón de cambio

En ciertos problemas prácticos, x e y (o quizás mas variables) están relacionadas por una ecuación, y ambas variables se puede considerar como funciones de una tercera variable t, la que usualmente representa al tiempo. Bajo este escenario, a veces es útil relacionar las tasas a las que x e y varían con el tiempo, es decir, relacionar $\frac{dx}{dt}$ con $\frac{dy}{dt}$. A continuación presentamos un procedimiento general para afrontar este tipo de problemas:

1. Cuando es pertinente, hacer un diagrama para representar la situación y asignar nombres a las variables.
2. Determinar una ecuación que relacione las variables.
3. Usar diferenciación implícita para obtener una ecuación que relacione las tasas de cambio.
4. Determinar que datos son conocidos y cuales son los que se quiere obtener.

Ejemplo 1.13. El jefe de una empresa determina que cuando q cientos de unidades de cierto producto son producidas, el costo total de producción es de C miles de pesos, donde

$$C^2 - 3q^3 = 4275.$$

Cuando 1500 unidades están siendo producidas, el nivel de la producción esta incrementándose a una tasa de 20 unidades por semana. ¿Cuál es el costo total a este tiempo y a que tasa está cambiando?

Solución. Queremos encontrar C y $\frac{dC}{dt}$ cuando $q = 15$ (recordar que q representa cientos de unidades). En primer lugar, de la ecuación que relaciona C con q obtenemos que

$$C^2 = 4275 + 3q^3 = 4275 + 3 \cdot 15^3 = 4275 + 3 \cdot 3325 = 4275 + 10125 = 14400,$$

de donde obtenemos que $C = 120$. Por otra parte, si derivamos la ecuación con respecto a t obtenemos que

$$2C\frac{dC}{dt} = 9q^2\frac{dq}{dt},$$

o sea

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9q^2}{2C}\frac{dq}{dt}.$$

Luego para concluir, reemplazamos $C = 120$ miles de pesos, $q = 15$ y $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{2}{10}$ (recordar que q está en cientos), de donde obtenemos

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9 \cdot (15)^2}{2 \cdot 120} \cdot \frac{2}{10} = \frac{27}{16}.$$

Es decir, C está cambiando a $\dfrac{27}{16} = 1,6875$ miles de pesos por semana, es decir a \$1.687,5 por semana. ■

Ejemplo 1.14. Un lago ha sido contaminado por una planta ubicada en su costa. Un grupo ecológico determina que cuando los niveles de contaminación es x partes por millón (ppm) , habrán F peces en el lago, donde

$$F = \frac{32000}{3 + \sqrt{x}}.$$

Cuando hay 4000 peces restantes en el lago, la contaminación crece a una tasa de 1,4 ppm/semana. ¿A qué tasa está cambiando la población de peces en este tiempo?

Solución. Notamos que $F \cdot \left(3 + \sqrt{x}\right) = 32000$ y reemplazamos $F = 4000$ para obtener que a este tiempo se tiene

$$4000\left(3 + \sqrt{x}\right) = 32000$$

de donde se obtiene que $x = 25$. Ahora, para obtener la tasa de cambio de la población de peces, derivamos la ecuación respecto a t para obtener

$$\frac{dF}{dt}\left(3 + \sqrt{x}\right) + F\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} = 0,$$

o sea

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{F}{2\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)}\frac{dx}{dt},$$

y cuando reemplazamos los valores conocidos, obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{4000}{2\sqrt{25}\left(3 + \sqrt{25}\right)} \cdot \frac{14}{10} = -70,$$

es decir, la población de peces disminuye a una tasa de 70 peces por semana. ■

1.3.1. Ejercicios

Ejercicio 1.15. Un bloque de hielo que se usa para refrigerar se puede modelar como un cubo de lado s. En estos instantes, el bloque tiene un volumen de 125.000 cm^3, y se esta derritiendo a una tasa de 1.000 cm^3 por hora.

1. ¿Cuánto mide el lado del cubo en estos instantes? ¿A qué tasa esta variando s?
2. ¿A qué tasa varía el área de la superficie del cubo?

Ejercicio 1.16. Una escalera de 10 metros está apoyada sobre una pared. La parte superior de la escalera empieza a resbalar hacia abajo a una velocidad de 3 metros por segundo (Ver figura 1.15). ¿Cuán rápido se mueve la parte inferior de la escalera, cuando la parte superior esta a 6 metros del suelo?

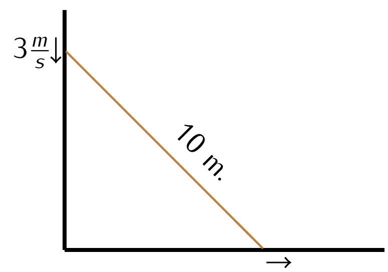


Figura 1.15: Escalera cayéndose.

Ejercicio 1.17. Hacia un tanque cónico (cono invertido) fluye agua a razón de 8 m^3/min. Si la altura del tanque es de 12 m. y el radio de la base del cono es de 6 m. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una altura de 4 m.?

Ejercicio 1.18. Se infla un globo esférico a razón de 10 cm^3/min. Calcular la tasa de cambio del radio del globo cuando el volumen de éste es de 15 cm^3. Hint: El volumen de una esfera está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 1.19. Un colector de aguas lluvia tiene 40 m. de largo y 20 m. de ancho. Además tiene 8 m. de profundidad en su parte mas profunda y 3 m. en su parte menos profunda (Ver figura 1.16). En un día lluvioso se estima que fluyen 10 m^3/hora hacia el colector. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando esta tiene:

1. 3 m. de altura.
2. 6 m. de altura.

Hint: haga un dibujo del perfil del colector en cada instante.

Ejercicio 1.20. Un avión que vuela hacia el norte a 640 km/h pasa sobre cierta ciudad al medio día (12h00). Un segundo avión que va hacia el este a 600 km/h, está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos mas tarde (12h15). Si los aviones están volando a la misma altitud, que tan rápido se están separando a la 1:15 p.m.(13h15). Hint: haga un dibujo mirado desde arriba de los aviones.

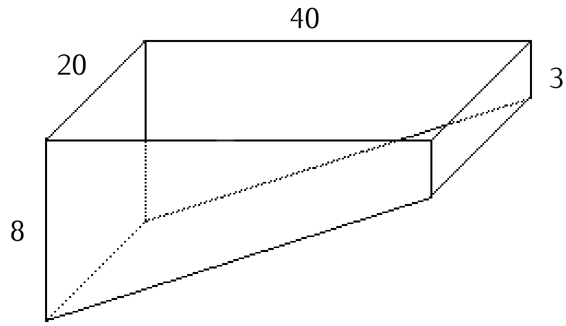


Figura 1.16: Colector de aguas lluvia.

Ejercicio 1.21. Se deja caer una piedra a un lago en calma, lo que provoca que se produzcan ondas circulares. El radio del circulo exterior crece a un ritmo constante de 1 metro por segundo. ¿A qué ritmo cambia el área de la región circular cuando el radio es de 4 metros?

Ejercicio 1.22. Un auto está a 30 kms. al NORTE de una ciudad y se dirige hacia el NORTE a 25 kms/h. Simultáneamente un camión se encuentra a 40 kms. al ESTE y se desplaza al ESTE a 50 kms/h. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los vehículos en ese instante? Hint: Recuerde el teorema de Pitágoras.

1.4. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Definición 1.8 (Funciones exponenciales)**.** *Dado* $b > 0$*, denotado como* base*, existe una única función* $f(x)$*, denotada como* función exponencial de base b *tal que*

$$f(x) = b^x.$$

Observación 1.2. Cosas a recordar: Suponga que $a,\ b > 0$, entonces

1. $b^x = b^y$ entonces $x = y$.
2. $a^x = b^x$ entonces $a = b$.
3. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$.
4. $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$.
5. Si $a > 0$, entonces $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.
6. $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$.

Si $b > 1$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to\infty} b^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} b^{-x} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} b^{-x} = +\infty$.

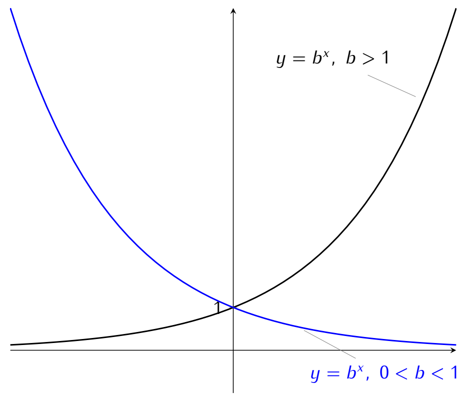


Figura 1.17: Funciones exponenciales.

Un caso muy importante es el que se produce cuando $b = e \approx 2{,}7182\ldots$. Esto pues la función $f(x) = e^x$ es la *única* función que satisface $f'(x) = f(x)$, por esto (y otras razones), es que e se denomina la base *natural*.

Ejemplo 1.15. Se estima que en t años la población de cierto país será de $P(t) = 50e^{0{,}02t}$ millones de personas.

1. ¿Cuál es la población actual?
2. ¿Cuál será la población en 30 años?

Solución. 1. La población inicial es cuando $t = 0$, o sea $P(0) = 50$ millones de personas.

2. En 30 años la población será de $P(30) = 50e^{\frac{3}{5}} \approx 91{,}11$ millones de personas.

Definición 1.9 (Funciones logarítmicas)**.** *Dado* $b > 0$, *denotado como* base, *existe una única función* $f(x)$, *denotada como* función logarítmica de base b *tal que*

$$f(x) = \log_b x.$$

Observación 1.3. Cosas a recordar: Suponga que $a,\ b > 0$, entonces

1. $\log_b x = \log_b y$ entonces $x = y$.
2. $\log_a x = \log_b x$ entonces $a = b$.
3. $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$.
4. $\log_b x^y = y \log_b x$, en particular $\log_b x^{-1} = -\log_b x$.
5. Función inversa: $\log_b b^x = x$ y $b^{\log_b x} = x$.
6. Cambio de base: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Si $b > 1$, entonces

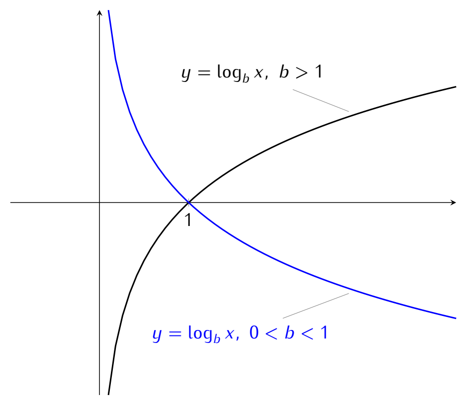


Figura 1.18: Funciones logarítmicas.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_b x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$.

Al igual que antes, distinguimos el caso en que $b = e$, y denotamos por $\ln x = \log_e x$ y denominamos a esta función como *logaritmo natural*.

Dado que lo necesitaremos, recordemos las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Teorema 1.7 (Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas). *Sea $b > 0$, entonces*

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
2. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$,
3. $\frac{d}{dx}(b^x) = e^x \cdot \ln b$,
4. $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \dfrac{1}{\ln b} \cdot \dfrac{1}{x}$.

1.4.1. Ejercicios

Ejercicio 1.23. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $3 = e^{20x}$.
2. $2 \ln x = 1$.
3. $2^{x^2+x} = 4$.
4. $\ln(x-2) + 3 = \ln(x+1)$.
5. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Hint: Defina $u = e^x$.

Ejercicio 1.24. Simplifique las siguientes expresiones sin usar calculadora.

1. $e^{3\ln 4} - 3\log_2 16$.
2. $\ln(9e^2) + \ln(3e^{-2})$.

Ejercicio 1.25. Cuando una cadena, cable telefónico o similar es colgado entre dos postes, la curva que se forma es una *catenaria*. Una catenaria típica esta dada por la fórmula

$$C(x) = \frac{1}{8}\left(e^{4x} + e^{-4x}\right)$$

1. Encuentre el mínimo de esta catenaria cuando $-10 < x < 10$.
2. Bosqueje el gráfico de $C(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. ¿Cuál es la altura mínima a la que se puede colgar un cable modelado por esta catenaria en $[-2, 2]$, para que el cable no toque el suelo?

Ejercicio 1.26. Bosqueje el gráfico de las siguiente funciones, identificando puntos críticos, puntos de inflexión y máximos/mínimos si es que los hubiese.

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$
2. $g(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^2}$, $x > 0$.
3. $h(x) = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$, $x \geq 0$.

Capítulo 2

Modelos funcionales

2.1. Nociones básicas de modelamiento matemático

El modelamiento matemático es un tipo de modelo científico que usa formulismos matemáticos para expresar relaciones entre variables y/o parámetros, para estudiar el comportamiento de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad.

Básicamente, el modelamiento matemático consta de 4 etapas: Formulación, Análisis, Interpretación y Testeo.

1. **Formulación**: Dada una situación compleja de la vida real (Ejemplo: una epidemia de mosquitos), debemos asumir ciertas condiciones que nos permiten simplificar el entendimiento del problema (identificar las variables relevantes, hacer supuestos en base a experimentación, etc.) para así poder establecer un modelo.

2. **Análisis del Modelo**: Esta etapa consiste en usar las herramientas matemáticas (cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.) para resolver el modelo (Ejemplo: la población de mosquitos aumenta a una tasa exponencial).

3. **Interpretación**: Durante esta etapa debemos aplicar las conclusiones obtenidas durante el análisis a nuestro problema real, produciendo alguna predicción (Ejemplo: los mosquitos se apoderan del mundo).

4. **Testeo y ajustes**: Volvemos a experimentar y comparamos los resultados experimentales con la predicción del modelo. Finalizada esta etapa, hay dos opciones: el modelo predijo correctamente los resultados experimentales, o bien es necesario ajustar el modelo para tomar en cuenta las discrepancias.

Ejemplo 2.1. En una granja se planea construir un corral para caballos al costado de un río. El corral debe ser rectangular y debe contar con 800 metros cuadrados. Además, es necesario cercar en los 3 costados no adyacentes al río. ¿Cuántos metros de cerca se necesitan?

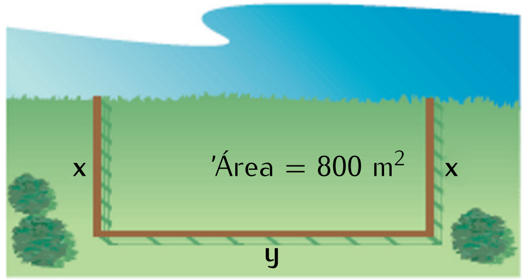


Figura 2.1: Corral para caballos.

Solución. Para estudiar este tipo de ejemplos, siempre es útil hacer un diagrama que represente la situación. En este caso tenemos lo ilustrado en la Figura 2.1. En segundo lugar debemos identificar las variables relevantes. En el caso del ejemplo, tenemos 2 variables: el ancho del corral (la variable x en la imagen), y el largo del corral (la variable y).

Luego identificamos las condiciones que satisfacen las variables. En el caso del ejemplo, la condición principal es que el área del corral debe ser de 800 m^2, es decir

$$x \cdot y = 800.$$

Luego debemos identificar el problema en cuestión. En el ejemplo, queremos saber la cantidad de metros de cerca necesario, lo que se puede representar por

$$2x + y.$$

Finalmente hacemos un supuesto que es bastante razonable: Queremos usar la menor cantidad de cerca posible, ya que esto reduciría los costos asociados a la construcción del corral.

Con todo lo anterior, el problema queda modelado por el siguiente ejercicio matemático:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x \cdot y = 800, \\ \qquad\qquad x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{P}$$

Reducción de variables: en primer lugar observamos que la restricción $x \cdot y = 800$ puede escribirse como $y = \dfrac{800}{x}$, lo que nos permite re-escribir nuestro problema como

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + \dfrac{800}{x}, \\ \qquad \text{sujeto a que } x > 0. \end{cases} \tag{P'}$$

Este problema se puede resolver utilizando las herramientas de cálculo en una variable aprendidas en cursos anteriores. Sin embargo, uno de los propósitos de este curso es aprender a trabajar directamente con el problema (P), y para ello debemos conocer tópicos de *cálculo en varias variables*.

2.2. Análisis Marginal y aproximación de funciones

En economía usualmente se utiliza la derivada para estimar el cambio en una cantidad (por ejemplo: costos, ingresos o ganancia) que resulta de incrementar en 1 unidad el nivel de producción. Dicho uso se denota como *análisis marginal*.

Motivación: Supongamos que $C(x)$ representa el costo de producir x unidades de cierto producto. Si se están produciendo x_0 unidades, entonces la derivada

$$C'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}$$

se conoces como el *costo marginal* de producir x_0 unidades.

Ahora, si consideramos $h=1$, tenemos que

$$C'(x_0) \approx C(x_0+1) - C(x_0),$$

es decir, $C'(x_0)$ *aproxima* el costo adicional de producir una unidad extra a x_0 (Ver figura 2.2)

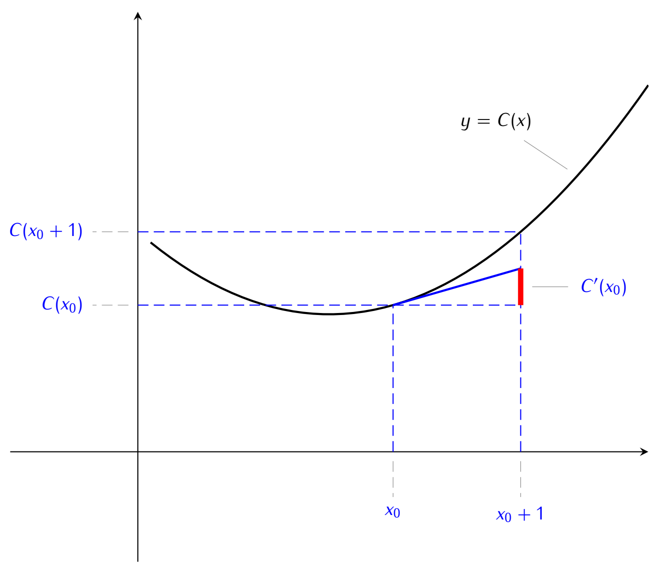


Figura 2.2: Costo marginal. En rojo se aprecia gráficamente el valor de $C'(x_0)$.

Ejemplo 2.2. Se estima que cuando se producen x unidades de cierto producto, el costo será de $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ miles de pesos, y que cuando x unidades se venden, el precio es de $p(x) = \frac{1}{3}(75-x)$ miles de pesos.

1. Encuentre el costo marginal, los ingresos marginales y la ganancia marginal.
2. Use el costo marginal para estimar el costo de producir la novena unidad. ¿Cuál es el costo real de dicha unidad?

3. Use el ingreso marginal para estimar el ingreso de vender la novena unidad. ¿Cuál es el ingreso real?

Solución. 1. El costo marginal es
$$C'(x) = \frac{1}{4}x + 3.$$
El ingreso total esta dado por $I(x) = x \cdot p(x) = \frac{x}{3}(75 - x) = 25x - \frac{x^2}{3}$, por lo tanto el ingreso marginal es
$$I'(x) = 25 - \frac{2}{3}x.$$
Finalmente la ganancia se puede calcular como $G(x) = I(x) - C(x) = 25x - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{1}{8}x^2 + 3x + 98\right) = -\frac{11}{24}x^2 + 22x - 98$, y la ganancia marginal es
$$G'(x) = I'(x) - C'(x) = 25 - \frac{2}{3}x - \left(\frac{1}{4}x + 3\right) = 22 - \frac{11}{12}x.$$

2. $C'(8) = 5$. Para obtener el costo real de la novena unidad calculamos $C(9) - C(8) = \frac{1081}{8} - 130 = \frac{41}{8} = 5{,}125$.

3. $I'(8) = \frac{59}{3} = 19{,}\bar{6}$ y el ingreso real es de $I(9) - I(8) = 198 - \frac{536}{3} = \frac{58}{3} = 19{,}\bar{3}$.

■

En términos un poco mas generales, uno puede utilizar la derivada para aproximar cualquier función. Recordemos que la derivada se puede definir como
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
luego si es que h es suficientemente pequeño, podemos escribir
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
o equivalentemente
$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h,$$
de donde obtenemos:

Teorema 2.1 (Aproximación por incrementos)**.** *Sea f una función diferenciable en x_0, y sea Δx un pequeño incremento en x, entonces*
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$
*Similarmente, si denotamos $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ al **cambio en la función**, entonces*
$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Ejemplo 2.3. Suponga que el costo total de producir q kilos de cierto producto es $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Si el nivel de producción es de 40 kilos, estimar como cambia el costo si es que se producen 40.5 kilos.

Solución. Sabemos que el costo de producir 40 kilos es de $C(40) = 3(40)^2 + 5(40) + 10 = 5010$, y nos piden estimar ΔC (el cambio en el costo) cuando $\Delta q = 0{,}5$ (el cambio en los kilos) y $q = 40$ (los kilos que inicialmente se producen), es decir

$$\Delta C \approx C'(40) \cdot 0{,}5.$$

Para ello calculamos $C'(q) = 6q + 5$ y $C'(40) = 245$, por lo tanto

$$\Delta C \approx \frac{245}{2} = 122{,}5.$$

Además, el costo total de producir 40,5 kilos puede ser aproximado por

$$C(40{,}5) \approx C(40) + C'(40) \cdot 0{,}5 = C(40) + \Delta C,$$

es decir, el costo inicial de producir 40 kilos, mas el *cambio* en el costo de producir medio kilo más, es decir

$$C(40{,}5) \approx 5010 + 122{,}5 = 5122{,}5.$$

Para comparar, notemos que el costo real de producir 40,5 kilos está dado por

$$C(40{,}5) = 3(40{,}5)^2 + 5(40{,}5) + 10 = 5133{,}25,$$

es decir, estamos cometiendo un error de $5133{,}15 - 5122{,}5 = 10{,}65$. ■

Otro uso que se le puede dar al teorema de aproximación es estimar errores de propagación.

Ejemplo 2.4. Un tecnólogo medico modela un tumor como una esfera, por lo que utiliza la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para calcular su volumen. Luego de un examen, determina que el diámetro del tumor de un paciente es de 2.5 cm, pero la máquina utilizada tiene un margen de error máximo de un 2 %. ¿Qué tan preciso es el cálculo del volumen?

Solución. Tenemos que $d = \frac{R}{2}$, por lo tanto $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, por lo que el volumen calculado por el tecnólogo es de

$$V = \frac{1}{6}\pi(2{,}5)^3 \approx 8{,}181\ cm^3.$$

Sin embargo hay un error de medición de un 2 %, es decir, la medida del diámetro puede crecer o disminuir en[1] $2{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}05$. Para estimar el posible error en el volumen, utilizamos el teorema de aproximación:

$$\Delta V \approx V'(d)\Delta d.$$

En nuestro caso $V'(d) = \frac{1}{2}\pi d^2$, $d = 2{,}5$ y $\Delta d = \pm 0{,}05$, por lo que

$$\Delta V \approx \frac{1}{2}\pi\,(2{,}5)^2 \cdot (\pm 0{,}05) \approx \pm 0{,}491\ cm^3.$$

[1] La variación se calcula como:

(error en la medición)=(medición)×(error porcentual).

O sea el volumen real debiese estar en

$$7{,}690 = 8{,}181 - 0{,}491 \precapprox V \precapprox 8{,}181 + 0{,}491 = 8{,}672.$$

■

Otra situación típica es la "inversa", es decir, deseamos producir una variación determinada en la función, por lo que queremos saber cuanto debemos cambiar en x para obtener dicha variación.

Ejemplo 2.5. La producción de una fábrica es $Q(L) = 900L^{\frac{1}{3}}$ unidades, donde L es el número de trabajadores. En la actualidad hay 1000 trabajadores, y se nos pide estimar cuántos trabajadores adicionales se requieren para aumentar la producción en 15 unidades.

Solución. Si usamos el teorema de aproximación, tenemos que

$$\Delta Q \approx Q'(L)\Delta L.$$

Lo que queremos saber en este caso es ΔL, conociendo que $L = 1000$ y que $\Delta Q = 15$, es decir

$$\Delta L \approx \frac{\Delta Q}{Q'(L)} = \frac{15}{Q'(1000)},$$

pero $Q'(L) = 300L^{-\frac{2}{3}}$, de donde $Q'(1000) = \dfrac{300}{(1000)^{\frac{2}{3}}} = 3$, por lo tanto

$$\Delta L \approx \frac{15}{3} = 5,$$

es decir, se necesitan alrededor de 5 trabajadores adicionales. ■

2.2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Dada la función de costo $C(x)$ y el precio $p(x)$, determine: el costo marginal, el ingreso marginal y la ganancia marginal de producir la cuarta unidad.

1. $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 57$, $p(x) = \frac{1}{4}(36 - x)$.
2. $C(x) = \frac{5}{9}x^2 + 5x + 73$, $p(x) = -x^2 - 2x + 33$.

Ejercicio 2.2. Estime cuanto varia la función dada cuando se produce el incremento mencionado.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$, cuando x cambia de 5 a 5,3.
2. $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - 3$, cuando x cambia de 4 a 3,8.

Ejercicio 2.3. Un estudio medioambiental sugiere que en t años, el nivel de monóxido de carbono en el aire será de

$$C(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4 \quad \text{partes por millon.}$$

Aproximadamente, ¿Cuánto variará el nivel del monóxido de carbono en los próximos 6 meses?

Ejercicio 2.4. Un estudio de eficiencia determina que el trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá producido

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15 \quad \text{unidades}$$

x horas mas tarde. Aproximadamente, ¿Cuántas unidades producirá el trabajador entre las 9:00 a.m y las 9:15 a.m.?

Ejercicio 2.5. Una empresa avícola estima que la producción semanal de huevos puede ser modelada por la función $H(g) = 30g^{\frac{2}{3}}$, donde g representa el número de gallinas. En la actualidad, la empresa cuenta con 100 gallinas. Estime cuantas gallinas adicionales se necesitan para incrementar la producción de huevos en 10 huevos por semana.

Ejercicio 2.6. La ley de Stefan-Boltzmann en física dice que un cuerpo emite energía térmica de acuerdo a la fórmula $E(T) = \sigma T^4$, donde E es la cantidad de energía emitida por una superficie a temperatura T (medida en grados Kelvin), y σ es la constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$. Estime el cambio porcentual en E que se produce al incrementar la temperatura T en un 2 %.

Ejercicio 2.7. Un tumor canceroso es modelado como una esfera de radio r.

1. ¿A qué tasa está cambiando el volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ con respecto a r cuando $r = 0{,}75$ cm.?
2. Estime el error porcentual máximo que se puede permitir a la medición del diámetro del tumor, si es que se quiere garantizar un error en el cálculo del volumen no mayor a un 8 %.

2.3. Modelos exponenciales y logarítmicos

Modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial

En estos casos suponemos que la función se comporta como una función exponencial, es decir

$$Q(t) = Ae^{kt} \quad \text{o bien} \quad Q(t) = Ae^{-kt},$$

donde A y k son constantes positivas. Este tipo de funciones sirve para modelar, por ejemplo, el crecimiento no acotado (cuando $Q(t) = Ae^{kt}$) o decrecimiento hasta la extinción (cuando $Q(t) = Ae^{-kt}$) de una población.

Ejemplo 2.6. La densidad de población a x km. del centro de una ciudad es modelada mediante una función exponencial:

$$Q(x) = Ae^{-kx} \quad \text{miles de personas por km}^2.$$

Encuentre la función si la densidad en el centro del la ciudad es de 15 mil personas por km^2, y a 10 km. del centro es de 9 mil personas por km^2. ¿Cuál es la densidad de población a 20 km. del centro? ¿Cuál es la tasa de cambio de la densidad de población a 20 km. del centro?

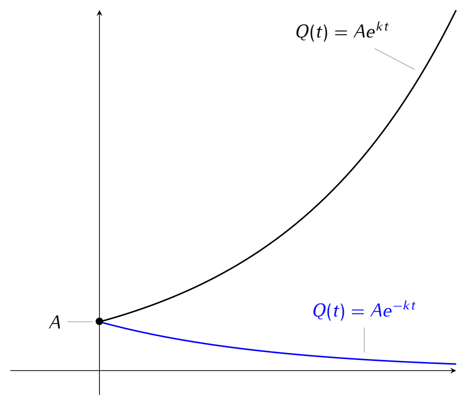


Figura 2.3: Modelos exponenciales.

Solución. La densidad en el centro de la ciudad es cuando $x = 0$, es decir $Q(0) = A = 15$ mil personas por km^2. Por otra parte, la densidad a 10 km. del centro es $Q(10) = 9$ mil personas por km^2, de donde deducimos que $9 = 15e^{-10k}$, o sea $k = -\frac{1}{10}\ln\frac{3}{5}$.

Finalmente calculamos $Q(20) = 15e^{2\ln\frac{3}{5}} = 15\cdot\frac{3^2}{5^2} = \frac{27}{5} = 5{,}4$ miles de personas por km^2. Además $Q'(t) = -Ake^{-kt} = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{5}e^{\frac{t}{10}\ln\frac{3}{5}}$, de donde $Q'(20) = \frac{27}{50}\ln\frac{3}{5}$. ■

Curvas de aprendizaje

Usamos una función de la forma

$$Q(t) = B - Ae^{-kt},$$

donde A, B y k son constantes positivas. Este tipo de funciones sirve para modelar, por ejemplo, la relación entre la eficiencia de un individuo respecto a la experiencia que éste tenga, así como cierto tipo de poblaciones en ecosistemas acotados.

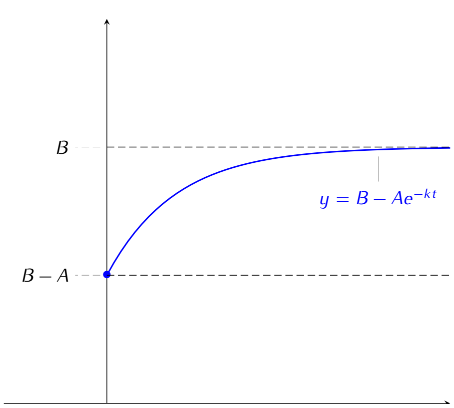


Figura 2.4: Curva de aprendizaje.

Ejemplo 2.7. La tasa a la que un trabajador cosecha uvas es una función de su experiencia. Se estima que un trabajador promedio cosecha, luego de t meses,

$$Q(t) = 700 - 400e^{-0{,}5t} \quad \text{racimos de uva al día.}$$

1. ¿Cuántos racimos cosecha un trabajador nuevo?
2. ¿Cuántos racimos cosecha un trabajador con 2 meses de experiencia?
3. Aproximadamente, ¿cuántos racimos cosecharía un trabajador si llevara "una vida" trabajando?

Solución. 1. Un trabajador nuevo cosecha $Q(0) = 300$ racimos de uva.

2. Luego de 2 meses, un trabajador cosecha $Q(2) = 700 - 400e^{-1} \approx 552{,}85$ racimos de uva.
3. Esto quiere decir que lo máximo que puede cosechar un trabajador es $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 700$ racimos de uva.

Curvas logísticas

Otra función similar a la curva de aprendizaje es la llamada *Curva logística*. Dicha función se puede escribir como

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-kt}},$$

donde A, B y k son constantes positivas.

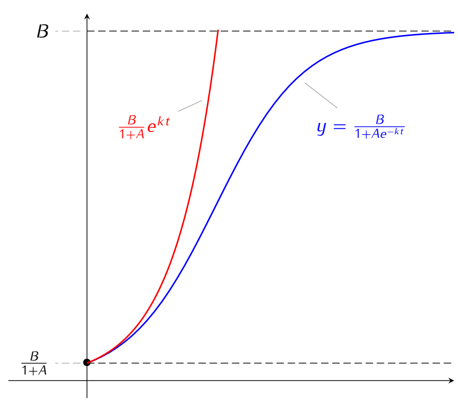


Figura 2.5: Curva logística y su crecimiento exponencial al comienzo.

La principal diferencia con la curva de aprendizaje, es que esta curva tiene un comportamiento similar a la curva exponencial $y = \frac{B}{1+A}e^{kt}$ para valores pequeños de t. Esta curva se utiliza usualmente para modelar poblaciones en un ecosistema con recursos finitos donde inicialmente hay un *crecimiento exponencial* de la población. La cantidad B denota la *capacidad máxima* que tiene dicho ecosistema.

Teorema 2.2 (Derivadas de la función logística). *Sea* $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-kt}}$ *una función logística de parámetros* $A,\ B,\ k > 0$. *Tenemos que*

1. $Q'(t) = \dfrac{ABke^{-kt}}{\left(1 + Ae^{-kt}\right)^2}$.

2. $Q''(t) = \dfrac{ABk^2e^{-kt}}{\left(1 + Ae^{-kt}\right)^3}\left(Ae^{-kt} - 1\right)$.

Ejercicio 2.8. Un buen ejercicio de cálculo es demostrar el teorema anterior, es decir, calcular las derivadas de $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-kt}}$ asumiendo que $A,\ B,\ k$ son constantes.

Ejemplo 2.8. Un apicultor estima que t meses después de establecida una colmena, la cantidad de abejas que tendrá estará dada por

$$Q(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}.$$

1. Determine la población inicial de abejas.
2. ¿Cuántas abejas habrán al cabo de 3 meses?
3. ¿A qué tasa se reproducen las abejas luego de 3 meses?
4. ¿Cuándo las abejas se reproducen con mayor rapidez?
5. Determine la capacidad máxima de la colmena.

Solución.

1. El apicultor empezó con $Q(0) = \dfrac{1000}{1 + 9} = 100$ abejas.

2. Luego de 3 meses habrán $Q(3) = \dfrac{1000}{1 + 9e^{-3}} \approx 691$ abejas.

3. La tasa de reproducción está dada por $R(t) = Q'(t) = \dfrac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^2}$, por lo que la tasa al tercer mes es
$$R(3) = \frac{9000e^{-3}}{(1 + 9e^{-3})^2} \approx 214 \quad \text{abejas por mes.}$$

4. Para determinar esto, debemos *maximizar* la tasa de reproducción, es decir, debemos encontrar el máximo de la función
$$R(t) = \frac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^2}.$$
Para ello encontramos sus puntos críticos, es decir, debemos mirar $R'(t)$. Si hacemos el cálculo, obtenemos que:
$$R'(t) = Q''(t) = \frac{9000e^{-t}}{(1 + 9e^{-t})^3}\left(9e^{-t} - 1\right).$$

De aquí deducimos que hay solo un punto crítico, que satisface $9e^{-t} - 1 = 0$, es decir $t = \ln 9 \approx 2{,}197$. Además podemos usar el test de la primera derivada, ya que $R'(t) > 0$ cuando $t < \ln(9)$ y $R'(t) < 0$ cuando $t > \ln(9)$, por lo que $t = \ln(9)$ es un máximo para $R(t)$.

En otras palabras, hemos maximizado $Q'(t)$, la tasa de reproducción.

Observación. En este punto es importante no confundirse en los conceptos. Nos piden maximizar una tasa, es decir, maximizar una derivada. Lo conveniente es denotar a la derivada con un nuevo nombre, en este caso llamamos $R(t) = Q'(t)$ y "olvidarnos" que $R(t)$ es la derivada de otra función. Luego procedemos de la manera habitual para maximizar la función $R(t)$.

5. La capacidad máxima de la colmena es de $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 1000$ abejas.

■

Otro uso habitual es en el de modelamiento de epidemias o plagas. En este caso, la cantidad B denota la cantidad máxima de individuos susceptibles a ser contagiados.

Ejemplo 2.9. El ministerio de Salud estimó que t semanas después del brote de la gripe porcina, aproximadamente

$$Q(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1{,}5t}} \quad \text{miles de personas}$$

se habían contagiado en Chile.

1. ¿Cuántas personas tenían la gripe al comienzo de la epidemia? ¿Cuántos contagiados habían luego de 2 semanas?
2. ¿Cuándo comenzó a decaer la tasa de infección?
3. ¿Cuánta gente estará eventualmente enferma?

Solución.

1. La cantidad inicial de infectados es de $Q(0) = 1$ (o sea mil personas) y al cabo de 2 semanas habían $Q(2) = \dfrac{20}{1 + 19e^{-3}} \approx 10{,}28$ miles de personas contagiadas.
2. La tasa de infección comienza a decaer luego de alcanzar su máximo, es decir, debemos encontrar el máximo de

$$R(t) = Q'(t) = \frac{570e^{-1{,}5t}}{(1 + 19e^{-1{,}5t})^2}.$$

Para ello encontramos sus puntos críticos, es decir, debemos calcular

$$R'(t) = Q''(t) = \frac{855e^{-1{,}5t}\left(19e^{-1{,}5t} - 1\right)}{(1 + 19e^{-1{,}5t})^3}$$

de donde deducimos que el único punto crítico satisface $19e^{-1{,}5t} - 1 = 0$, o sea $t = \dfrac{\ln 19}{1{,}5} \approx 1{,}96 \approx 2$ semanas. Ejercicio propuesto: verificar que efectivamente este punto crítico es un máximo para $Q'(t)$.

3. La cantidad de personas que se eventualmente se enfermara está dada por $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 20$ mil personas.

■

También hay situaciones en que un modelo logarítmico es pertinente:

Ejemplo 2.10. Se ha estimado que luego de los 8 años, la capacidad aeróbica de una persona de x años de edad puede ser modelada por la función

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}, \quad x \geq 8.$$

1. Bosqueje el gráfico de $A(x)$.
2. ¿A qué edad una persona alcanza su peak de capacidad aeróbica?
3. ¿A qué edad la capacidad aeróbica decrece con mayor rapidez?

Solución. Para encontrar el peak, debemos determinar los números críticos. $A'(x) = \dfrac{110}{x^2}(3 - \ln x)$, de donde deducimos que $x = e^3 \approx 20{,}09$ es el único punto crítico. Si analizamos la función, nos damos cuenta que cuando $0 < x < e^3$ la función es creciente, y cuando $x > e^3$ la función es decreciente, por lo que cuando $x = e^3 \approx 20$ es cuando se alcanza el peak de la capacidad aeróbica.

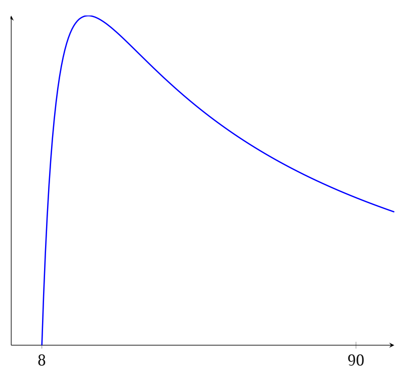


Figura 2.6: Gráfico de $A(x)$.

La segunda pregunta nos pide encontrar cuando la capacidad aeróbica decrece con mayor rapidez, esto es, cuando $A'(x)$ es lo mas negativa posible. En otras palabras, debemos encontrar el mínimo absoluto de $A'(x)$. Para ello encontramos $A''(x) = \frac{110}{x^3}(2\ln x - 7)$, de donde $x = e^{\frac{7}{2}} \approx 33{,}12$ es el único número crítico para A'. Si analizamos A', notamos que A' decrece cuando $0 < x < e^{\frac{7}{2}}$ y crece cuando $x > e^{\frac{7}{2}}$, por lo tanto $x \approx 33$ es el mínimo absoluto para A'.

Notamos que cuando $x = e^{\frac{7}{2}}$, entonces $A'(e^{\frac{7}{2}}) = -55e^{-7} < 0$ es decir, la capacidad aeróbica esta decreciendo en este instante a su máxima rapidez. ■

2.3.1. Ejercicios

Ejercicio 2.9. Se estima que en t años, la población de cierto país será $P(t) = 50e^{0,02t}$ millones de habitantes.

1. ¿Cuál es la población actual del país?
2. ¿Cuál será la población en 20 años?
3. ¿A qué tasa está cambiando la población luego de t años?

Ejercicio 2.10. Se estima que luego de t semanas trabajando, un trabajador postal es capaz de despachar $Q(t) = 20 - 10e^{-3t}$ paquetes por día.

1. ¿Cuántos paquetes despacha un trabajador recién contratado?
2. ¿Cuántos paquetes despacha el trabajador luego de 1 mes trabajando?
3. ¿Cuántos paquetes puede aspirar a despachar un trabajador con mucha experiencia?

Ejercicio 2.11. Una epidemia se propaga en una comunidad de tal forma que después de t semanas después de su aparición, el número de individuos contagiados está dado por la función

$$f(t) = \frac{A}{1 + Ce^{-kt}},$$

donde A es la cantidad total de individuos susceptibles a la infección y C, k son constantes positivas. Determine el tiempo y la cantidad de individuos cuándo la epidemia se propaga a su mayor velocidad.

Ejercicio 2.12. Un estudio determina que luego de t horas de introducida una toxina a una colonia de bacterias, la población será de

$$P(t) = 10000\left(7 + 15e^{-0,05t} + te^{-0,05t}\right).$$

1. ¿Cuál es la población en el momento en que se introduce la toxina?
2. ¿En qué momento la población alcanza su máximo? ¿Cuál es la máxima población?
3. ¿Qué sucede eventualmente ($t \to +\infty$) con la colonia de bacterias?

Ejercicio 2.13. Una empresa de seguros estima que bajo ciertas condiciones, la probabilidad de que una persona fallezca conduciendo su vehículo a los x años es de

$$P(x) = xe^{-x}$$

1. Encuentre el máximo valor de $P(x)$ y la edad a la que esto ocurre.
2. Estime la probabilidad de morir manejando de un recién nacido y de un anciano.

3. Bosqueje el gráfico de $P(x)$.

Ejercicio 2.14. El encargado de un zoológico estima que la función

$$f(x) = \frac{4e^{-(\ln x)^2}}{x}, \quad x > 0.$$

entrega una buena estimación de la cantidad de animales en el zoológico que tienen x años de edad.

1. Bosqueje el gráfico de la función cuando $x > 0$. Hint: La función es siempre positiva y satisface

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

2. Determine cuál es la edad más común entre los animales. Hint: la edad más común es donde la cantidad de animales es mayor.

Ejercicio 2.15. Suponga que para un organismo de x años de edad, la tasa de reproducción per cápita está determinada por

$$R(x) = \frac{\ln\left(100x^2e^{-x}\right)}{x}$$

¿Cuál es la edad óptima para la reproducción? ¿Cuál es la tasa de reproducción a esa edad? Hint: La edad óptima para la reproducción se alcanza cuando la tasa de reproducción es máxima.

2.4. Funciones de dos variables

Usualmente en aplicaciones nos encontramos con modelos que involucran mas de una variable independiente. A modo de ejemplo recordamos el problema de la cerca desarrollado en el Ejemplo 2.1: en dicho caso teníamos las variables x e y que representaban el ancho y el largo de la cerca, por lo que la función que modela la cantidad de cerca puede ser escrita como

$$L(x, y) = 2x + y.$$

Esta es una típica función de dos variables. A continuación tenemos la definición de tales funciones:

Definición 2.1. *Una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en un dominio D, un único valor real $f(x, y)$.*

Es importante remarcar que en aplicaciones lo que usualmente se entrega es una fórmula para $f(x, y)$ donde el dominio está "implícitamente" definido como el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales la función esta bien definida.

En el ejemplo de la cerca, debe quedar claro que el dominio de la función $L(x, y)$ son todos los pares (x, y) tales que $x > 0$ e $y > 0$, esto pues ambas cantidades representan la longitud de un segmento. Esto suele ocurrir cuando las variables tienen alguna connotación relativa a un problema real, en el caso del ejemplo, las distancias son siempre positivas.

Por otra parte, hay situaciones en las que no hay una interpretación clara del significado de las variables. En tales casos la misma fórmula nos permite encontrar el dominio de la función. Dicha situación se muestra en los siguiente ejemplos,

Ejemplo 2.11.

1. Sea $f(x,y) = \dfrac{3x^2+5y}{x-y}$. Determine el dominio de f y calcule $f(2,3)$.

   Solución. Para que f esté bien definida, nos debemos preocupar de no dividir por 0. Es decir, $x-y \neq 0$ o equivalentemente $x \neq y$.

   De lo anterior tenemos que el punto $(2,3)$ pertenece al dominio, por lo que podemos calcular

   $$f(2,3) = \frac{3(2)^2+5(3)}{2-3} = -27.$$

2. Sea $g(x,y) = xe^y + \ln x$. Determine el dominio de g y calcule $g(e^2,e)$.

   Solución. Aquí la función está indefinida cuando $x \leq 0$, puesto que el logaritmo natural solo esta definido para valores positivos, de donde concluimos que el dominio son todos los pares ordenados (x,y) tales que $x > 0$.

   Como $e^2 > 0$ tenemos que el par (e^2,e) pertenece al dominio, luego calculamos

   $$g(e^2,e) = e^2 \cdot e^e + \ln e^2 = e^{2+e} + 2.$$

3. Sea $h(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Determine el dominio de h y calcule $h(1,2)$.

   Solución. En este caso nos debemos preocupar que lo que se encuentra dentro de la raíz cuadrada sea mayor que 0, es decir: $9-x^2-y^2 \geq 0$, o equivalentemente $x^2+y^2 \leq 9$.

   Vale la pena recordar que la ecuación en el plano cartesiano de una circunferencia de radio R centrado en las coordenadas (x_0,y_0) está dada por

   $$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

   Además, el conjunto de los pares (x,y) tales que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq R^2$ corresponde a los pares que se encuentran dentro de la circunferencia.

   Finalmente notamos que $(1,2)$ está en el domino de la función, por lo que calculamos

   $$h(1,1) = \sqrt{9-1^2-2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

4. Sea $f(x,y) = \log_2(x+y-4)$. Determine el dominio de f.

   Solución. Ahora la condición es que $x+y-4 > 0$, es decir el domino es el conjunto de todos los pares (x,y) tales que $x+y > 4$. Un buen ejercicio es determinar como se puede graficar este dominio.

Ejemplo 2.12. Suponga que en cierta fábrica se estima que la producción de cierto producto está dada por

$$Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} \quad \text{unidades},$$

donde K es el capital invertido (en millones de pesos) y L es la cantidad de trabajadores.

1. Encuentre la producción si el capital es de \$512 millones y de 1.000 trabajadores.

   Solución. Debemos calcular $Q(512, 1000)$, es decir

   $$Q(512, 1000) = 60 \cdot (512)^{\frac{1}{3}} \cdot (1000)^{\frac{2}{3}} = 60 \cdot 8 \cdot 100 = 48{,}000.$$

2. ¿Qué sucede si se duplican el capital y la cantidad de trabajadores?

   Solución. Si el capital inicial es K y la cantidad de trabajadores es L, entonces debemos calcular $Q(2K, 2L)$.

   $$Q(2K, 2L) = 60(2K)^{\frac{1}{3}}(2L)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = 2Q(K, L),$$

   en otras palabras, la producción se duplica.

Ejemplo 2.13. Una población de 5 millones de habitantes crece exponencialmente como

$$P(k, t) = 5e^{kt},$$

donde k es la tasa de crecimiento (per cápita) anual y t es la cantidad de años transcurridos. ¿Cuál será la población dentro de 7 años si es que la población crece a un 3 % anual?

Solución. Tenemos que $k = 0{,}03$ y $t = 7$, de donde la población dentro de 7 años será $P(0{,}03, 7) = 5e^{0{,}03 \cdot 7} \approx 6{,}16839$ millones de habitantes.

2.4.1. Ejercicios

Ejercicio 2.16. Calcule el valor de la función en los valores dados:

1. $f(x, y, z) = xe^y + ye^x$; $f(1, 1)$, $f(\ln 2, \ln 3)$.
2. $g(x, y) = \log_2(x + y^2)$; $g(1, 1)$, $g(7, 5)$.
3. $h(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; $h(-1, 0)$, $h(10, -5)$.

Ejercicio 2.17. Encuentre el domino de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \dfrac{5x + 4y}{3x - 5y}$.
2. $g(x, y) = \dfrac{x}{\ln(x + y)}$.
3. $h(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{1 + x^2}$.
4. $j(x, y) = \dfrac{\log_2(1 - x^2)}{x - y^2}$.

Ejercicio 2.18. El coeficiente intelectual de una persona se mide mediante la siguiente fórmula

$$C(a, m) = \frac{100m}{a},$$

donde a es la edad fisiológica de la persona, y m es la *edad mental* de la persona.

1. Encuentre el domino de la función C.

2. ¿Cuál es el coeficiente intelectual de una persona de 20 años de edad con una edad mental de 18 años?

3. ¿Cuál es el coeficiente intelectual de una persona que tiene la misma edad mental que su edad fisiológica?

Ejercicio 2.19. La ley de Poiseuille dice que la velocidad de la sangre V en cm/s que fluye a r cms. del eje central del vaso sanguíneo de radio R cms. y largo L cms. está dada por

$$V(r, R, L, P) = \frac{9{,}3P}{L}\left(R^2 - r^2\right)$$

donde P es la presión del vaso en dinas/cm^2. Suponga que para un vaso sanguíneo en particular, se determina que su radio es de 0,0075 cms. y es de 1,675 cms. de largo.

1. Escriba la función V como una función solo de R y P. Determine su dominio.

2. ¿Qué tan rápido fluye la sangre a 0,004 cms. del eje si la presión es de 3,875 dinas/cm^2.?

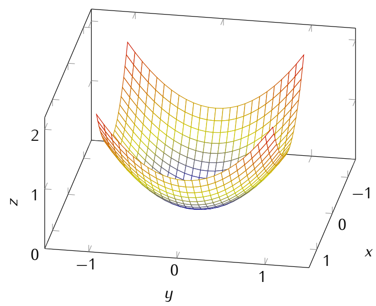
Nota: "dina" es una medida de fuerza tal que 100000 dinas equivalen a 1 Newton.

2.4.2. Gráficos de funciones

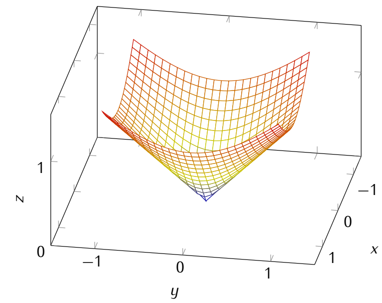
A diferencia de las funciones de una variable, las funciones de dos variables deben ser graficadas en el espacio tridimensional. A continuación observaremos algunos gráficos de dichas funciones.

Ejercicio 2.20. Investigar sobre como graficar funciones de dos variables usando herramientas computacionales. Una manera simple de hacer esto es utilizar Google:

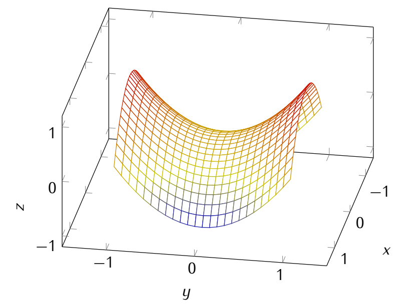
`http://www.google.cl/search?q=x^2%2By^2+from+-2+to+2`



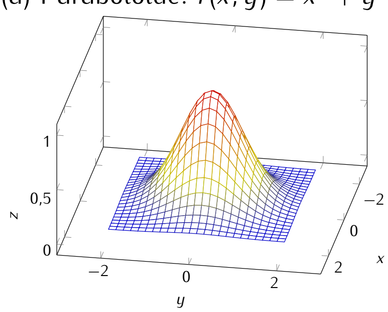
(a) Paraboloide: $f(x, y) = x^2 + y^2$.



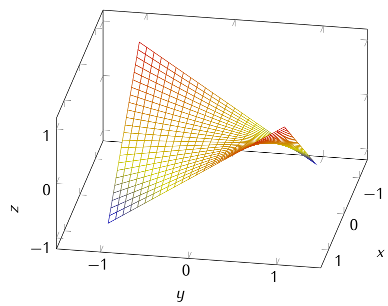
(b) Cono: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.



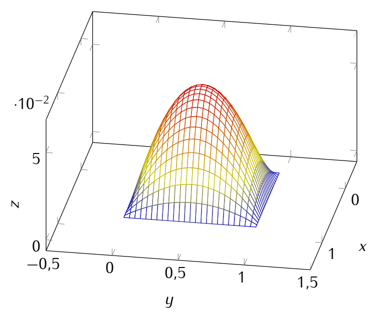
(c) Silla de montar: $f(x, y) = y^2 - x^2$.



(d) $f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.



(e) $f(x, y) = xy$.



(f) $f(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)$.

Figura 2.7: Gráficos de algunas funciones de dos variables.

2.5. Derivadas parciales

Como vimos en los problemas de una variable, conocer las derivadas de una función es de gran utilidad, por ejemplo para obtener puntos críticos, lo que en aplicaciones nos permite resolver problemas de optimización.

Es por ello que debemos generalizar el concepto de derivada para el caso en que tratamos con funciones de dos variables:

Definición 2.2. *Suponga que $z = f(x, y)$ es una función de dos variables. La derivada parcial de f con respecto a x es la función que resulta de derivar con respecto a x la $f(x, y)$ asumiendo que y es constante. Denotamos dicha derivada parcial como*

$$f_x(x, y) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Similarmente, la derivada parcial de f con respecto a y es la función que resulta de derivar con respecto a y la $f(x, y)$ asumiendo que x es constante, y la denotamos como

$$f_y(x, y) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Si ambas derivadas existen, decimos que la función es diferenciable.

Ejemplo 2.14. Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = 2x$.
   - $f_y(x,y) = 2y$.

2. $f(x,y) = x\ln(x+y)$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = \ln(x+y) + \dfrac{x}{x+y}$.
   - $f_y(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$.

3. $f(x,y) = \text{sen}(xe^y)$.

   Solución.
   - $f_x(x,y) = e^y\cos(xe^y)$.
   - $f_y(x,y) = xe^y\cos(xe^y)$.

Así como tenemos el concepto de derivada parcial, también podemos hablar de las derivadas de segundo orden. Una observación importante es que a diferencia del caso de una variable, para funciones de dos variables hay mas de una segunda derivada:

Definición 2.3. *Suponga que $z = f(x,y)$ es una función de dos variables. Tenemos cuatro derivadas de segundo orden, las que se obtienen de la siguiente manera:*

- $f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a x de la derivada parcial respecto a x,*
- $f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a y de la derivada parcial respecto a y,*
- $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a y de la derivada parcial respecto a x, y*
- $f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, *que es la función que resulta de calcular la derivada parcial respecto a x de la derivada parcial respecto a y.*

Si todas las derivadas de segundo orden existen, decimos que la función es dos veces diferenciable.

Ejemplo 2.15. Encuentre las derivadas de segundo orden de las siguiente funciones:

1. $f(x, y) = x^3 + y^3$.

 Solución.
 - $f_x(x, y) = 3x^2$.
 - $f_y(x, y) = 3y^2$.
 - $f_{xx}(x, y) = 6x$.
 - $f_{yy}(x, y) = 6y$.
 - $f_{xy}(x, y) = 0$.
 - $f_{yx}(x, y) = 0$.

2. $f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$.

 Solución.
 - $f_x(x, y) = y^3 + 5y + 2$.
 - $f_y(x, y) = 3xy^2 + 5x$.
 - $f_{xx}(x, y) = 0$.
 - $f_{yy}(x, y) = 6xy$.
 - $f_{xy}(x, y) = 3y^2 + 5$.
 - $f_{yx}(x, y) = 3y^2 + 5$.

3. $f(x, y) = e^{xy+2x^2}$.

 Solución.
 - $f_x(x, y) = (y + 4x)e^{xy+2x^2}$.
 - $f_y(x, y) = xe^{xy+2x^2}$.
 - $f_{xx}(x, y) = \left(4 + (y + 4x)^2\right) e^{xy+2x^2}$.
 - $f_{yy}(x, y) = x^2 e^{xy+2x^2}$.
 - $f_{xy}(x, y) = (1 + x(y + 4x))\, e^{xy+2x^2}$.
 - $f_{yx}(x, y) = (1 + x(y + 4x))\, e^{xy+2x^2}$.

Como observamos en todos los ejemplos anteriores, las funciones $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son iguales. Esto no es casualidad, de hecho para (casi[2]) todas las funciones se tiene que $f_{xy} = f_{yx}$. Es por esto que en los ejercicios solo necesitamos calcular tres derivadas de segundo orden.

Otro tópico de importancia es el relativo a la regla de la cadena cuando las funciones tienen dos variables. Recordemos que cuando teníamos una función de una variable $y = f(x)$ era habitual introducir

[2] Las funciones para las que esto no es cierto son bastante patológicas. Una de estas funciones es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0). \end{cases}.$$

Este tipo de funciones raramente aparece en aplicaciones, por lo que no nos preocuparemos de ellas.

el concepto de que x dependía una tercera variable t, y nos interesaba saber como depende y de dicha variable, es decir, nos interesaba calcular $\frac{dy}{dt}$. Para ello usábamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

En el caso de dos variables, lo que sucede es que tenemos que $z = f(x, y)$ y tanto x como y dependen de una cuarta variable t. Para obtener la tasa de cambio de z respecto a t necesitamos generalizar la regla de la cadena que conocemos para una variable.

Teorema 2.3 (Regla de la cadena)**.** *Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable, y supongamos que x e y son funciones de t, es decir, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces z se puede considerar como una función de t y tenemos que*

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Ejemplo 2.16. Dada la funciones $z = f(x, y)$, $x(t)$ e $y(t)$, calcule $\frac{dz}{dt}$.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = 1 + t$, $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x, \\ f_y(x, y) &= 2y, \\ \frac{dx}{dt} &= 1, \\ \frac{dy}{dt} &= 2t - e^{-t}, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = 2x + 2\left(2t - e^{-t}\right) y.$$

2. $f(x, y) = x \ln x$, $x(t) = t^{\frac{1}{3}}$, $y(t) = t + \frac{1}{t}$.

   Solución. En este caso

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \ln x + 1, \\ f_y(x, y) &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \ln x\right).$$

3. $f(x,y) = \cos(x^2 + xy)$, $x(t) = \dfrac{1}{t+1}$, $y(t) = \operatorname{sen} t$.

   Solución. Calculamos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -(2x+y)\operatorname{sen}(x^2+xy), \\ f_y(x,y) &= -x\operatorname{sen}(x^2+xy), \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{(t+1)^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(2x+y)\operatorname{sen}(x^2+xy)}{(t+1)^2} - x\operatorname{sen}(x^2+xy)\cos t.$$

2.5.1. Ejercicios

Ejercicio 2.21. Calcule las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy - 5x + 6y - 90$.
2. $f(x,y) = 50e^{xy}$.
3. $f(x,y) = x - 5e^{-xy}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+10e^{-xy}}$.
5. $f(x,y) = \cos^2(x+y)$.
6. $f(x,y) = \dfrac{e^{2-x}}{x-y}$.
7. $f(x,y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$.

Ejercicio 2.22. Dadas las funciones $z = f(x,y)$, $x(t)$ e $y(t)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

1. $f(x,y) = 300 - 20x^2 + 40y$, $x(t) = 100$, $y(t) = 150 - \sqrt{t}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{3x}{y}$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2 - 1$.
3. $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$, $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln t$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $x(t) = t^3 + \dfrac{1}{t^3}$, $y(t) = \cos t$.

2.6. Optimización de funciones de dos variables

Hasta ahora hemos visto problemas de optimización en una variable, sin embargo hay situaciones en las que se requieren mas de una variable independiente para modelar ciertos problemas, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.17. Se desea construir una piscina para contener 4 m^3 de agua[3]. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina que minimizan la cantidad de revestimiento del interior de la piscina?

[3] 1 m^3 ≈1000 litros.

Para resolver este problema es conveniente hacer un dibujo (Figura 2.8) para visualizar las variables pertinentes

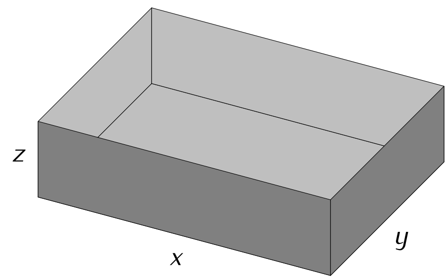


Figura 2.8: Piscina.

Como vemos, el problema consiste en minimizar la superficie de la piscina, es decir, minimizar la función de tres variables

$$S(x, y, z) = 2xz + 2zy + xy$$

bajo la restricción de que el volumen de la piscina es de 4 m^3, es decir

$$V = xyz = 4.$$

Tal como en el ejemplo de la cerca (Ejemplo 2.1), podemos usar la segunda ecuación para reducir el número de variables. Por ejemplo, podemos escribir que

$$z = \frac{4}{xy},$$

de donde reemplazando en la función S obtenemos la función de dos variables

$$S(x, y) = \frac{8}{y} + \frac{8}{x} + xy.$$

Es decir, nuestro problema ha sido reducido al siguiente problema de cálculo:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x} + xy, \\ \text{sujeto a que } x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{O}$$

¿Cómo resolvemos este problema?

2.6.1. Extremos relativos y puntos críticos en dos variables

Definición 2.4 (Extremos relativos). *Decimos que la función f tiene un*

- *Máximo relativo en el punto (a, b), si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) "cerca" de (a, b);*

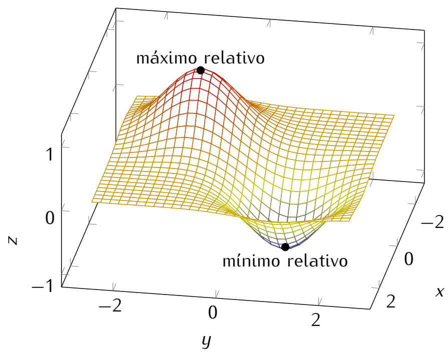


Figura 2.9: Extremos relativos

- *Mínimo relativo en el punto (a,b), si $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) "cerca" de (a,b);*

Al igual que en el caso de una variable, para encontrar extremos relativos, la herramienta crucial es la derivada

Definición 2.5 (Puntos Críticos). *Dada una función diferenciable f, decimos que (a,b) es un punto crítico*[4] *si*

$$f_x(a,b) = 0 \quad y \quad f_y(a,b) = 0.$$

Ejemplo 2.18. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Solución. Ejemplo resuelto en clases. ■

Así como en problemas de una variable, los puntos críticos son *candidatos* a ser extremos relativos, como lo muestra el siguiente teorema

Teorema 2.4. *Si las derivadas parciales de primer orden existen, entonces los extremos relativos se encuentran en los puntos críticos.*

El teorema anterior nos da una herramienta para encontrar extremos relativos: primero debemos encontrar los puntos críticos y luego chequeamos cual de estos es un máximo o mínimo relativo.

Ejemplo 2.19. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3$.

Solución. Tenemos que $f_x(x,y) = 3x^2$ y $f_x(x,y) = 3y^2$, luego $(0,0)$ es el único punto crítico. ■

¿Cómo determinamos si un punto crítico es un extremo relativo?

A diferencia del caso de una variable donde teníamos el test de la primera derivada, cuando trabajamos con dos variables dicho test no puede ser aplicado. Sin embargo existe un test de la segunda derivada

[4]Así como en el caso de una variable, puede darse la situación que la función no tenga derivadas en (a,b): En dicho caso, (a,b) también es un punto crítico. En este curso no nos preocuparemos de dichos casos.

Teorema 2.5 (Test de la segunda derivada para extremos relativos)**.** *Dada una función dos veces diferenciable, definimos la función*

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 .$$

Para encontrar los extremos relativos seguimos el siguiente procedimiento:

1. *Encontramos los puntos críticos de la función.*
2. *Para cada punto crítico (a,b), evaluamos $D(a,b)$.*
3. *Si $D(a,b) > 0$, entonces evaluamos $f_{xx}(a,b)$:*
   - *Si $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces (a,b) es un mínimo relativo.*
   - *Si $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces (a,b) es un máximo relativo.*
   - *Si $f_{xx}(a,b) = 0$, entonces no podemos decir nada acerca de (a,b).*
4. *Si $D(a,b) < 0$, entonces (a,b) es un* punto silla. *Este tipo de puntos* no es un extremo relativo.
5. *Si $D(a,b) = 0$, entonces no podemos decir nada acerca de (a,b).*

El teorema anterior se puede resumir con el siguiente cuadro: Sea (a,b) un punto crítico para f, entonces

signo de $D(a,b)$	signo de $f_{xx}(a,b)$	(a,b) es un
$+$	$+$	mínimo relativo
$+$	$-$	máximo relativo
$-$		punto silla

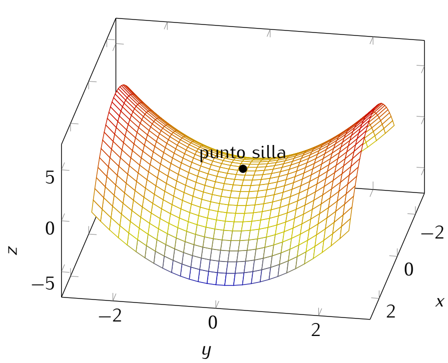


Figura 2.10: La función $f(x,y) = y^2 - x^2$ tiene un punto silla en $(0,0)$.

Ejemplo 2.20. Encuentre los extremos relativos y puntos sillas de las siguiente funciones:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   Solución. Ejemplo resuelto en clases.

2. $f(x, y) = y^2 - x^2$ (Ver figura 2.10).

   Solución. En este caso $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, luego $(0, 0)$ es el único punto crítico. Si calculamos $D(x, y)$, obtenemos que
   $$D(x, y) = -4,$$
   luego $D(0, 0) = -4 < 0$, es decir $(0, 0)$ es un punto silla.

3. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 6xy$.

   Solución. Ejemplo resuelto en clases.

4. $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$.

   Solución. Encontramos que $f_x(x, y) = 12 - 3x^2$ y $f_y(x, y) = -8y$, de donde deducimos que hay dos puntos críticos: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$. Para determinar el tipo de punto crítico, calculamos
   $$D(x, y) = 48x,$$
   de donde $D(2, 0) = 92 > 0$, es decir el punto $(2, 0)$ es un mínimo relativo. Por otra parte $D(-2, 0) = -92 < 0$, es decir $(-2, 0)$ es un punto silla.

Observación 2.2. Algunos se preguntarán: ¿Qué pasa con los extremos absolutos?. La respuesta puede ser bastante complicada, sin embargo en este curso asumiremos siempre que si es que la función de dos variables tiene *un único* extremo relativo, este debe ser absoluto, es decir, si encontramos un único mínimo relativo, este deber ser el mínimo absoluto de la función; así también, si encontramos un único máximo relativo, este debe ser el máximo absoluto de la función.

2.6.2. Ejercicios

Ejercicio 2.23. Dada la función $f(x, y)$, encuentre los puntos críticos y clasifíquelos como máximos relativos, mínimos relativos o puntos silla.

1. $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$.
2. $f(x, y) = xy$.
3. $f(x, y) = \dfrac{16}{x} + \dfrac{6}{y} + x^2 - 3y^2$.
4. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$.
5. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$.
6. $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$.

2.7. Optimización aplicada

A continuación veremos diversas aplicaciones. En primer lugar, volvamos al ejemplo de la piscina (Ejemplo (O)). Teníamos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } S(x, y) = \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x} + xy, \\ \text{sujeto a que } x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{O}$$

Para ello sigamos el procedimiento dado anteriormente

1. Primer encontramos los puntos críticos: Tenemos que $S_x(x, y) = -\dfrac{8}{x^2} + y$, y $S_y(x, y) = -\dfrac{8}{y^2} + x$. Si igualamos ambas cantidades a 0, encontramos que

   $$y = \frac{8}{x^2} \quad \text{y} \quad x = \frac{8}{y^2}.$$

   Si reemplazamos el valor de y en la ecuación para x obtenemos que

   $$x = \frac{8}{\left(\frac{8}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{8},$$

   O equivalentemente $x^4 - 8x = 0$, de donde obtenemos que $x = 0$ o $x = 2$. Pero $x = 0$ no es un valor válido para la función, es decir $x = 2$ es el único valor relevante. Luego si reemplazamos $x = 2$ en la ecuación para y, obtenemos que $y = 2$.

   Es decir, el punto $(2, 2)$ es el único punto crítico para la función.

2. Ahora necesitamos evaluar $D(2, 2) = S_{xx}(2, 2) \cdot S_{yy}(2, 2) - \big(S_{xy}(2, 2)\big)^2$, por lo que necesitamos calcular las derivadas de segundo orden.

   $$S_{xx}(x, y) = \frac{16}{x^3}, \quad S_{yy}(x, y) = \frac{16}{y^3}, \quad S_{xy} = 1,$$

   por lo que

   $$D(2, 2) = \frac{16}{2^3} \cdot \frac{16}{2^3} - 1^2 = 3 > 0.$$

   Y como $S_{xx}(2, 2) = 2 > 0$, concluimos que $(2, 2)$ es un mínimo relativo, pero como es el único, es el mínimo absoluto para S.

Finalmente concluimos que las dimensiones de la piscina deben ser de $2\ m. \times 2\ m. \times 1\ m.$ (Recordar que $z = \dfrac{4}{xy}$). ■

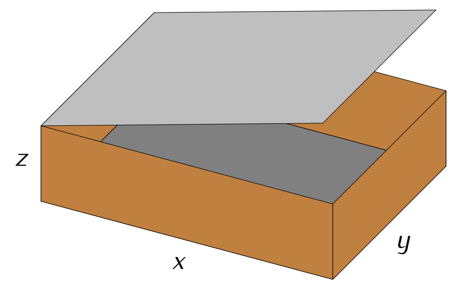


Figura 2.11: Caja con tapa y base.

Ejemplo 2.21. Se quiere construir una caja rectangular de 32 cm^3, para ello se utilizan 3 materiales distintos: El material para los costados de la caja cuesta 1.000 pesos por cm^2, el material para la base cuesta 3.000 pesos por cm^2, y el material para la tapa cuesta 5.000 pesos por cm^2. Determine las dimensiones de la caja mas barata.

Solución. Para resolver este problema es conveniente hacer un dibujo (Ver figura 2.11). Tenemos que el costo de la caja se puede escribir como

$$\begin{aligned} C(x,y,z) &= (\text{costo de los lados})+(\text{costo de la base})+(\text{costo de la tapa}) \\ &= (2xz+2zy)\cdot 1 + xy\cdot 3 + xy\cdot 5 \\ &= 2xz+2zy+8xy \text{ miles de pesos} \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que el volumen de la caja debe ser de 32 cm^3, es decir $xyz = 32$, de donde $z = \dfrac{32}{xy}$. Luego nuestro problema es minimizar

$$C(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + 8xy.$$

Procedemos como siempre:

1. Puntos críticos: $C_x(x,y) = -\dfrac{64}{x^2} + 8y$, $C_y(x,y) = -\dfrac{64}{y^2} + 8x$. De donde el único punto crítico es el punto $(2,2)$.

2. Evaluamos $D(2,2)$. $C_{xx}(x,y) = \dfrac{2\cdot 64}{x^3}$, $C_{yy}(x,y) = \dfrac{2\cdot 64}{y^3}$, $C_{xy}(x,y) = 8$, de donde

$$D(2,2) = 16^2 - 8^2 = 3\cdot 8^2 > 0.$$

   Ademas, $C_{xx}(2,2) = \dfrac{128}{2^3} > 0$, es decir, nuestro único punto crítico es un mínimo.

De donde concluimos que la caja debe ser de dimensiones $2\ cm. \times 2\ cm. \times 8\ cm.$. ■

Ejemplo 2.22. Una tienda de abarrotes vende dos marcas bebidas de fantasía de tres litros. Si el precio de venta de una de las marcas es x y el de la otra es y, el dueño del almacén estima que la ganancia por ventas estará dada por la función

$$G(x, y) = (x - 2)(40 - 50x + 40y) + (y - 2)(20 + 60x - 70y) \text{ miles de pesos.}$$

Encuentre los precios x e y que maximizan la ganancia.

Solución. Tal como antes, seguimos el procedimiento:

1. Puntos críticos: $G_x(x, y) = 20 - 100x + 100y$, $G_y(x, y) = 80 + 100x - 140y$. Si igualamos ambas cantidades a 0 obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 5x - 5y &= 1 \\ 5x - 7y &= -4 \end{aligned}$$

   De donde obtenemos que $x = \frac{27}{10} = 2{,}7$ e $y = \frac{5}{2} = 2{,}5$ O sea el punto $\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right)$ es el único punto crítico para G.

2. Evaluamos $D\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right)$: $G_{xx}(x, y) = -100$, $G_{yy}(x, y) = -140$ y $G_{xy}(x, y) = 0$, por lo tanto

$$D\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right) = 14000 > 0.$$

   Finalmente evaluamos $G_{xx}\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right) = -100 < 0$, por lo que nuestro único punto crítico es un máximo.

   Concluimos que para maximizar la ganancia, debemos vender la marca x a \$2.700 y la marca y a \$2.500.

■

Ejemplo 2.23. El gerente de una compañía distribuidora de alimentos determina que sus tres clientes mas importantes se pueden ubicar en el mapa como lo muestra la figura 2.12:

¿En qué lugar del mapa debe establecerse el centro de distribución, de modo que se minimice la suma de los cuadrados de las distancias a cada cliente?

Solución. En primer lugar recordamos que la distancia al cuadrado entre dos puntos en el plano dados por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede ser calculada mediante la fórmula

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Con esto, si el centro de distribución se ubica en el punto (x, y), entonces la suma de los cuadrados de las distancias a cada cliente esta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (\text{distancia al cliente A})^2 + (\text{distancia al cliente B})^2 + (\text{distancia al cliente C})^2 \\ &= \left[(x - 1)^2 + (y - 5)^2\right] + \left[x^2 + y^2\right] + \left[(x - 8)^2 + y^2\right]. \end{aligned}$$

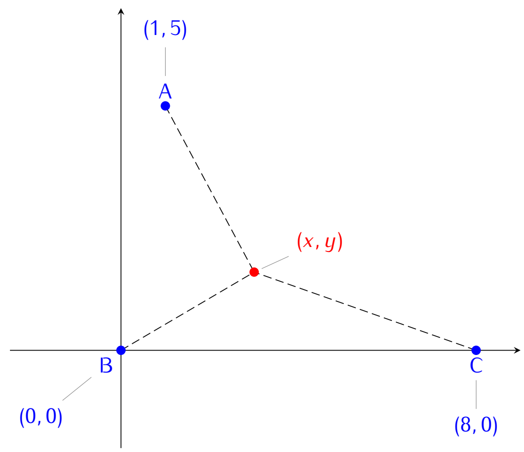


Figura 2.12: Diagrama para el centro de distribución.

1. Puntos críticos: $f_x(x, y) = 6x - 18$, $f_y(x, y) = 6y - 10$. De donde el único punto crítico es el punto $\left(3, \frac{5}{3}\right)$.

2. Evaluamos $D\left(3, \frac{5}{3}\right)$. $f_{xx}(x, y) = 6$, $f_{yy}(x, y) = 6$, $f_{xy} = 0$, por lo tanto

$$D\left(3, \frac{5}{3}\right) = 36 > 0,$$

además, $f_{xx}\left(3, \frac{5}{3}\right) = 6 > 0$, es decir nuestro único punto crítico es un mínimo.

Concluimos que se debe ubicar el centro de distribución en el punto $\left(3, \frac{5}{3}\right)$. ■

2.7.1. Ejercicios

Ejercicio 2.24. Un almacén vende dos marcas de comida para perros. Si cobra x pesos por una marca e y pesos por la otra, el dueño estima que ganará

$$G(x, y) = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300.$$

¿Cuáles deben ser los precios de las comidas, de modo que se maximicen las ganancias?

Ejercicio 2.25. Se desea construir una antena para celulares para comunicar a cuatro comunas. Si las comunas están ubicadas en los puntos $(-5, 0), (1, 7), (9, 0)$ y $(0, -8)$, determine el lugar (x, y) donde se debe ubicar la antena, de modo que se minimice la suma de las distancias al cuadrado desde la antena hacia cada comuna.

Ejercicio 2.26. El gerente de una compañía de transporte tiene 3 clientes que se pueden ubicar en un mapa en las coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (2, 7)$, y $C = (8, 1)$ (las coordenadas están en kilómetros). De acuerdo a sus cálculos, el costo de traslado hacia A es de \$200 por kilómetro recorrido, mientras que el costo de traslado a B es de \$150 por kilómetro, y a C es de \$230 por kilómetro.

¿En qué lugar del mapa debe establecerse su centro de operaciones de modo que se minimicen sus costos de traslado?

Ejercicio 2.27. Se quiere construir una caja rectangular, sin tapa, de 18 cm^3, para ello se utilizan 2 materiales distintos: El material para los costados de la caja cuesta 3.000 pesos por cm^2, el material para la base cuesta 4.000 pesos por cm^2. Determine las dimensiones de la caja mas barata.

Ejercicio 2.28. Una empresa produce 2 tipos de fertilizante: fertilizantes A y B. Si se producen x unidades de A e y unidades de B, se determina que la ganancia es de

$$G(x,y) = x(100-x) + y(100-y) - (x^2 + xy + y^2).$$

¿Cuántas unidades de cada fertilizante se deben producir para maximizar la ganancia?

2.8. Optimización con restricciones

Como hemos visto, en diversos problemas aplicados es usual que tengamos restricciones sobre las variables. Por ejemplo, recordemos el Ejemplo 2.1 del granjero que quería construir una cerca para sus caballos (Figura 2.13):

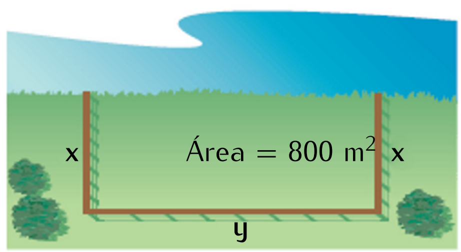


Figura 2.13: Corral para caballos.

En dicho problema, habíamos llegado a la conclusión de que debíamos resolver el siguiente ejercicio de optimización:

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x \cdot y = 800, \\ \qquad\qquad x > 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \tag{P}$$

La manera en que resolvimos dicho ejercicio fue utilizando métodos de una variable (usamos la restricción $x \cdot y = 800$ para despejar y y dejar todo en términos de x), sin embargo hay situaciones en las que despejar una de las variables es imposible (por ejemplo cuando la restricción es algo como $\operatorname{sen}(xy) + e^{x+y} = 1$). ¿Cómo enfrentamos dichos casos?

2.8.1. Multiplicadores de Lagrange

Una de las técnicas mas útiles en la optimización con restricciones es el llamado *método de los multiplicadores de Lagrange*, donde se introduce una tercera variable (un multiplicador) que nos permite resolver el problema de optimización con restricciones sin la necesidad de despejar una de las variables en la restricción.

El método consiste en lo siguiente:

1. Supongamos que tenemos el problema:
$$\begin{cases} \text{optimizar la función } f(x,y), \\ \qquad \text{sujeto a que } g(x,y) = k. \end{cases} \tag{L}$$
2. Para resolver este problema buscamos los valores $x,\ y$ y λ tales que
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y), \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), \\ g(x,y) &= k. \end{aligned}$$
Esto nos da una lista de valores $x = a,\ y = b$ y λ's (al igual que con los puntos críticos, pueden haber más de uno).
3. Luego evaluamos la función f en cada uno de los puntos (a,b) obtenidos en el paso anterior.
4. Finalmente el valor máximo (o mínimo) del problema L será el mayor (o menor)[5] valor obtenido en el paso 3.

Para ilustrar el método, resolvamos el ejemplo 2.1 usando multiplicadores de Lagrange. Queremos resolver
$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 2x + y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x \cdot y = 800. \end{cases} \tag{P}$$
Luego para este caso en particular tenemos que $f(x,y) = 2x + y$, $g(x,y) = xy$ y $k = 800$. Luego $f_x(x,y) = 2$, $f_y(x,y) = 1$, $g_x(x,y) = y$ y $g_y(x,y) = x$. El método nos dice que debemos resolver el sistema de 3×3 dado por
$$\begin{aligned} 2 = f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) = \lambda y, \\ 1 = f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y) = \lambda x, \\ xy = g(x,y) &= k = 800. \end{aligned}$$
De donde deducimos que $x = \pm 20$, $y = \pm 40$ y, aunque no lo utilizaremos, $\lambda = \pm\frac{1}{20}$. Sin embargo estamos interesados en el caso de que $x,\ y > 0$, luego solo nos preocupamos del punto $(20, 40)$. En este caso obtenemos que el menor valor se obtiene cuando $x = 20$ e $y = 40$, que es exactamente la medida que obtuvimos usando técnicas de una variable. ■

[5] En estricto rigor esto no es completamente cierto, sin embargo para efectos de este curso, solo nos preocuparemos de esta situación.

Ejemplo 2.24. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 8$.

Solución. En este caso tenemos que $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $k = 8$. De donde nuestro sistema de 3×3 queda

$$\begin{aligned} y = f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) = \lambda 2x, \\ x = f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 = g(x, y) &= k = 800. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $2\lambda = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$, es decir $x^2 = y^2$. Luego $x^2 = 4 = y^2$, o sea $x = \pm 2 = y$. Por lo tanto tenemos cuatro posibles puntos: $(-2, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$ y $(2, 2)$.

Para concluir, debemos evaluar $f(x, y)$ en todos estos puntos

- $f(-2, -2) = 4$,
- $f(-2, 2) = -4$,
- $f(2, -2) = -4$, y
- $f(2, 2) = 4$.

De donde concluimos que el valor máximo es 4 y se alcanza en $(-2, -2)$ y $(2, 2)$; y el valor mínimo es -4 y se alcanza en $(-2, 2)$ y $(2, -2)$. ■

Ejemplo 2.25. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ sujeta a la restricción $x + y = 15$.

Solución. En este caso obtenemos que $x = 8$, $y = 7$, $\lambda = 9$, y $f(8, 7) = -18$. ■

Ejemplo 2.26. Maximice la función $U(x, y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$ sujeta a la restricción $20x + 30y = 600$.

Solución. Para resolver este problema planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 6x^{-0,4}y^{0,4} &= 20\lambda, \\ 4x^{0,6}y^{-0,6} &= 30\lambda, \\ 20x + 30y &= 600. \end{aligned}$$

Si despejamos λ en las primeras 2 ecuaciones obtenemos que

$$\lambda = 3\left(\frac{y}{x}\right)^{0,4} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{0,6},$$

de donde deducimos que $9y = 4x$. Si reemplazamos esta relación en la tercera ecuación obtenemos que $5 \cdot 9y + 30y = 600$, es decir $75y = 600$, lo que nos da $y = 8$. Volviendo a la relación entre x e y, obtenemos que $x = 18$.

Luego la función alcanza su máximo en el punto $(18, 8)$, y su valor máximo es $U(18, 8) \approx 130{,}14$. ■

2.8.2. Ejercicios

Ejercicio 2.29. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $x + y = 1$.

Ejercicio 2.30. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $xy = 1$.

Ejercicio 2.31. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 2.32. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 2.33. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = e^{xy}$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 2.34. Una fábrica produce dos tipos de televisores: LED y LCD. El gerente estima que cuando x cientos de LEDs e y cientos de LCDs se producen, entonces la ganancia anual será de

$$G(x, y) = -0{,}3x^2 - 0{,}5xy - 0{,}4y^2 + 85x + 125y - 2500 \quad \text{millones de pesos.}$$

Si la empresa puede producir 30.000 televisores en total, ¿cuántos LEDs y LCDs se deben producir para maximizar la ganancia?

Ejercicio 2.35. Se desea construir una caja con base cuadrada tal que el contorno más el alto debe ser exactamente 108 cms. (Ver figura 2.14) ¿Cuál es la caja con tales características que tiene el volumen mas grande?

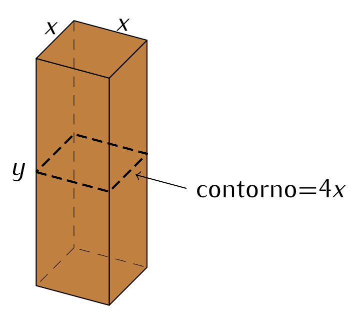


Figura 2.14: Caja para el ejercicio 2.35.

2.9. Ajuste de curvas

Hasta el momento hemos visto ciertos tipos de problemas de modelamiento en los cuales las funciones están previamente determinadas, sin embargo esto no suele ocurrir en problemas reales.

Lo que usualmente ocurre es que se realizan experimentos y mediciones para obtener información relativa a cierto sistema físico, económico o social, y luego se interpretan dichas mediciones en términos matemáticos. A continuación detallamos un ejemplo de aquello

Ejemplo 2.27. Un productor agrícola ha encontrado los siguientes datos respecto al precio de uno de sus productos

Producción: x	Precio de la demanda: p
6	743
10	539
17	308
22	207
28	128
35	73

¿Qué función $p = f(x)$ es la que "mejor" representa dichos datos?

Para resolver este tipo de problemas una de las herramientas mas útiles es graficar los datos y "ver" la función:

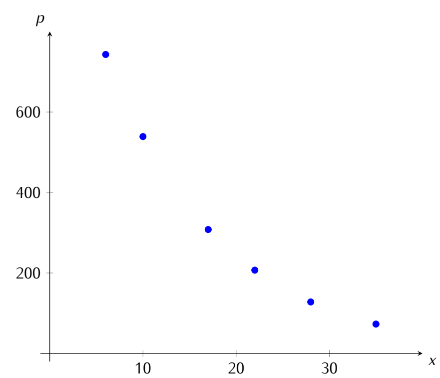


Figura 2.15: Datos del ejemplo 2.27.

Del gráfico podemos apreciar una suerte de comportamiento exponencial negativo, es decir, deberíamos tener que $p = Ae^{-kx}$, donde $k > 0$. Entonces la pregunta que surge es: ¿Cómo encontramos las constante A y k, de modo que la función resultante se "acerque" a los datos?

2.9.1. Ajuste de rectas: recta de mínimos cuadrados (RMC)

Para encontrar la solución del ejemplo anterior, primero debemos ser capaces de resolver un caso mas simple: El caso en que los datos se asemejan a una recta. Para ello necesitamos la siguiente definición

Definición 2.6 (Recta de mínimos cuadrados). *Dados n pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, definimos la recta de mínimos cuadrados como la recta $y = mx + b$ donde*

$$m = \frac{n \sum (xy) - (\sum x) \cdot (\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2},$$

y

$$b = \frac{\left(\sum x^2\right) \cdot (\sum y) - (\sum x) \cdot (\sum xy)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} \sum x &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \sum y &= y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\ \sum x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\ \sum xy &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n \end{aligned}$$

Esta recta tiene la particularidad de ser la recta que minimiza las distancias al cuadrado hacia los puntos. Siguiendo como ejemplo la figura 2.16, lo que queremos encontrar son m y b tales que

$$S(m, b) = d_1^2 + d_3^2 + d_3^2 = (mx_1 + b - y_1)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2$$

es mínima. El resultado de minimizar esta función cuando se hace para n puntos es lo que se obtiene para m y b en la definición 2.6.

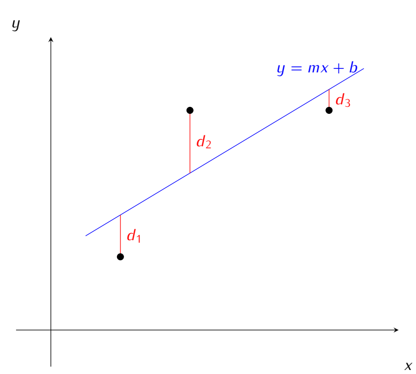


Figura 2.16: Recta de mínimos cuadrados.

Ejemplo 2.28. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los puntos: $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$.

Solución. El procedimiento para resolver este tipo de problemas es: Primero tabulamos los datos de la siguiente manera

	x	y	x^2	xy
	1	1	1	1
	2	3	4	6
	4	3	9	12
$\sum$	7	7	21	19

Luego usamos las fórmulas para la pendiente de la recta m y para el coeficiente de posición b dadas en la definición 2.6

$$m = \frac{n\sum(x\cdot y) - (\sum x)\cdot(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{3\cdot 19 - 7\cdot 7}{3\cdot 21 - 7^2} = \frac{4}{7},$$

y

$$b = \frac{\left(\sum x^2\right)\cdot(\sum y) - (\sum x)\cdot(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{21\cdot 7 - 7\cdot 19}{3\cdot 21 - 7^2} = 1.$$

Por lo tanto la RMC es:

$$y = \frac{4}{7}x + 1.$$

■

Ejemplo 2.29. Cierta universidad ha recopilado los siguientes datos respecto a las notas de los alumnos de primer año respecto a sus notas en la enseñanza media

Promedio de notas enseñanza media	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Promedio de notas primer año universidad	4,5	4,8	5,0	5,5	6,5

Encuentre la RMC que mejor representa a estos datos. ¿Cómo cambia la RMC si es que se agrega el dato extra: Nota enseñanza media=4, Nota primer año=2?

Solución. Si denotamos por x a las notas de la enseñanza media y por y a las notas del primer año en la universidad tenemos que nuestra tabla queda

	x	y	x^2	xy
	5	4,5	25	22,5
	5,5	4,8	30,25	26,4
	6	5	36	30
	6,5	5,5	42,25	35,75
	7	6,5	49	45,5
$\sum$	30	26,3	182,5	160,15

Lo que nos da

$$m = 0{,}94,$$

y

$$b = -0{,}38.$$

Por lo tanto la RMC es: $y = 0{,}94x - 0{,}38$.

Si agregamos el punto $(4, 2)$ nuestra tabla queda (notar que al agregar un dato extra, debemos solo preocuparnos de la fila del dato extra y la fila de las sumas, el resto de la tabla queda igual)

	x	y	x^2	xy
	4	2	16	8
	5	4,5	25	22,5
	5,5	4,8	30,25	26,4
	6	3	36	30
	6,5	5,5	42,25	35,75
	7	6,5	49	45,5
$\sum$	34	28,3	198,5	168,15

Lo que nos da

$$m = 1{,}334,$$

y

$$b = -2{,}844,$$

Es decir, la nueva recta de mínimos cuadrados es

$$y = 1{,}334x - 2{,}844.$$

En la figura 2.17 se pueden ver ambas rectas. ■

2.9.2. Ajustes no lineales

Volvamos al ejemplo 2.27. Teníamos que nuestros datos asemejaban a una función exponencial $p = Ae^{kx}$ y queríamos encontrar A y k. Una manera de hacer esto es usando la recta de mínimos cuadrados. El problema es que nuestra función candidato NO ES LINEAL. ¿Cómo solucionamos esto?

La respuesta es usar el logaritmo natural para convertir la función original en una función lineal: Nuestra función candidato es $p = Ae^{kx}$, por lo que si aplicamos el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación nos queda

$$\ln p = kx + \ln A,$$

luego si denotamos $y = \ln p$, $m = k$ y $b = \ln A$ nos queda que nuestra función candidato es $y = mx + b$, una función lineal para la cual podemos usar la RMC. La tabla para encontrar esta RMC queda

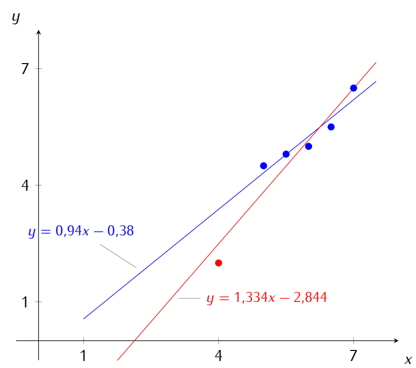


Figura 2.17: Recta de mínimos cuadrados.

	x	p	$y = \ln p$	x^2	xy
	6	743	6,61	36	39,66
	10	539	6,29	100	62,9
	17	308	5,73	289	97,41
	22	207	5,33	484	117,32
	28	128	4,85	784	135,86
	35	73	4,29	1225	150,17
$\sum$	118		33,11	2918	603,32

De donde obtenemos que

$$m = -0{,}08, \quad b = 7,09,$$

es decir la recta queda $y = -0{,}08x + 7{,}09$. Para concluir el problema, debemos retornar a la función exponencial, es decir debemos recordar que $k = m = -0{,}08$ y que $\ln A = b = 7{,}09$, de donde obtenemos que $A = e^{7{,}09} = 1199{,}91$. Por lo tanto nuestra función queda

$$p = 1199{,}91e^{-0{,}08x},$$

lo que gráficamente se ve como ■

Otro tipo de ajustes no lineales, son los ajustes polinomiales $y = ax^c$ como el que se ve a continuación.

Ejemplo 2.30. Suponga que se han recopilado los siguiente datos:

H	87,9	95,3	106,7	115,4	127,2	135,8
W	52,4	60,3	73,1	83,7	98,0	110,2

1. Grafique los puntos en el plano H-W.

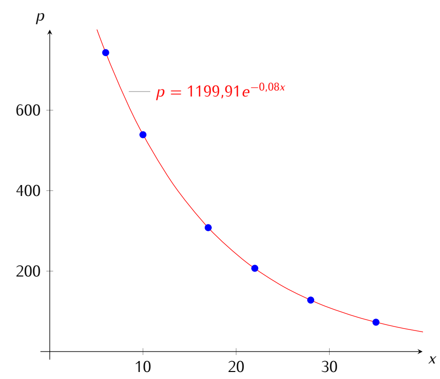


Figura 2.18: Función exponencial ajustada para el ejemplo 2.27.

2. Encuentre la RMC.
3. Asuma que los datos se ajustan a una curva de la forma $W = aH^c$. Encuentre a y c.
4. Grafique la RMC y la curva resultante $W = aH^c$ en un mismo gráfico.

Solución. 1. El gráfico de los puntos se puede ver en la figura 2.19.

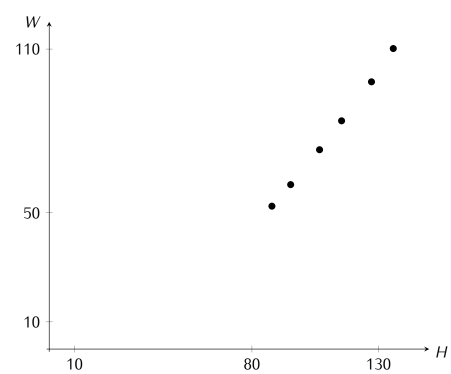


Figura 2.19: Gráfico para el ejemplo 2.30.

2. Para la RMC encontramos que $W = 1{,}2H - 54{,}095$.
3. Para encontrar la función polinomial debemos transformar nuestra fórmula no lineal $W = aH^c$ en una lineal. Para ello nuevamente usamos el logaritmo natural y obtenemos que

$$\ln W = \ln a + c \ln H.$$

Luego si denotamos por $y = \ln W$, $x = \ln H$, $m = c$ y $b = \ln a$, llegamos a la recta $y = mx + b$. Para encontrar m y b usamos el método de los mínimos cuadrados y obtenemos la siguiente tabla

	$x = \ln H$	$y = \ln W$	x^2	xy
	4,4762	3,9589	20,0364	17,7209
	4,5570	4,0993	20,7665	18,6808
	4,6700	4,2918	21,8091	20,0429
	4,7484	4,4282	22,5473	21,0223
	4,8458	4,5850	23,4814	22,2177
	4,9112	4,7023	24,1197	23,0938
$\sum$	28,2086	26,0646	132,7604	122,7784

De donde encontramos que $m = 1{,}7016$ y $b = -3{,}6559$. Finalmente recordamos que $c = m = 1{,}7016$ y que $\ln a = b = -3{,}6559$, es decir $a = e^{-3{,}6559} = 0{,}0258$. Por lo tanto nuestra curva queda

$$W = 0{,}0258H^{1{,}7016}.$$

4. Ver la figura 2.20. Como se puede ver en el gráfico, ambas curvas se ajustan bastante bien a los puntos, por lo que la elección de cual es mejor, dependerá de que curva entregue mejores predicciones. Por ejemplo, si de las restricciones del problema (por ejemplo, H puede representar la altura de un individuo, y W su peso) determinamos que los valores de W deben ser siempre positivos, entonces la RMC no es una buena curva de ajuste, pues como se aprecia en la figura, para valores de H menores a 45, el valor resultante es negativo.

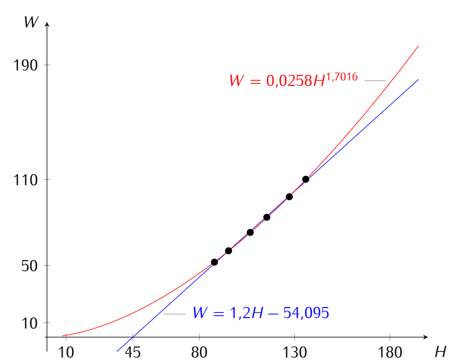


Figura 2.20: Gráfico con curvas ajustadas para el ejemplo 2.30.

■

Veamos ahora otro ejemplo de ajuste, esta vez con datos reales: Los censos en Chile.

Ejemplo 2.31. La siguiente tabla nos entrega los datos del censo en Chile para el periodo 1920–2002 en millones de personas

Año	1920	1930	1940	1952	1960	1970	1982	1992	2002
Población	3,730	4,287	5,024	5,933	7,374	8,885	11,330	13,348	15,116

1. Grafique los datos en el plano cartesiano.
2. Encuentre la RMC asociada a estos datos.
3. Para más preguntas, refiérase al ejercicio 2.43.

***Solución*.** 1. El gráfico de los datos se puede ver en la figura 2.21.

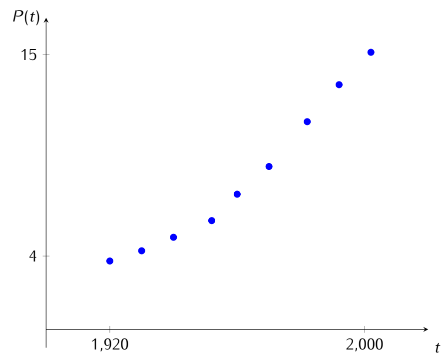


Figura 2.21: Datos de censos en Chile.

2. En primer lugar encontramos la RMC haciendo la tabla con los datos pertinentes:

	t	P	t^2	$t \cdot P$
	1920	3,730	3.686.400	7.161,60
	1930	4,287	3.724.900	8.273,91
	1940	5,024	3.763.600	9.746,56
	1952	5,933	3.810.304	11.581,22
	1960	7,374	3.841.600	14.453,04
	1970	8,885	3.880.900	17.503,45
	1982	11,330	3.928.324	22.456.06
	1992	13,348	3.968.064	26.589.22
	2002	15,116	4.008.004	30.262,23
$\sum$	17.648	75,027	34.612.096	148.027,284

De donde la RMC queda

$$P = 0{,}1434x - 272{,}8894$$

Una observación relevante es que en casos prácticos uno debe tener cuidado con las aproximaciones, en especial cuando se trabaja con números grandes. Por ejemplo si consideramos solo los primeros 2 lugares decimales, la recta quedaría $P = 0{,}14t - 272{,}89$ y el gráfico es como en la figura 2.22.

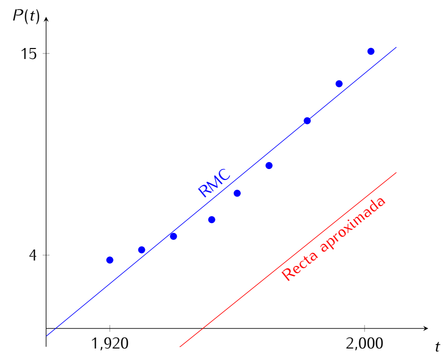


Figura 2.22: Recta mínimos cuadrados para el ejemplo 2.31. Hay que tener cuidado con la cantidad de decimales que se usan.

■

2.9.3. Ejercicios

Ejercicio 2.36. En los siguientes casos, grafique los puntos y encuentre la RMC asociada.

1. $(0; 1)$, $(2; 3)$, $(4; 2)$.
2. $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 4)$, $(5; 2)$.
3. $(-2; 5)$, $(0; 4)$, $(2; 3)$, $(4; 2)$, $(6; 1)$.
4. $(0; 1)$, $(1; 1{,}6)$, $(2{,}2; 3)$, $(3{,}1; 3{,}9)$, $(4; 5)$.

Ejercicio 2.37. En los siguientes casos grafique los puntos y encuentre la curva exponencial ($y = Ae^{kx}$) que mejor se ajusta a los datos. (Hint: siga la solución del ejemplo 2.27).

1. $(1; 15{,}6)$, $(3; 17)$, $(5; 18{,}3)$, $(7; 20)$, $(10; 22{,}4)$.
2. $(2; 13{,}4)$, $(4; 9)$, $(6; 6)$, $(8; 4)$, $(10; 2{,}7)$.

Ejercicio 2.38. En los siguientes casos grafique los puntos y encuentre la curva polinomial ($y = ax^c$) que mejor se ajusta a los datos. (Hint: siga la solución del ejemplo 2.30).

1. $(1; 0{,}5)$, $(2, 3)$, $(3; 10)$, $(4, 15)$, $(5, 24)$, $(6; 37)$.

2. (57,6; 5,3), (109,2; 13,7), (199,7; 38,3), (300,2; 78,1), (355,2; 104,5), (420,1; 135,0), (535,7; 195,6), (747,3; 319,2).

Ejercicio 2.39. Encuentre la RMC asociada a los siguientes datos

x	2	2,5	3	3	3.5	3.5	4	4
y	1.5	2	2.5	3.5	2.5	3	3	3.5

y prediga el valor esperado cuando $x = 3,7$.

Ejercicio 2.40. Un productor recopila los siguientes datos

Producción en cientos: x	5	10	15	20	25	30	35
Precio de la demanda en miles de pesos: p	44	38	32	25	18	12	6

1. Grafique los datos.
2. Encuentre la RMC.
3. Use la RMC para predecir el precio cuando se producen 4.000 unidades.

Ejercicio 2.41. El jefe de marketing de una empresa ha recopilado los siguientes datos que relacionan los gastos en publicidad mensual y las ventas mensuales:

Gasto en publicidad (millones): P	3	4	7	9	10
Ventas (miles de unidades): V	78	86	138	145	156

1. Grafique estos datos.
2. Encuentre la RMC.
3. Use la RMC para predecir las ventas mensuales si es que se gastan $5.000.000 en publicidad.

Ejercicio 2.42. Complete los detalles de la RMC del ejemplo 2.30, es decir, haga la tabla pertinente y encuentre la ecuación de la recta.

Ejercicio 2.43. Siguiendo con el ejemplo del censo: Ejemplo 2.31. Responda las siguientes preguntas:

1. Suponga ahora que la población crece de forma exponencial ($P(t) = Ae^{kt}$). Usando 4 lugares decimales, encuentre la curva que mejor se ajusta a los datos. ¿Qué sucede si es que solo se consideran 2 decimales? Grafique los datos y las funciones usando alguna herramienta computacional[6].

[6]Una herramienta gratuita para hacer dichos gráficos es LibreOffice, que es muy similar a Microsoft Office, pero de libre acceso. Si tienen alguna pregunta respecto a como utilizar esta herramienta, me pueden consultar vía e-mail.

2. Suponga ahora que los datos siguen una función polinomial ($P(t) = at^c$). Usando 4 lugares decimales, encuentre la curva que mejor que ajusta a esos datos.

3. En todos los casos (RMC, exponencial y polinomial), prediga la población para el año 2012. Como referencia, según el censo recién pasado, la población de Chile es de[7] 16.342 millones de personas. ¿Qué modelo entrega la predicción mas cercana a la realidad?

4. ¿Cómo quedan los modelos si se agrega el dato del 2012 de la pregunta anterior? Es decir agregamos el par (2012;16,342) a los datos que ya teníamos. Según estos modelos ¿Cuál sería la población de Chile para el año 2022?

[7]Al menos eso ha dicho el INE en su última actualización al 26 de Febrero del 2014: http://www.censo.cl/.

Capítulo 3

Programación lineal

Como vimos en la última parte del capítulo anterior, en cierto tipo de problemas queremos optimizar una función bajo ciertas restricciones. La programación lineal es un caso bastante similar al anterior, específicamente aplica a los modelos en los que la función a optimizar f es lineal y la restricción g es también *lineal*. La gran diferencia será que para estos problemas, tendremos mas de una restricción lineal, las que además pueden ser desigualdades, como por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{maximizar la función } 4x + 7y, \\ \text{sujeto a que } 3x + y \leq 10, \\ 5x - 4y \leq 1, \\ x,\ y \geq 0, \end{cases} \tag{PL}$$

Este tipo de problemas suele aparecer con frecuencia en aplicaciones a la economía, transporte y ciencias sociales, y en este curso nos enfocaremos al caso en que dichos modelos cuentan con solo con dos variables independientes. En tales cases desarrollaremos un método bastante simple que sirve para resolver dichos problemas. Asimismo, nos interiorizaremos en como plantear problemas aplicados para obtener un problema de programación lineal.

Para mayor desarrollo del tema, refiérase al libro: “Investigación de operaciones” de Hamdy A. Taha [11].

3.1. Solución gráfica de problemas de programación lineal en dos variables

El procedimiento de solución gráfica comprende dos pasos:

1. Determinar el espacio de soluciones que define todas las soluciones factibles del modelo.
2. Determinar la solución óptima entre todos los puntos factibles del espacio de soluciones usando el método gráfico.

Usaremos el ejemplo (PL) para ilustrar como utilizar este procedimiento.

Solución. En primer lugar graficamos el conjunto de soluciones factibles (que definimos como el conjunto de los (x, y) que satisfacen todas las restricciones del problema) usando las ecuaciones de las restricciones. Para mas detalles de como hacer esto, Ver los apuntes tomados en clases. El conjunto resultante se puede ver en la figura 3.1.

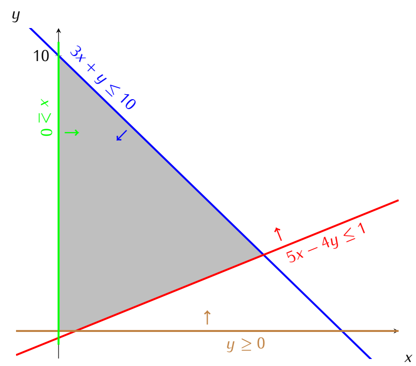


Figura 3.1: Conjunto de soluciones factibles para el ejemplo PL.

Una vez hecho esto, graficamos la recta $z = 4x + 7y$ para dos valores crecientes (por que queremos maximizar) de z, y observamos la dirección en la que se "mueven" las rectas (Ver figura 3.2).

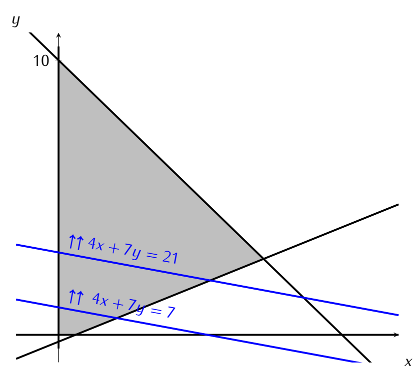


Figura 3.2: Grafico de $z = 4x+7y$ para dos valores arbitrarios de z: $z = 7$ y $z = 21$. Notar que las rectas SIEMPRE son paralelas.

Finalmente determinamos el punto en el conjunto de soluciones factibles que resulta de mover lo mas posible nuestra recta $z = 4x + 7y$ en la dirección en la que z crece (Figura 3.3). De acuerdo a la figura, el punto para el cual se hace mas grande z es el punto $(0, 10)$. La conclusión es que la función $z = 4x + 7y$ se maximiza en el punto $(x, y) = (0, 10)$. ■

A continuación veremos como aplicar el método para problemas de minimización

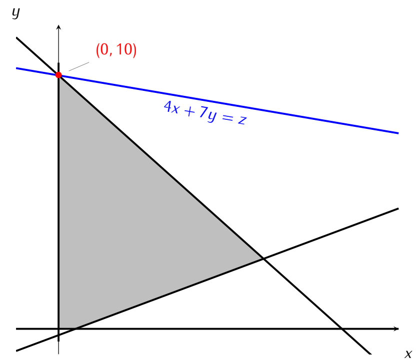


Figura 3.3: "Movemos" la recta $z = 4x + 7y$ lo mas posible sin salirnos del conjunto factible.

Ejemplo 3.1. Resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{cases} \text{minimizar la función } 3x + 5y, \\ \qquad \text{sujeto a que } x + 6y \geq 3, \\ \qquad 4x + y \geq 1, \\ \qquad x \leq 4, \\ \qquad y \leq 2. \end{cases}$$

Solución. Ejemplo resuelto en clases. La acotación importante es que por ser un problema de minimización debemos determinar la dirección en la que decrece $z = 3x + 5y$ y "movernos" lo mas posible en dicha dirección.

En clases llamamos a la solución el punto A, y por falta de tiempo no di las coordenadas. La respuesta es $A(x, y) = \left(\frac{3}{23}, \frac{11}{23}\right)$. ■

3.1.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Resuelva los siguientes problemas de programación lineal usando el método gráfico. En los problemas que se pide optimizar, se deben encontrar tanto el máximo como el mínimo.

1. $\begin{cases} \text{max. } 5x + 6y, \\ \text{s.a. } x + y \leq 4, \\ \quad x + 2y \leq 6, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{max. } 2x + 3y, \\ \text{s.a. } 3x + 2y \leq 6, \\ \quad -x + y \leq 0, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{max. } 6x + 3y, \\ \text{s.a. } 3x + 2y \leq 6, \\ \quad x - y \leq 0, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{max. } x + y, \\ \text{s.a. } -x + y \leq 0, \\ \quad 3x - y \leq 3, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \text{max. } 2x + y, \\ \text{s.a. } y - 2x \leq 0, \\ \quad 2y - x \geq 0, \\ \quad x + y \leq 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \text{max. } 2y + x, \\ \text{s.a. } y - 2x \leq 0, \\ \quad 2y - x \geq 0, \\ \quad x + y \leq 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \text{optimizar } y - x, \\ \text{s.a. } y - 2x \leq 0, \\ \quad 2y - x \geq 0, \\ \quad x + y \leq 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \text{optimizar } x + y, \\ \text{s.a. } x + y \geq -3, \\ \quad 3x - y \leq 3, \\ \quad 3y - 2x \leq 6, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \text{optimizar } y - x, \\ \text{s.a. } x + y \geq -3, \\ \quad 3x - y \leq 3, \\ \quad 3y - 2x \leq 6, \\ \quad x,\ y \geq 0. \end{cases}$

3.2. Modelos de programación lineal en dos variables

En esta sección veremos que tipo de problemas se puede modelar usando técnicas de programación lineal. Básicamente , un modelo de programación lineal tiene tres componentes:

1. Las variables que se tratan de determinar.
2. El objetivo (la meta) que se trata de optimizar.
3. Las restricciones que se deben satisfacer.

Por lo que en cada problema debemos ser capaces de identificar dichos componentes.

Ejemplo 3.2. Una tienda vende dos clases de gaseosas: la gaseosa A y la gaseosa B que es mas barata. El margen de utilidad aproximado de A es \$5 por lata, y la de B es \$7 por lata. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas diarias. Se estima que se venden al menos 100 latas de A diarias, y que B se vende a lo menos el doble que A. ¿Cuántas latas diarias de cada marca se deben tener en stock para maximizar la utilidad?

Solución. Ejemplo resuelto en clases. En resumen el problema era resolver

$$\begin{cases} \text{max. } 5x + 7y, \\ \text{s.a. } x + y \leq 500, \\ \quad x \geq 100, \\ \quad y \geq 2x, \\ \quad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: latas de A, e y: latas de B. La respuesta es 100 latas de A, y 400 latas de B.

Ejemplo 3.3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 asientos y 10 de 50 asientos, pero solo dispone de 9 conductores. Contratar de un bus grande cuesta \$800.000 y uno pequeño cuesta \$600.000. Calcular cuántos buses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela.

Solución. Ejemplo resuelto en clases. En resumen el problema se puede escribir como (quizás en clases intercambié los nombres de las variables)

$$\begin{cases} \text{min. } 600x + 800y \quad \text{(miles de pesos)}, \\ \text{ s.a. } 40x + 50y \geq 400, \\ \qquad x + y \leq 9, \\ \qquad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: buses de 40 pasajeros, e y: buses de 50 pasajeros. La respuesta es 5 buses de 40 pasajeros y 4 buses de 50 pasajeros.

Ejemplo 3.4. Se contrata a una empresa para que reciba 60.000 kg. de tomates maduros a \$70 por kilo, con los cuales produce jugo de tomate y salsa de tomate, ambos enlatados, los que se empacan en cajas de 24 latas. En una lata de jugo se usa 1 kg. de tomates frescos, y en una de salsa $\frac{1}{3}$ kg. La demanda de los productos en el mercado se limita a 2.000 cajas de jugo y 6.000 cajas de salsa (cualquier excedente se perderá). La ganancia al por mayor por caja de jugo y de salsa es de \$1.800 y \$900, respectivamente. Deduzca un programa óptimo de producción para la empresa.

Solución. Planteamiento del problema resuelto en clases. En resumen teníamos que

$$\begin{cases} \text{max. } 18x + 9y \quad \text{(miles de pesos)}, \\ \text{ s.a. } x \leq 2000, \\ \qquad y \leq 6000, \\ \qquad 24x + 8y \leq 60000, \\ \qquad x,\ y \geq 0, \end{cases}$$

donde x: cajas de jugo de tomate (1 caja jugo = 24 kilos tomate), e y: cajas de salsa de tomate (1 caja salsa = 8 kilos tomate). El conjunto de soluciones factibles se puede graficar como en la figura 3.4. Notar que aquí lo hice sin dividir por mil en el gráfico, pero la figura queda igual. La única diferencia es que todo está en sus valores reales.

Luego graficamos las rectas $z = 18x + 9y$ para valores **crecientes** de z (Figura 3.5) y determinamos el óptimo.

Posteriormente el óptimo se encuentra en la intersección de las rectas: $y = 6000$ y $24x + 8y = 60000$, que nos da como respuesta: $x = 500,\ y = 6000$, es decir, se deben vender 500 cajas de tomate en jugo y 6.000 cajas de salsa de tomates, lo que nos dará una ganancia de 18·500+9·6.000=63.000 miles de pesos, o sea 63 millones de pesos.

A continuación presentamos un ejemplo en el que el conjunto factible es un poco mas complicado.

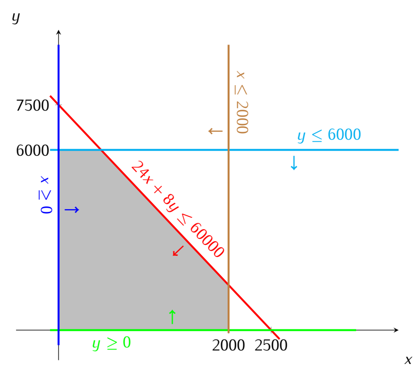


Figura 3.4: Conjunto de soluciones factibles para el Ejemplo 3.4.

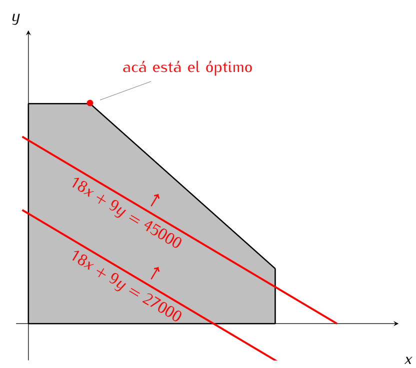


Figura 3.5: Encontrando el óptimo para el ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.5. Una fábrica produce pinturas para interiores y exteriores utilizando dos materias primas: M_1 y M_2. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Pinturas para exteriores (ton.)	Pinturas para interiores (ton.)	Disponibilidad diaria (ton.)
Materia prima M_1 (ton.)	6	4	24
Materia prima M_2 (ton.)	1	2	6
Utilidad diaria (miles de U$ por ton.)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores. También, que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas. La fábrica desea determinar la cantidad de cada tipo de pintura que maximiza la utilidad diaria total.

Solución. Primero identificamos las variables pertinentes:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores,}\\ y &: \text{ Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores.} \end{aligned}$$

Para formar la función objetivo, la empresa desea aumentar sus utilidades todo lo posible. Si z representa la utilidad diaria total, el objetivo de la empresa se expresa como:

$$\text{Maximizar } z = 5x + 4y \quad \text{(miles de dólares)}$$

A continuación encontramos las restricciones que limitan el uso de las materias primas y la demanda. Las restricciones en materias primas se expresan como sigue:

$$\text{(Uso de materia prima para ambas pintuas)} \leq \text{(Disponibilidad de materia prima),}$$

que según los datos del problema, ésto se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \text{Uso de la materia prima } M_1 &= 6x + 4y,\\ \text{Uso de la materia prima } M_2 &= 1x + 2y. \end{aligned}$$

Dado que el uso de las materias primas está limitado por 24 y 6 respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 24,\\ x + 2y &\leq 6. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos restricciones dadas por la demanda. En primer lugar *demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores*, o en términos de nuestras variables: $y \leq 1 + x$; en segundo lugar que la demanda *máxima* diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas, o sea $y \leq 2$

Finalmente observamos que hay una restricción implícita, esta es que las cantidades x e y deben ser mayores que 0, pues ambas son cantidades físicas.

Resumiendo, nuestro problema es el siguiente

$$\begin{cases} \text{maximizar la función } 5x + 4y,\\ \qquad\qquad \text{sujeto a que } 6x + 4y \leq 24,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 2y \leq 6,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y - x \leq 1,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \leq 2,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x,\ y > 0. \end{cases}$$

A continuación determinamos el conjunto factible mediante un gráfico (Ver figura 3.6).

Una vez hecho esto, graficamos la función utilidad $z = 5x + 4y$ para valores **crecientes** de z y determinamos el óptimo (ver Figura 3.7). La solución óptima se encuentra en el punto rojo. Las

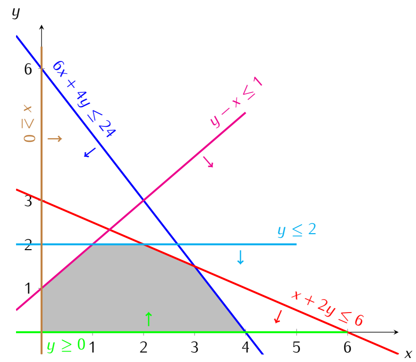


Figura 3.6: Conjunto de soluciones factibles para el ejemplo 3.5.

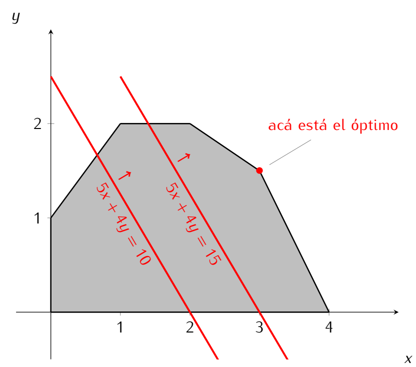


Figura 3.7: Determinamos el óptimo para el ejemplo 3.5.

coordenadas de dicho punto se encuentran resolviendo la intersección de las rectas respectivas, es decir, de las rectas $6x + 4y = 24$ y $x + 2y = 6$. Esto nos da como solución el punto $x = 3$ e $y = 1{,}5$, en cuyo caso $z = 21$.

Esto quiere decir que debemos vender 3 toneladas de pintura para exteriores y 1,5 toneladas de pintura para interiores, lo que nos dará una utilidad de 21 mil dólares. ■

3.2.1. Ejercicios

Ejercicio 3.2. Una empresa fabrica dos tipos de productos con un costo de producción por unidad de \$2.000. y \$3.000 respectivamente. Para hacer que el negocio sea rentable se ha determinado que se debe fabricar a lo menos 10 kg. de producto al día. Además se determina que por razones logísticas no se pueden producir mas de 15 kg. del primer producto y 20 kg. del segundo. Establezca el modelo que minimiza los costos y encuentre la solución óptima.

Ejercicio 3.3. Juan acaba de entrar a la universidad y desea repartir su tiempo disponible, aproximadamente de 10 horas por día, entre estudios y entretención. Para ello estima que entretenerse le es doblemente placentero que estudiar. También desea estudiar al menos un tiempo igual al que pasa entreteniéndose. Sin embargo, se da cuenta que para cumplir con sus obligaciones académicas, no puede pasar mas de 4 horas diarias en entretención. ¿Cómo debe repartir Juan su tiempo, para maximizar su placer?

Ejercicio 3.4. Una fábrica produce dos clases de motores eléctricos, cada uno en una línea de producción aparte. Las capacidades diarias de las dos líneas son de 600 y de 750 motores respectivamente. El motor tipo 1 usa 10 unidades de cierto componente electrónico, y el motor tipo 2 usa 8 unidades. El proveedor de ese componente puede suministrar 8.000 piezas por día. Las utilidades son \$60 mil pesos por cada motor de tipo 1 y \$40 mil pesos por cada uno de tipo 2. Determine la mezcla óptima de producción diaria.

Ejercicio 3.5. Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100 kg. de almendras y 85 kg. de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg. de chocolate, 1 kg. de almendras y 1 kg. de frutas; la de tipo B contiene 2 kg. de chocolate, 1,5 kg. de almendras y 1 kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son \$13.000 y \$13.500 pesos, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta

Ejercicio 3.6. Una pastelería produce dos productos: pasteles y galletas. Las galletas requieren 200 gramos de azúcar y 100 gramos de harina. Los pasteles requieren 200 gramos de harina y 100 gramos de azúcar. Se ganan \$100 por cada galleta y \$80 por cada pastel. Si se disponen de 5 kilos de harina y 7 kilos de azúcar. Encuentre la producción que maximiza las ganancias.

Ejercicio 3.7. Una fábrica de zapatos de cuero produce dos líneas: modelos de lujo y modelos regulares. Cada tipo modelo requiere un pie cuadrado de cuero. Un modelo regular necesita 1 hora de mano de obra, mientras que un modelo de lujo requiere 2 horas de mano de obra. Cada semana se dispone de 40 pies cuadrados de cuero y de 60 horas de mano de obra. Si cada zapato regular genera una utilidad de \$30 mil y cada modelo de lujo representa una utilidad de \$40 mil, encuentre la producción que maximiza la utilidad de la fábrica.

Ejercicio 3.8. Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m. de tejido de algodón y 1000 m. de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m. de algodón y 2 m. de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan 1,5 m. de algodón y 1 m. de poliéster. El precio del pantalón se fija en \$50.000 y el de la chaqueta en \$40.000. ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

Ejercicio 3.9. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámpara L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para L_1 y de 10 minutos para L_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de \$15.000 y \$10.000 para L_1 y L_2 respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

Ejercicio 3.10. En una granja de pollos se da una dieta para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de 1 unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de 5 unidades de A y 1 de B. El precio del tipo X es de \$10.000 y del tipo Y es de \$30.000. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Ejercicio 3.11. Al comienzo del año escolar se lanzan diversas ofertas de útiles escolares. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 lápices para la oferta, empaquetándolos de dos formas distintas; en el primer paquete tendrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 lápices; en tanto que el segundo tendrá 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 lápices. Los precios de cada paquete serán \$650 y \$700, respectivamente. ¿Cuántos paquetes conviene vender obtener el máximo beneficio?

Ejercicio 3.12. Una fábrica de vino produce 2 tipos de vino: tinto y blanco. Cada botella de un litro de vino tinto produce una ganancia de \$500 y cada botella de un litro de vino blanco produce una ganancia de \$400. Se estima que para producir 1 litro de vino tinto se necesita 1 kilo de uva y para producir 1 litro de vino blanco se necesita 0.75 kilos de uva. Además, para satisfacer la demanda se deben producir un mínimo de 20 litros de vino blanco. Si la fábrica cuenta con 100 kilos de uva, calcule la producción de cada tipo de vino que maximiza la ganancia.

3.3. Modelos de programación lineal en tres o mas variables

3.3.1. Ejercicios

3.4. Método Simplex

3.4.1. Ejercicios

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales

Gran parte de este capítulo estará basado en el libro "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado" de Dennis Zill [13] que se puede encontrar en la biblioteca. La gran mayoría de los ejemplos y ejercicios serán recopilados de dicho libro.

4.1. Introducción

Hasta ahora hemos aprendido que la derivada, $\frac{dy}{dx}$ de la función $y = f(x)$ es en si, otra función de x que se determina siguiendo las reglas adecuadas; por ejemplo, si $y = e^{x^2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$. Al reemplazar e^{x^2} por el símbolo y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{4.1}$$

El problema al que nos enfrentaremos en lo que queda de semestre no es "dada una función $y = f(x)$, determinar su derivada", si no que "dada una ecuación diferencial, como la ecuación 4.1, ¿hay algún método por el cual podamos llegar a la función desconocida $y = f(x)$.

Definición 4.1 (Ecuación Diferencial). *Una ecuación diferencial (E.D.) es una ecuación que involucra derivadas de una o mas funciones desconocidas de una o mas variables independientes. Dichas ecuaciones se pueden clasificar como:*

- *Ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.): Si hay solo una función desconocida que depende de una sola variable independiente.*
- *Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: Si hay 2 o mas funciones desconocidas que dependen de una sola variable independiente.*
- *Ecuación diferencial parcial (E.D.P.): Si hay solo una función desconocida que depende de 2 o mas variables independientes.*

- *Sistema de ecuaciones diferenciales parciales: Si hay 2 o mas funciones desconocidas que dependen de 2 o mas variables independientes.*

Definición 4.2. *El orden de una E.D. es el orden de la derivada mas alta que aparece en la ecuación*

Ejemplo 4.1. 1. $y' = 2x + y$ es una E.D.O de primer orden.

2. $\ddot{x} - 2\dot{x} - 15x = 0$ es una E.D.O. de segundo orden.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es una E.D.P. de segundo orden.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ es un sistema de E.D.O.s de primer orden.

Definición 4.3. *Una EDO lineal es una ecuación que puede ser escrita como*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

donde $a_i(x)$ son funciones conocidas de x para $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Si la ecuación no tiene esta forma, decimos que la EDO es no-lineal.

Ejemplo 4.2. 1. $3y''' + y' - 10y = 90$ es una E.D.O. lineal.

2. $y'' + 3xy + 4y = \cos x$ es una E.D.O. lineal.

3. $y' + (\operatorname{sen} x)y = x$ es una E.D.O. lineal.

4. $y' + y^2 + y = 0$ es una E.D.O. no-lineal.

Definición 4.4. *Una solución de una E.D. es cualquier función que satisfaga la ecuación*

Ejemplo 4.3. 1. La función $y(x) = 0$ es una solución de $y'' - 2y + y = 0$.

2. La función $y(x) = xe^x$ es una solución de $y'' - 2y' + y = 0$.

3. La función $y(x) = \dfrac{1}{16}x^4$ es una solución de $y' = x\sqrt{y}$.

4. La función $y(x) = x + 1$ no es una solución de $y' + y = e^x$.

5. La función $u(x, y) = x^2 + y^2$ es una solución de $u_{xx} + u_{yy} = 4$.

Definición 4.5. *Definimos el intervalo de definición de una solución de una EDO como el intervalo mas grande donde la solución y todas sus derivadas pertinentes son continuas.*

Ejemplo 4.4. 1. El intervalo de solución para $y(x) = xe^x$, solución de $y'' - 2y + y = 0$, es $(-\infty, \infty)$.

2. El intervalo de solución para $y(x) = \dfrac{1}{16}x^4$, solución de $y' = x\sqrt{y}$, es $(-\infty, \infty)$.

3. El intervalo de solución para $y(x) = \dfrac{1}{x}$, solución de $xy' + y = 0$, es $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$.

4.1.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Verifique que las funciones indicadas son soluciones de la EDO dada.

1. $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}$; $2y' + y = 0$.
2. $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \operatorname{sen}(4x)$; $y'' + 16y = 0$.
3. $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$; $\ddot{y} - 6\dot{y} + 13y = 0$.
4. $y(x) = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$; $y'' + y = \tan x$.
5. $y(t) = 5\tan(5t)$; $\dot{y} = 25 + y^2$.
6. $y(x) = (1 - \operatorname{sen}(x))^{-\frac{1}{2}}$; $2y' = y^3 \cos x$.
7. Verifique las soluciones del ejemplo 4.12.

4.2. EDOs de primer orden

4.2.1. Soluciones por integración directa

Este método aplica para ecuaciones de la forma

$$y' = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función conocida. Para resolver este tipo de ecuaciones simplemente debemos integrar:

$$y = \int f + C,$$

donde $\int f$ es una primitiva de f y C es una constante arbitraria.

Ejemplo 4.5. Resolver $y' = \operatorname{sen} x$.

Solución. De acuerdo al método de integración directa, tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \operatorname{sen} x \mathrm{d}x \\ &= -\cos x + C. \end{aligned}$$

Luego $y(x) = C - \cos x$ es la solución, y su intervalo de definición es $(-\infty, \infty)$. ■

Ejemplo 4.6. Resolver $xy' = 1$.

Solución. Para resolver esta ecuación, primero dividimos por x (de inmediato asumimos que $x \neq 0$). Luego

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Luego $y(x) = \ln|x| + C$ es la solución, y su intervalo de definición es $(-\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$. El intervalo que se escoge, dependerá de las *condiciones iniciales* del problema. ■

4.2.2. Ejercicios

Ejercicio 4.2. Resolver las siguientes EDOs usando el método de integración directa:

1. $y' = 5$.
2. $y' = 5x$.
3. $\dot{y} = -e^{3t}$.
4. $y' = (x+1)^2$.
5. $y' = (3x+5)^7$.
6. $\dot{y} = 8t(4t^2+5)^9$.
7. $y' = x^2 e^{x^3+8}$.
8. $y' = \operatorname{sen}(x)$.
9. $y' = \operatorname{sen}(5x)$.
10. $y' = \dfrac{2}{x^2-9}$.
11. $y' = \dfrac{x^2-4x}{x\sqrt{x}}$.
12. $y' = (\ln x)^2$.
13. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

4.2.3. Ecuaciones autónomas

Definición 4.6 (Ecuación autónoma)**.** *Una ecuación autónoma es una ecuación de la forma*

$$y' = g(y),$$

donde $g(y)$ es una función continua.

Para resolver este tipo de ecuaciones, lo que hacemos es "despejar" de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y' &= g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de donde podemos integrar para obtener

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x = x + C$$

Luego si denotamos $G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$, obtenemos

$$G(y) = x + C.$$

Ejemplo 4.7. Resolver $y' = y^3$.

Solución. Seguimos el método y obtenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y^3 \\ y^{-3}y' &= 1 \\ \int y^{-3}\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x \\ \frac{y^{-2}}{-2} &= x + C, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que hay dos posibles soluciones $y_1(x) = \sqrt{\dfrac{1}{A-2x}}$ e $y_2(x) = -\sqrt{\dfrac{1}{A-2x}}$, donde $A = -2C$ es una constante arbitraria y su intervalo de definición es $\left(-\infty, \frac{A}{2}\right)$. ■

Al observar mas detenidamente el ejemplo anterior, notamos que la función constante $y = 0$ también es una solución de la ecuación, que no obtuvimos con nuestro método. La razón de esto, es que al comenzar el método, dividimos por y^3, donde implícitamente supusimos que $y \neq 0$.

Por lo anterior, es que al resolver ecuaciones autónomas mediante este método, uno debe tener presente que al dividir por $g(y)$, se pueden perder soluciones: Esto ocurre para todas las funciones constantes $y = y_0$, donde cuando $g(y_0) = 0$.

Ejemplo 4.8. Resolver $y' = y^2 - 4$.

Solución. Identificamos la ecuación como autónoma, por lo que tenemos dos soluciones constantes: $y_1 = -2$ e $y_2 = 2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2-4} &= 1 \\ \int \frac{1}{y^2-4}\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para calcular la integral usamos fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2-4}\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2}\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y+2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \int \mathrm{d}x = x + C.$$

Para concluir, hacemos un poco de álgebra para obtener que

$$y(x) = 2\frac{1+Ae^{4x}}{1-Ae^{4x}},$$

cuyo intervalo de solución depende del signo de A: Si $A \leq 0$, entonces el intervalo de solución es $(-\infty, \infty)$; y si $A > 0$, entonces el intervalo de solución es $(-\infty, \frac{1}{4}\ln A)$ ó $(\frac{1}{4}\ln A, \infty)$. Observar también que cuando $A = 0$, obtenemos $y = 2$, solución que inicialmente habíamos encontrado, sin embargo, la función constante $y = -2$ no es parte de la familia. ■

Ejemplo 4.9. Resolver $y' = y^3 - y$.

Solución. En primer lugar identificamos que esta es una ecuación autónoma. Luego resolvemos la ecuación $y^3 - y = 0$, y obtenemos tres soluciones constantes para la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= -1 \end{aligned}$$

Ahora, si resolvemos la ecuación utilizando el método expuesto anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^3 - y \\ \int \frac{1}{y^3 - y} \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para integrar el lado izquierdo, usamos fracciones parciales

$$\frac{1}{y^3 - y} = -\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1},$$

de donde obtenemos que

$$\int \frac{1}{y^3 - y} \mathrm{d}y = -\ln y + \frac{1}{2}\ln(y+1) + \frac{1}{2}\ln(y-1) = \ln\left(\frac{(y+1)^{\frac{1}{2}}(y-1)^{\frac{1}{2}}}{y}\right).$$

De donde obtenemos que nuestra solución satisface

$$y^2 - Ae^{2x}y - 1 = 0,$$

donde $A > 0$ es una constante arbitraria. Notar que se obtienen 2 soluciones distintas (las raíces de la ecuación). Ademas observamos que cuando $A = 0$ se recuperan las soluciones $y_2 = 1$ e $y_3 = -1$, sin embargo, la solución $y_1 = 0$ no se puede obtener de la fórmula. ■

4.2.4. Ejercicios

Ejercicio 4.3. Encuentre las soluciones constantes y la solución general de las siguientes EDOs autónomas:

1. $y' = y$.
2. $y' = \frac{1}{y}$.
3. $y' = e^y$.
4. $y' = e^{2y}$.
5. $y' = y^2$.
6. $y' = y - y^2$.
7. $y' = k(y - B)$, donde k y B son constantes conocidas.

4.2.5. Soluciones por separación de variables

Este método generaliza los dos casos anteriores, ya que aplica para ecuaciones de la forma

$$y' = f(x)g(y),$$

donde $f(x)$ y $g(y)$ son funciones conocidas. Para resolver este tipo de ecuaciones utilizamos la misma idea de "despejar" que usamos anteriormente:

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

de donde podemos integrar para obtener

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Luego si denotamos $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$ y $F(x) = \int f(x)dx$ a las respectivas primitivas, obtenemos

$$G(y) = F(x) + C.$$

Ejemplo 4.10. Resolver $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Solución. Escribimos

$$\begin{aligned} yy' &= -x \\ \int y\mathrm{d}y &= \int -x\mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Notamos que $C = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, luego podemos asumir que $C = \frac{D^2}{2}$. Con esto podemos despejar y de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y^2 &= D^2 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{D^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Es decir hay dos familias de soluciones: $y(x) = \sqrt{D^2 - x^2}$ e $y(x) = -\sqrt{D^2 - x^2}$, y en ambos casos el intervalo de solución es $(-D, D)$. ■

Concluimos esta sección con un par de ejemplos.

Ejemplo 4.11. Resolver la ecuación $(1+x)y' = y$.

Solución. Escribimos para $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{1+x} \\
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \ln|1+x| + C.
\end{aligned}$$

De acá obtenemos que $|y| = e^C\,|1+x| = A\,|1+x|$ en el intervalo $(-\infty,-1)$ ó $(-1,\infty)$. Sin embargo, si despejamos y, obtenemos que $y(x) = A(1+x)$ donde A es una constante arbitraria. Además vemos que la función $y(x) = A(1+x)$ es una solución en el intervalo $(-\infty,\infty)$. ■

Ejemplo 4.12. Resolver la ecuación $y' = xy^{\frac{1}{2}}$.

Solución. Tal como vimos en clases, el método de separación de variables nos entrega la solución

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + C_1\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x^2 + C\right)^2, \quad \text{en el intervalo } (-\infty,\infty),$$

donde $C = 4C_1$ es una constante arbitraria. Sin embargo, esta familia de soluciones no es la única, pues la función $y \equiv 0$ también es una solución (que no está contenida en la familia anterior). Además de estas dos soluciones, existe una tercera familia de soluciones, la que resulta de "pegar" las funciones anteriores en el punto $x = a$. Esto es, la función

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{1}{16}\left(x^2 - a^2\right)^2 & x \geq a. \end{cases}$$

donde a es un número real cualquiera. ■

4.2.6. Ejercicios

Ejercicio 4.4. Resolver las siguientes EDOs usando el método de separación de variables:

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$.
2. $y' = -\dfrac{y}{x}$.
3. $y' = e^y \operatorname{sen}(2x)$.
4. $y' = e^{3x+2y}$.
5. $y' = xy^2$.
6. $y' = x^2(y - y^2)$.
7. $y' = kx(y - B)$, donde k y B son constantes conocidas.
8. $\left(e^{2y} - y\right)\dfrac{dy}{dx} = e^y \operatorname{sen}(x)$.
9. $(e^x + e^{-x})\, y' = y^2$.

4.2.7. EDOs lineales de primer orden

Son ecuaciones del tipo

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{4.2}$$

donde $p(x)$ y $f(x)$ son funciones conocidas. Para resolver esto usamos el denominado factor integrante: Definimos la función $P = \int p$, y multiplicamos la ecuación por $e^{P(x)}$ (denominado *factor integrante*), de donde obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y(x)\right) = f(x)e^{P(x)}.$$

Si integramos esta ecuación, tenemos que

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)e^{P(x)}\mathrm{d}x,$$

luego

$$e^{P(x)}y(x) = C + \int f(x)e^{P}(x)\mathrm{d}x,$$

donde C es una constante arbitraria. Finalmente, llegamos a que

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int f(x)e^{P}(x)\mathrm{d}x.$$

La función $y(x)$ obtenida se denomina *solución general de la ecuación*, en tanto que el término $y_h(x) := Ce^{-P(x)}$ es la *solución de la ecuación homogénea*

$$y' + p(x)y = 0, \tag{4.3}$$

y el término $y_p(x) := e^{-P(x)}\int fe^P$ es una *solución particular* de la ecuación (4.2).

Ejemplo 4.13. Resolver $y' - 3y = 6$.

Solución. Notamos que el factor integrante es $e^{-\int 3\mathrm{d}x} = e^{-3x}$. Luego multiplicamos por el factor integrante y obtenemos que

$$\begin{aligned}
e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y &= 6e^{-3x}\\
\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y(x)\right) &= 6e^{-3x}\\
\int \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y(x)\right)\mathrm{d}x &= \int 6e^{-3x}\mathrm{d}x\\
e^{-3x}y(x) &= -2e^{-3x} + C.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que la solución es

$$y(x) = -2 + Ce^{3x},$$

cuyo intervalo de solución es $(-\infty, \infty)$. ■

Ejemplo 4.14. Resolver $xy' - 4y = x^6e^x$.

Solución. En primer lugar debemos escribir la ecuación en su forma normal, es decir, suponemos que $x \neq 0$ y dividimos por x

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x.$$

De aquí observamos que el factor integrante es $e^{-\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x} = e^{-4\ln|x|} = |x|^{-4}$.

Para continuar, debemos separar los casos $x > 0$ y $x < 0$. Resolveremos primero el caso $x > 0$. Aquí $|x|^4 = x^4$ y nuestra ecuación queda

$$\begin{aligned} x^{-4}y' - 4x^{-5}y &= xe^x \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) &= xe^x \\ \int \frac{d}{dx}\left(x^{-4}y(x)\right)\mathrm{d}x &= \int xe^x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para calcular la integral del lado derecho, debemos usar integración por partes

$$\begin{aligned} \int xe^x\mathrm{d}x &= xe^x - \int e^x\mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x, \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned} x^{-4}y(x) &= C + xe^x - e^x \\ y(x) &= Cx^4 + x^5e^x - x^4e^x, \end{aligned}$$

cuyo intervalo de definición es $(0, \infty)$.

El caso $x < 0$ queda propuesto como ejercicio. ■

4.2.8. Problemas de valor inicial

Un problema de valor inicial (PVI en corto) es una ecuación diferencial del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{PVI}$$

donde $f(x, y)$ es una función de 2 variables y (x_0, y_0) es un punto en el plano $x - y$. El resultado de esta sección es el Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 4.1. *Si la función $f(x, y)$ es continua y diferenciable en las cercanías de (x_0, y_0) y además la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua, entonces la ecuación (PVI) tiene una única solución que está definida en un intervalo de la forma $(x_0 - a, x_0 + b)$ donde $a, b > 0$.*

Este teorema tiene utilidad principalmente para verificar, antes de empezar a resolver una ecuación, que una solución existe; en segundo lugar, sirve para comprobar que una solución encontrada es efectivamente la única solución.

Ejemplo 4.15. Verifique si se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad para los siguientes problemas

1. $y' - y = 0$, $y(0) = 1$.
2. $y' = -2xy^2$, $y(0) = -1$.
3. $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 2$.
4. $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 0$.
5. $xy' = y$, $y(0) = 0$.

4.2.9. Ejercicios

Ejercicio 4.5. En los siguientes problemas, encuentre la solución general de la ecuación lineal de primer orden, indicando el o los intervalos donde la solución puede estar definida.

1. $y' = 5y$.
2. $3y' + 12y = 4$.
3. $y' + y = e^{3x}$.
4. $y' + 3x^2y = x^2$.
5. $xy' + 2y = 3$.
6. $y' = 2y + x^2 + 5$.
7. $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.
8. $(1 + x)y' - xy = x + x^2$.

Ejercicio 4.6. En los siguientes problemas, resuelva el PVI, indique el intervalo donde la solución está definida y determine si la solución obtenida es única.

1. $y' + 5y = 20$, $y(0) = 2$.
2. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x})$, $y(0) = 2$.
3. $\dot{Q} = 5t^4Q$, $Q(0) = -7$.
4. $\dot{T} = k(T - 50)$, $T(0) = 200$. Asuma que k es una constante conocida.
5. $xy' + y = e^x$, $y(1) = 2$.
6. $y' + \tan xy = \cos^2 x$, $y(0) = -1$.
7. $(x + 1)y' + y = \ln x$, $y(1) = 10$.
8. $y' = y^2 \cos x$, $y(-2) = \frac{1}{3}$.
9. $xy' = y^2 - y$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
10. $y' = \dfrac{2x + 1}{2y}$, $y(-2) = -1$.

4.3. Modelos que usan EDOs de primer orden

4.3.1. Dinámica de poblaciones

De acuerdo a Thomas Malthus, la tasa a la cual la población de un país crece en un instante t es proporcional a la población del país en ese instante. Matemáticamente hablando, dicha frase se puede interpretar de la siguiente forma: Si denotamos por $P(t)$ a la población del país al instante t, entonces la tasa de crecimiento en dicho instante está dada por $\frac{dP}{dt}(t)$, luego la hipótesis de Malthus se puede escribir como

$$\frac{dP}{dt}(t) \propto P(t),$$

donde el símbolo $\propto$ significa *"proporcional a"*. Recordamos que dos magnitudes a y b son proporcionales si es que existe una constante k tal que $a = kb$, luego el modelo Malthusiano queda

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Este modelo es usualmente utilizado para modelar el crecimiento de pequeñas poblaciones en períodos cortos de tiempo, como por ejemplo, una colonia de bacterias en un plato de Petri.

Al resolver esta EDO bajo la condición inicial $P(0) = P_0$, que representa que la población al tiempo $t = 0$ es de P_0 habitantes, obtenemos que

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

que coincide con el modelo exponencial visto en el primer capítulo de este curso. Así como vimos en dicho capítulo, este modelo no siempre es adecuado, por ejemplo, no considera situaciones en las que hay ciertas tasas de natalidad, mortalidad, inmigración, emigración, etcétera.

¿Cómo incorporar una tasa de natalidad *per cápita* constante β y una tasa de mortalidad *per cápita* constante δ? Para ello, recurrimos a la interpretación de Malthus, quien nos dice que $k = \beta - \delta$, es decir nuestro modelo completo queda como

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) sirve para modelar situaciones como las descritas anteriormente (poblaciones pequeñas, en períodos cortos de tiempo y sin entrada o salida de nuevos organismos), por lo que nos queda por preguntarnos que hacer en el caso de una población con mayor cantidad de habitantes, o para períodos mas largos de tiempo.

La manera habitual de responder a esa pregunta, es relajar la condición de que las tasas sean *constantes* en la ecuación (4.4), es decir, considerar el caso en que:

$$\beta = \beta(t, P) \text{ y } \delta = \delta(t, P),$$

lo que nos deja con una ecuación no-lineal y bastante difícil de resolver en general. Un modelo simplificado basado en lo anterior, es el que propuso el matemático Pierre Verhulst, quien supone que la tasa de mortalidad es constante y que la tasa de natalidad es una función lineal de P, es decir

$$\beta(t, P) = \beta_0 - \beta_1 P(t),$$

de donde el modelo queda como

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = (\beta_0 - \delta - \beta_1 P)P \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Si denotamos por $r = \beta_0 - \delta$ y $K = \dfrac{\beta_0 - \delta}{\beta_1}$, entonces el modelo queda de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{r}{K} P(K - P) \\ P(0) = P_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) se conoce como ***ecuación logística de Verhulst*** y tiene como solución (Ejercicio: Resolver la ecuación usando fracciones parciales) a la función logística

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}. \tag{4.6}$$

Si recordamos lo visto en la sección 2.3, tenemos que el valor de K representa la capacidad máxima del sistema, también denotada como "población límite". Además podemos interpretar la constante $r = \beta_0 - \delta$ como una suerte de "tasa neta" de crecimiento.

¿Cómo utilizamos esto en aplicaciones?

Ejemplo 4.16 (Mosca de la fruta en un recipiente cerrado). Cierto ambiente es capaz de sostener M individuos. Si la tasa de crecimiento neto es proporcional a $M - P$, encuentre un modelo que represente la población.

Solución. Tenemos que $\beta - \delta = k(M - P)$, donde k es una constante de proporcionalidad. Utilizando el modelo genérico dado por la ecuación (4.4), llegamos a que

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = kP(M - P),$$

es decir, es una ecuación logística. ■

Ejemplo 4.17 (Población caníbal). Una comunidad cerrada cuenta con una tasa de natalidad constante igual a β, y una tasa de mortalidad proporcional a P. Determine una ecuación diferencial que modele la situación.

Solución. En este caso tenemos que $\delta = \alpha P$, luego la ecuación (4.4) queda

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = (\beta - \alpha P)P = \alpha P \left(\frac{\beta}{\alpha} - P \right),$$

que es una ecuación logística. ■

Ejemplo 4.18 (Propagación de una enfermedad). En una comunidad cerrada con P_T habitantes, la tasa de contagio de cierta enfermedad es proporcional a la interacciones entre individuos sanos y enfermos. Determine una ecuación que modele la propagación de la enfermedad.

Solución. Si denotamos por $P(t)$ al número de personas contagiadas al instante t, lo que nos dicen es que

$$\frac{dP}{dt} \propto P(P_T - P),$$

donde $(P_T - P)$ es la cantidad de individuos sanos[1] Es decir tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = kP(P_T - P),$$

otra ecuación logística. ■

La serie de ejemplos anteriores muestra que se pueden modelar diversas situaciones con la ecuación logística, sin embargo, aún no consideramos el caso en que la comunidad es abierta, es decir, permitimos la llegada y salida de individuos. En tales casos, tenemos que las tasas r_i y r_e no son nulas. Por ejemplo, una población que se rige por el modelo logístico, además cuenta con una tasa neta de inmigración/emigración de $R = r_i - r_e$ individuos por año.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{K}P(K - P) + R.$$

Para resolver esta ecuación de manera explícita, incluso en el caso en que R es constante, se necesitan técnicas un poco mas avanzadas de integración, las que no veremos en este curso[2]. Es por esto que solo nos remitiremos al uso de la ecuación logística para comunidades cerradas.

4.3.2. Objetos en caída libre

De acuerdo a la segunda ley de Newton, tenemos que la sumatoria de fuerzas sobre un objeto es igual a la masa del mismo por su aceleración, es decir

$$F_{\text{neta}} = ma.$$

Si denotamos por v a la velocidad del objeto, tenemos que

$$F_{\text{neta}} = m\dot{v}.$$

Ahora, en el caso de un objeto en caída libre, suponemos que no hay fuerzas externas a la gravedad actuando sobre el objeto, es decir[3] $F_{\text{neta}} = F_{\text{gravedad}} = -mg$ lo que nos da una ecuación diferencial para la velocidad el objeto

$$m\dot{v} = -mg,$$

[1] Observar que estamos modelando una "interacción" entre dos individuos, como el producto de las variables. Esto será utilizada constantemente en el futuro.

[2] El caso en que r, K y R son constantes se puede resolver usando fracciones parciales. Cualquier otro caso escapa a las técnicas que estudiaremos en este curso.

[3] La constante $g \approx 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ denota la aceleración de gravedad en la Tierra.

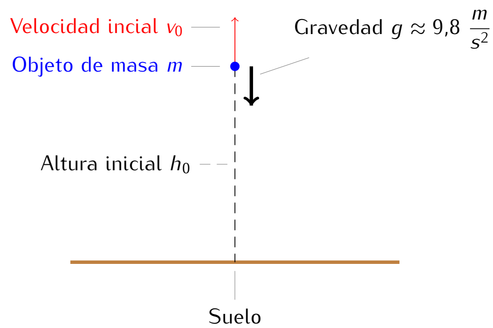


Figura 4.1: Masa en caída libre.

o equivalentemente

$$\dot{v} = -g.$$

Esta ecuación se resuelve integrando directamente, para obtener que

$$v(t) = v_0 - gt$$

donde $v_0 = v(0)$ la velocidad inicial del objeto. Similarmente, tenemos que si h es la altura del objeto, entonces $v = \dot{h}$, por lo que tenemos la ecuación diferencial para determinar la altura del objeto al instante t dada por

$$\dot{h} = v = v_0 - gt,$$

integrando obtenemos que

$$h(t) = h_0 + v_0 t - g\frac{t^2}{2},$$

donde $h_0 = h(0)$ es la altura inicial del objeto.

Ejemplo 4.19 (Arquero suicida). Un arquero con intenciones suicidas lanza verticalmente, desde el suelo, una flecha con velocidad inicial de 49 m/s. Determine la altura máxima de la flecha y el tiempo que le toma al arquero recibir el flechazo de vuelta.

Solución. Usando la solución obtenida, tenemos que

$$v(t) = 49 - 9{,}8t,$$

y

$$h(t) = 49t - 4{,}9t^2.$$

Para resolver este problema, debemos interpretar en términos matemáticos que significa alcanzar la altura máxima. La clave es notar que la flecha cambia de dirección al llegar al máximo, es decir pasamos de una velocidad positiva (se mueve hacia arriba) a una negativa (se mueve hacia abajo), en otras palabras, la condición es que la velocidad sea exactamente 0.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 49 - 9{,}8t = 0 \Rightarrow t = \frac{49}{9{,}8} = 5.$$

Es decir, luego de 5 segundos, la flecha alcanza su altura máxima. Para determina la altura, basta con calcular $h(5) = h(t) = 49 \cdot 5 - 4{,}9(5)^2 = 122{,}5$ metros.

Para determinar cuanto tiempo tarda la flecha en impactar al arquero, notamos que dicha situación ocurre cuando $h(t) = 0$ (la flecha llega al nivel del piso), es decir

$$h(t) = 0 \Rightarrow 49t - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ó } t = 10.$$

La solución $t = 0$ representa el momento en que se disparó la flecha, y la solución $t = 10$ representa el tiempo que demora la flecha en impactar al arquero. ■

Observación 4.1. En el ejemplo anterior, muchos pensarán ¿por qué calculamos el tiempo de retorno, si es mucho mas fácil decir que la flecha se demora lo mismo en subir al máximo que en bajar?

La razón por la cual lo resolvimos imponiendo la condición $h(t) = 0$ es en virtud de que dicha condición aplica en cualquier circunstancia, no solo en el caso de caída libre. ¿Qué pasaría si agregamos resistencia del aire a nuestro ejemplo? Nuestra intuición nos dice que quizás la flecha se debería demorar mas en caer que subir. Sin importar nuestra buena o mala intuición, la condición $h(t) = 0$ siempre nos dará la respuesta exacta al tiempo de retorno al suelo, así como la condición $v(t) = 0$ siempre nos dará el tiempo que le toma al objeto llegar a su altura máxima.

Veamos que pasa si suponemos que aparte de la gravedad, tenemos una fuerza de resistencia al movimiento: fuerza de roce, es decir

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{gravedad}} + F_{\text{roce}}.$$

¿Cómo se modela la fuerza de roce?

En primer lugar la fuerza de roce se opone al movimiento (es decir debe tener el signo opuesto al signo de la velocidad), y habitualmente se supone que la fuerza es proporcional a v, o a una potencia de v, es decir

$$F_{\text{roce}} = -kv^p,$$

donde $k > 0$ y $p \geq 1$ son constantes empíricas, siendo los casos $p = 1$ y $p = 2$ los mas usados. Veamos el caso de un modelo con roce lineal, es decir $p = 1$. El modelo diferencial quedaría como

$$m\dot{v} = -mg - kv,$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = -g.$$

En este punto definimos la cantidad

$$\rho := \frac{k}{m}$$

y la denotamos *coeficiente de arrastre*: esta constante es una constante empírica que depende del objeto en cuestión.

Para resolver la EDO resultante, utilizamos el factor integrante $e^{\rho t}$, y obtenemos que la solución general está dada por

$$v(t) = -\frac{g}{\rho} + Ce^{-\rho t}.$$

Si consideramos que la velocidad inicial del objeto es $v(0) = v_0$, obtenemos la fórmula para $v(t)$

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right) e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}.$$

Una observación importante es que cuando hay roce, se obtiene lo que se llama *velocidad terminal*, que se calcula mediante

$$v_T := \lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{\rho}.$$

Esta velocidad es la máxima velocidad que puede alcanzar un objeto en caída libre, independiente de la altura a la que este se deje caer. Esta fórmula explica de alguna manera el por qué funcionan los paracaídas, ya que de no haber roce, un paracaidista aumentaría su velocidad en todo momento durante su caída.

Ejemplo 4.20 (Arquero suicida con roce). Veamos como afecta un roce lineal a nuestro arquero suicida. Supongamos que la flecha utilizada tiene un coeficiente de arrastre $\rho = 0{,}04$. Utilizando la fórmula recién calculada, obtenemos que

$$v(t) = 294e^{-\frac{t}{25}} - 245.$$

Además si recordamos que $\dot{h} = v$, obtenemos que

$$h(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-\frac{t}{25}}.$$

Ahora, para calcular la altura máxima, imponemos la condición $v(t) = 0$, y encontramos que

$$t_{max} = 25 \ln \frac{294}{245} \approx 4{,}56 \text{ segundos},$$

de donde la altura máxima es

$$h_{max} = h(t_{max}) \approx 108{,}3.$$

En cuanto al tiempo de retorno, este es mucho mas complicado de calcular que en el caso anterior, ya que si bien la condición $h(t) = 0$ sigue siendo correcta, el resolver dicha ecuación es algo no trivial, y que escapa a las técnicas de este curso. Una manera de hacerlo, es mediante el uso de un computador (técnicas numéricas), de donde obtenemos que

$$t_{impacto} \approx 9{,}41 \text{ segundos}.$$

Observar que $9{,}14 - 4{,}56 = 4{,}85$, es decir, el tiempo de descenso es mas largo que tiempo de ascenso, confirmando que cuando hay roce, nuestra intuición puede ser incorrecta.

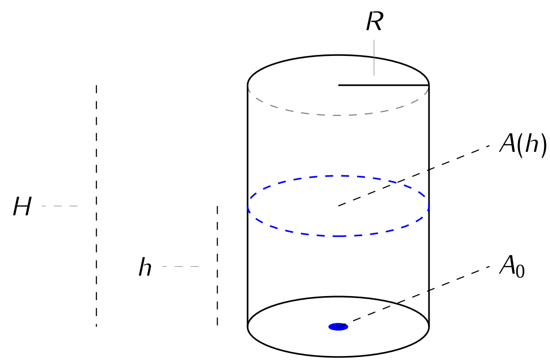


Figura 4.2: Ley de Torricelli.

4.3.3. Ley de Torricelli

Esta ley nos permite calcular el nivel del agua en un recipiente que se vacía debido a un pequeño agujero en su fondo

De acuerdo a Torricelli, el agua solo cae producto de la fuerza de gravedad, cuya aceleración denotamos por g, razón de la cual se puede determinar una ecuación que modele la altura h del nivel del agua: si el área del agujero es A_0, y el área del nivel del agua cuando ésta tiene una altura h es $A(h)$, entonces tenemos que la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A(h)}\sqrt{2gh} \tag{4.7}$$

nos permite determinar la altura h en cualquier instante t.

Ejemplo 4.21 (Recipiente cilíndrico). En este caso $A(h) = \pi R^2$

Ejemplo 4.22 (Recipiente cuadrado). En este caso $A(h) = ab$

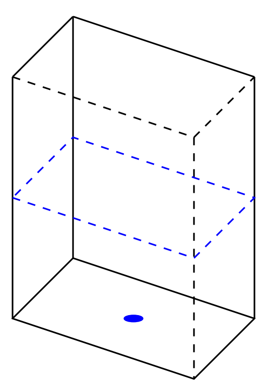


Figura 4.3: Ley de Torricelli.

Ejemplo 4.23 (Recipiente cónico truncado). En este caso $A(h) = \frac{\pi}{H^2}\left(h(R_1 - R_0) + HR_0\right)^2$

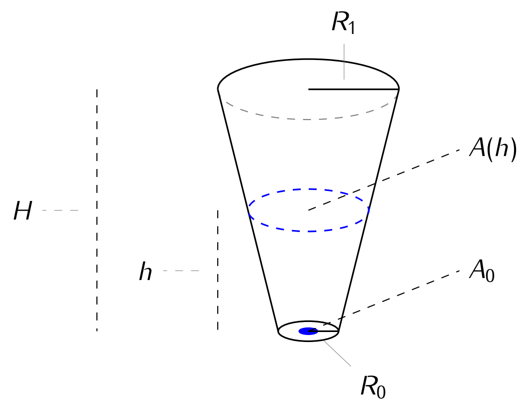


Figura 4.4: Ley de Torricelli.

4.3.4. Ley de enfriamiento de Newton

De acuerdo a Newton, la tasa a la cual cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto y el medio en el cual está sumergido, es decir, si denotamos por $T(t)$ a la temperatura del objeto al instante t, y T_M a la temperatura del medio, tenemos que

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_M,$$

de donde tenemos que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M)$$

Una simplificación que se suele hacer, es suponer que T_M es constante, en cuyo caso normalmente tenemos que $k < 0$.

Ejemplo 4.24. Una taza de café se enfría según la ley de Newton. Si inicialmente el café estaba hirviendo ($T(0) = 100°$) y la temperatura ambiente es de 13°, estime la temperatura del café luego de 2 minutos si es que $k = -1$.

Solución. De acuerdo al modelo, tenemos que la temperatura del café se puede modelar mediante la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{T} = -(T - 13) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

Resolvemos esta ecuación usando separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -(T - 13) \\ \int \frac{1}{T - 13} \mathrm{d}T &= -\int \mathrm{d}t \\ \ln(T - 13) &= -t + C, \end{aligned}$$

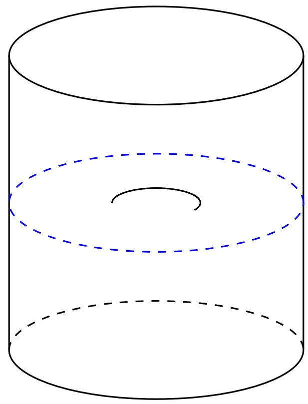


Figura 4.5: Mezcla de soluciones.

de donde $T(t) = 13 + e^{C-t} = 13 + Ae^{-t}$, donde $A = e^C$. Imponiendo la condición $T(0) = 100$, obtenemos que

$$T(t) = 13 + 87e^{-t}.$$

Concluimos diciendo que la temperatura luego de 2 minutos es $T(2) = 13 + 87e{-}2 \approx 24{,}77$. ■

4.3.5. Mezcla de soluciones

La mezcla de dos soluciones con concentraciones distintas puede ser modelada mediante una ecuación diferencial. Para entender la idea, usaremos un ejemplo:

Se tiene un estanque que inicialmente contiene L_0 litros de solución de agua con sal con una concentración de c_i kilos de sal por litro de agua. Al instante $t = 0$ se agrega al estanque una solución de agua con sal con una concentración de c_e kilos de sal por litro de agua, la cual se incorpora a una tasa de r_e litros por segundo, y simultáneamente se extrae la solución resultante a una tasa de r_s litros por segundo.

Nos interesa saber la concentración de la solución que extraemos del estanque en cualquier instante t, para ello denotamos por $S(t)$ a la cantidad de sal en el estanque al instante t. Por ejemplo, al instante inicial tenemos que hay

$$S(0) = L_0 \cdot c_i$$

kilos de sal. ¿Cómo determinamos la cantidad de sal en otro instante t? La clave es utilizar una ecuación diferencial: notamos que la tasa a la cual varía la cantidad de sal en el estanque se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dS}{dt} = R_e - R_s,$$

donde R_e simboliza la cantidad de sal que ingresa al estanque por segundo, y R_s es la cantidad de sal que sale del estanque por segundo. Estas cantidades se pueden calcular de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_e &= (\text{tasa de entrada de la solución}) \times (\text{concentración de entrada de sal}) \\ R_s &= (\text{tasa de salida de la solución}) \times (\text{concentración de salida de sal}). \end{aligned}$$

En nuestro problema, tenemos que

$$\begin{aligned} R_e &= r_e \cdot c_e \\ R_s &= \frac{r_s}{L_0 + (r_e - r_s)t} S(t). \end{aligned}$$

Luego nuestro modelo queda de la siguiente forma

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = r_e \cdot c_e - \dfrac{r_s}{L_0 + (r_e - r_s)t} S(t) \\ S(0) = L_0 \cdot c_i \end{cases}$$

Para resolver esta ecuación en aplicaciones utilizamos el método del factor integrante, puesto que las cantidades $r_e,\ c_e,\ r_s$ pueden ser tanto constantes o funciones del tiempo

Ejemplo 4.25. Se agregan 3 litros por minuto de salmuera con una concentración de 0,5 kilos por litro a un estanque que contiene 300 litros de salmuera con una concentración de 0.2 kilos por litro. Si se extraen 3 litros por minuto del estanque, ¿cuál es la concentración de la salmuera que sale?

Solución. Tenemos que identificar las variables:

$$\begin{aligned} L_0 &= 300 \\ c_i &= 0{,}2 \\ r_e &= 3 \\ c_e &= 0{,}5 \\ r_s &= 3, \end{aligned}$$

de donde nuestro modelo queda

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 1{,}5 - \dfrac{1}{100} S(t) \\ S(0) = 60 \end{cases}$$

■

Ejemplo 4.26. Resuelva el problema anterior, suponiendo que se extraen solo 2 litros por minuto.

Solución. Lo único que cambia es que $r_s = 2$, lo que nos deja como modelo

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 1{,}5 - \dfrac{3}{300 + t} S(t) \\ S(0) = 60 \end{cases}$$

■

4.3.6. Ejercicios

En los siguientes ejercicios se usa la notación vista en clases. Tal como mencioné al comenzar esta parte del curso, para ver mas ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, referirse al libro de D. Zill [13] o el libro de M. Spiegel [9] que aparecen en la bibliografía. De hecho muchos de los ejercicios aquí propuestos se encuentran en esos libros (¡varios con solución!)

Ejercicio 4.7. Plantee modelos de población como ecuaciones diferenciales en los siguientes casos. Además entregue la solución del PVI obtenido.

1. La tasa de natalidad (β) es proporcional a la población. Y las tasas de mortalidad (δ), inmigración (r_i) y emigración (r_e) son constantes.
2. La tasa de crecimiento neto ($k = \beta - \delta$ es constante) y la tasa neta de salida y entrada de población $r_i - r_e = \cos t$. Esto indica que en ciertos períodos hay inmigración con nada de emigración, y en otros sucede todo lo contrario. Tales supuestos pueden modelar (al menos de modo rudimentario) el período de vacaciones en una ciudad.

Ejercicio 4.8. A un hospital con P_T individuos llega una persona portadora de un virus altamente contagioso. Si $P(t)$ representa los individuos que tienen el virus al instante t, determine una ecuación diferencial que modele los siguientes casos (¡no resuelva las ecuaciones!). Siempre suponga que inicialmente el único infectado es la persona que ingresa al hospital y que se presume que la tasa a la cual varía la población enferma es proporcional a las interacciones entre individuos sin el virus y con el virus.

1. Las autoridades declaran cuarentena (no entran ni salen individuos).
2. Las autoridades dejan salir pacientes no infectados a una tasa de r_1.
3. Las autoridades dan por perdida la batalla y no dejan salir a nadie del hospital, sin embargo permite el ingreso de portadores del virus a una tasa de r_2.
4. ¿Cómo cambian los modelos si es que $P(t)$ representa a los individuos no contagiados?

Ejercicio 4.9. Una placa de Petri contiene inicialmente una colonia de 1000 bacterias. Cuando $t = 1$ se mide que el número de bacterias es de 1500. Si la tasa de crecimiento de la colonia es proporcional al numero de bacterias $P(t)$ en ésta, determine el tiempo necesario para que la colonia se triplique en cantidad.

Ejercicio 4.10. La población de una comunidad crece a una tasa que es proporcional al número de individuos en ella. Si la población inicial se duplicó luego de 5 años, ¿cuánto tiempo le toma a la población triplicarse? ¿y cuadruplicarse?

Ejercicio 4.11. En una plantación de alerces se considera un modelo en el que la tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de alerces, pero en adición se talan alerces a una tasa de $r > 0$ alerces por día. Esto nos da el modelo

$$\frac{dP}{dt} = kP - r,$$

donde $k, r > 0$ son constantes. Si la cantidad inicial de alerces es de 1000 árboles, y las tasas están dadas por $k = 0{,}05$, $r = 100$. Se presume que bajo estas condiciones no deberían quedar alerces luego de t_0 días. Encuentre t_0 (Hint: resuelva la ecuación $P(t) = 0$.)

Ejercicio 4.12. Un estudiante contagiado de un tipo de gripe llega a un campus cerrado de una universidad con 1000 estudiantes inicialmente sanos. Determine una ecuación diferencial para el número de estudiantes contagiados si es que la tasa a la cual se esparce la gripe es proporcional al número de interacciones entre los estudiantes contagiados y los sanos.

Si es que en adición se sabe que el número de estudiantes contagiados luego de 4 días es de 50 estudiantes, determine el número de estudiantes contagiados luego de 6 días.

Ejercicio 4.13. Cierta población se rige por el modelo logístico

$$\frac{dP}{dt} = P(0{,}1 - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000,$$

donde t se mide en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿Cuándo la población será igual a la mitad de la población límite?

Ejercicio 4.14. Un estanque pierde agua debido a un orificio en su base. Usando la ley de Torricelli vista en clases, responda las siguientes preguntas en los casos en que el estanque es: un cilindro, un paralelepípedo, un cono y un cono invertido. Suponga que todas las constantes son conocidas.

1. El tiempo que demora en vaciarse el estanque, si es que éste estaba originalmente lleno.
2. Determine el nivel del agua cuando el estanque está a medio llenar, así como la velocidad a la que disminuye el nivel del agua en ese instante.
3. ¿A qué velocidad disminuye el nivel del agua justo en el instante en que el estanque esta vacío?
4. Suponga que se agrega agua al estanque a una tasa de r m^3 por segundo. ¿Cómo cambia el modelo? Hint: Notar que la ecuación de Torricelli expresa un cambio en el *nivel del agua*, por lo que agrega metros cúbicos indica cambios en el *volumen del agua*, por lo que se deben ajustar los datos para que todo mida lo mismo.

Hint: Le puede servir saber que el volumen de un cilindro de altura H y radio R de su base es de $V = \pi R^2 H$, en tanto que el volumen de un cono de altura H y radio R de su base es de $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Ejercicio 4.15. Se dispara verticalmente una bala de cañón de 5 kilos desde el piso con velocidad inicial de 100 m/s. Responda las siguientes preguntas suponiendo que: 1) no hay resistencia del aire, 2) la resistencia del aire es la forma $F_R = -0{,}025v$.

1. ¿Cuál es la altura máxima de la bala?
2. ¿A qué velocidad impactaría la bala a un avión que vuela a la mitad de la altura máxima determinada en la parte anterior?
3. En el caso sin resistencia del aire: ¿Cuál es la velocidad a la que regresa la bala al suelo si es que no impacta a ningún objeto?
4. En el caso con resistencia del aire, se puede calcular la determinada **velocidad terminal**. Esta velocidad corresponde al límite de v cuando $t \to \infty$. Encuentre la velocidad terminal para este ejemplo. (Esto sirve para explicar por qué los paracaídas funcionan).

Ejercicio 4.16. Un recipiente contiene 500 litros de una solución compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Otra solución, con 50 % de agua y 50 % de alcohol se va añadiendo al recipiente a razón de 4 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, ¿cuánto alcohol hay en el recipiente a los 10 minutos?

Ejercicio 4.17. Un recipiente contiene 500 litros de una solución que contiene 50 kilos de sal. Al recipiente se le agregar una solución salada con una concentración de 0.25 kilos por litro a razón de 10 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a razón de 5 litros por minuto. Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, ¿cuánto sal hay en el recipiente a los 10 minutos?

Ejercicio 4.18. Un recipiente contiene 200 litros de una solución que contiene 15 kilos de azúcar. Al recipiente se le agrega agua destilada a un tasa de 10 litros por minuto. Simultáneamente, el recipiente se va vaciando a la misma tasa (10 litros por minuto). Suponiendo que el contenido del recipiente se revuelve constantemente, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánta azúcar hay en el recipiente a los 15 minutos?
2. Calcular el tiempo que tarda la cantidad de azúcar en llegar a los 5 kilos.
3. La intuición nos dice que luego de mucho tiempo realizando este proceso, la cantidad de azúcar en el recipiente debería ser cada vez menor. Hallar la cantidad de azúcar cuando $t \to \infty$ para contrastar nuestra intuición con este modelo.

Ejercicio 4.19. Usando la ley de Newton para el enfriamiento/calentamiento, resuelva el siguiente escenario. Suponga que se prepara una taza de café con agua hirviendo ($T = 100°$), la que se deja sobre una mesa en una pieza a temperatura ambiente (suponga que $T_M = 10°$ es constante). Si luego de 10 minutos, la temperatura de la tasa de café es de 40° grados, determine la temperatura del café luego de 30 minutos.

¿Cómo cambiaría el modelo si es que la temperatura ambiente no es constante? Suponga, para fijar, ideas que $T_M(t) = 10 + 10\cos(t)$ (es decir la temperatura oscila en torno a los 10°).

Ejercicio 4.20. Cuando se saca un queque del horno, se mide que su temperatura es de 200°. Tres minutos después su temperatura es de 100°. ¿Cuánto tiempo toma para que el queque alcance 21° de temperatura si es que la temperatura ambiente es de 20°?

Ejercicio 4.21. Un termómetro se lleva del interior de una habitación aislada hacia el exterior, donde la temperatura es de 5°. Luego de 1 minuto, el termómetro mide 15°, y luego de 5 minutes mide 10°. ¿Cuál era la temperatura al interior de la habitación?

Ejercicio 4.22. Un cadáver se encuentra en una pieza cerrada donde la temperatura ambiente es de 20°. Al momento en que se encontró el cadáver, la temperatura del cuerpo era de 35°. Una hora después se hizo una segunda medición, que determinó que la temperatura era de 30°. Suponiendo que la hora de muerte es $t = 0$ y que la temperatura del cuerpo era de 37°, determine cuantas horas transcurrieron desde que la persona murió, hasta que se encontró el cadáver.

Ejercicio 4.23. El modelo de enfriamiento de Newton, no toma en cuenta la superficie del objeto que está en contacto con el ambiente (es razonable pensar que a mayor superficie, mayor debiese ser la pérdida/ganancia de temperatura). Una manera de corregir esto es considerar la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = kS(T - T_M),$$

donde S representa la superficie del cuerpo y k es una constante. Suponga que la superficie del cadáver encontrado en el problema anterior es de 4 m^2 y responda las mismas preguntas. ¿Cómo cambian sus respuestas si la superficie del cadáver es ahora de 3 m^2?

Ejercicio 4.24. En teoría de aprendizaje, la tasa a la que se memoriza un concepto suele suponerse es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de lo que se quiere memorizar, y que $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada. Determine y resuelva la ecuación diferencial que modela esta situación.

Ejercicio 4.25. Escriba un modelo que represente la situación de aprendizaje, pero que considere que la tasa de contenidos memorizados, además de ser proporcional a lo que queda por memoriza, disminuye producto del paso del tiempo a una tasa r. Resuelva el modelo obtenido, suponiendo que r es constante y conocida.

4.4. EDOs lineales de segundo orden

Nos enfocaremos en las EDOs lineales de segundo orden cuyos coeficientes son constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$Ay'' + By' + Cy = g(x),$$

donde $A \neq 0$, B y C son constantes conocidas, y $g(x)$ es una función conocida.

4.4.1. EDOs lineales de segundo orden homogénea

Son ecuaciones donde $g(x) \equiv 0$, o sea de la forma

$$Ay'' + By' + Cy = 0. \tag{4.8}$$

Para resolver estas ecuaciones, proponemos una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$ y buscamos el o los λ's que nos dan una solución.

Definición 4.7 (Ecuación auxiliar)**.** *Dado λ, definimos la ecuación auxiliar como*

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \tag{4.9}$$

Para encontrar la solución general de la ecuación (4.8), resolvemos la ecuación auxiliar (4.9) y escribimos la solución general como

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes, y la funciones y_1 e y_2 se denotan *soluciones de la ecuación homogénea*, y se calculan como:

Caso 1: Dos raíces reales y distintas ($B^2 - 4AC > 0$). Si las raíces son λ_1 y λ_2 entonces

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

e

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Caso 2: Dos raíces complejos conjugadas ($B^2 - 4AC < 0$). Si las raíces son $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ entonces

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x).$$

Caso 3: Una raíz real repetido ($B^2 - 4AC = 0$). En este caso la raíz es $\lambda_1 (= -\frac{B}{2A})$ y tenemos que

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

e

$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}.$$

4.4.2. EDOs lineales de segundo orden no-homogénea

Es el caso de la ecuación

$$Ay'' + By' + Cy = g(x),$$

donde $g(x)$ es una función conocida. Para encontrar la solución general de esta ecuación, resolvemos primero la ecuación homogénea ($g(x) \equiv 0$) y obtenemos las funciones y_1 e y_2 como lo hicimos anteriormente (dependiendo de como sean las raíces de la ecuación auxiliar). Luego definimos la función *solución particular*

$$y_p(x) := u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

donde

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{A(y_1y_2' - y_1'y_2)}$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{A(y_1y_2' - y_1'y_2)},$$

y obtenemos que la solución general de la EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea es

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

4.4.3. Problemas de valor inicial

Es el caso de la ecuación

$$Ay'' + By' + Cy = g(x),$$

cuenta además con una condición inicial del tipo

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,$$

donde $x_0,\ y_0,\ y_1$ son valores conocidos. Dado que sabemos resolver la ecuación y obtenemos una solución de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

la tarea es encontrar las constantes C_1 y C_2 de modo que se satisfaga la condición inicial (es decir, evaluamos la función $y(x)$ y su derivada, $y'(x)$ cuando $x = x_0$). Esto se traduce en resolver un sistema lineal de 2×2.

4.4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.26. Verifique si la función dada es o no una solución de la EDO de segundo orden.

1. $y(x) = e^x - e^{-x}$; $y'' - y = 0$.
2. $y(x) = 4e^{4x} - 10e^{-x}$; $y'' - 3y' - 4y = 0$.
3. $y(x) = 10 - x^2$; $xy'' - y' = 0$.
4. $y(x) = 4 + 10\cos x - \operatorname{sen} x$; $y'' + y = 0$.
5. $y(x) = 3e^{2x}$; $y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$.
6. $y(x) = \operatorname{sen}(5x)$; $y'' + 5y' - y = \cos x$.
7. $y(x) = x^2 + 3x$; $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16$.

Ejercicio 4.27. Resuelva las siguientes EDOs de segundo orden.

1. $y'' - y' - 12y = 0$.
2. $y'' - 4y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
4. $4y'' - 4y' + y = 0$.
5. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$.
6. $2y'' + 2y' + y = x$.

Ejercicio 4.28. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial.

1. $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
2. $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.
3. $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.
4. $4y'' - 4y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.
5. $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $2y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4.5. Modelos que usan EDOs de segundo orden

4.5.1. Ejercicios

4.6. Sistemas de EDOs lineales de primer orden

Nos enfocaremos en el estudio de sistemas de EDOs lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + ey \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $a,\ b,\ c$ y e son constantes conocidas. Para resolver este tipo de sistemas, utilizaremos el concepto de valores y vectores propios.

Definición 4.8 (Matriz asociada). *Es la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$$

Usando notación matricial, un sistema lineal de ecuaciones diferenciales se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X},$$

donde $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Definición 4.9 (Valor propio). *Decimos que λ es un valor propio para el sistema de EDOs* (4.10)*, si es un valor propio de la matriz asociada A. En otras palabras, es una solución de la ecuación* $\det(A - \lambda I) = 0$*. En nuestro caso de 2 variables, la ecuación es*

$$(a - \lambda)(e - \lambda) - bc = 0.$$

Definición 4.10 (Vector propio). *Si λ es un valor propio para el sistema* (4.10)*, entonces* $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ *es un vector propio si es que satisface el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k}$, es decir*

$$\begin{cases} ak_1 + bk_2 = \lambda k_1 \\ ck_1 + ek_2 = \lambda k_2 \end{cases} \tag{4.11}$$

4.6.1. Solución de un sistema de EDOs lineales

Las soluciones se calculan dependiendo de los valores propios obtenidos:

Caso 1: Dos valores propios reales y distintos, λ_1 y λ_2.

En este caso hay un vector propio asociado a cada valor propio: $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}$ asociado a λ_1 y $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix}$ asociado a λ_2. La solución general del sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 k_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 k_{21} e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) &= C_1 k_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 k_{22} e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

o en notación matricial

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Caso 2: Dos valores propios complejos conjugados, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

En este caso solo hay que calcular el vector propio asociado a λ_1, que será de la forma

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \delta_1 i \\ \gamma_2 + \delta_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} i = \gamma + \delta i.$$

La solución general del sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\alpha t} \left(\gamma_1 \cos(\beta t) - \delta_1 \operatorname{sen}(\beta t) \right) + C_2 e^{\alpha t} \left(\delta_1 \cos(\beta t) + \gamma_1 \operatorname{sen}(\beta t) \right), \\ y(t) &= C_1 e^{\alpha t} \left(\gamma_2 \cos(\beta t) - \delta_2 \operatorname{sen}(\beta t) \right) + C_2 e^{\alpha t} \left(\delta_2 \cos(\beta t) + \gamma_2 \operatorname{sen}(\beta t) \right), \end{aligned}$$

o en notación matricial

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\alpha t} (\gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t) + C_2 e^{\alpha t} (\delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t)$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Caso 3: Un valor propio real repetido, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

En este caso tenemos el vector propio asociado a λ que llamamos $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ y un vector propio *generalizado* $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ que se calcula resolviendo el sistema lineal ($(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{k}$)

$$\begin{cases} ap_1 + bp_2 = \lambda p_1 + k_1 \\ cp_1 + ep_2 = \lambda p_2 + k_2. \end{cases}$$

Hecho esto, la solución general es

$$x(t) = C_1 k_1 e^{\lambda t} + C_2 \left(k_1 t e^{\lambda t} + p_1 e^{\lambda t} \right),$$
$$y(t) = C_1 k_2 e^{\lambda t} + C_2 \left(k_2 t e^{\lambda t} + p_2 e^{\lambda t} \right),$$

o en notación matricial

$$\mathsf{X}(t) = C_1 \mathbf{k} e^{\lambda t} + C_2 \left(\mathbf{k} t e^{\lambda t} + \mathbf{p} e^{\lambda t} \right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

4.6.2. Problemas de valor inicial para sistemas de EDOs

Son problemas en los que se tiene un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + ey \end{cases}$$

pero además contamos con condiciones iniciales de la forma

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0,$$

donde t_0 denota un “tiempo inicial” (usualmente 0), y x_0, y_0 son las “posiciones iniciales”. Para resolver estos problemas, debemos primero resolver el sistema, encontrando soluciones usando las fórmulas anteriores que cuentan con 2 constantes arbitrarias, C_1 y C_2, las cuales encontraremos al imponer las condiciones iniciales (o sea, evaluamos las funciones para $t = t_0$) y resolver el sistema lineal de 2×2 resultante.

4.6.3. Ejercicios

Ejercicio 4.29. Resolver los siguientes sistemas de EDOs

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 12y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}x - 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \\ \dfrac{dx}{dt} = -6x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4x \\ \dfrac{dx}{dt} = 9y + 12x \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + 6x \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$

Ejercicio 4.30. Resuelva los problemas del ejercicio anterior, sujetos a las siguientes condiciones iniciales

1. $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.
2. $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.
3. $x(0) = 10$, $y(0) = 0$.

4.7. Modelos que usan Sistemas de EDOs

4.7.1. Ejercicios

Bibliografía

[1] Bazaraa, Mokhtar S., *Programación lineal y flujo en redes*, México: Limusa.

[2] Hoffmann, Laurence D., 1943-, *Cálculo para la administración, economía y ciencias sociales*, Santafé de Bogotá: McGraw-Hill, c2001.

[3] Jauffred M., Francisco J., *Métodos de optimización : programación lineal gráficas*, México: Centro Regional de Ayuda Técnica, 1971.

[4] Larson, Hostetler, Edwards, *Cálculo, Vols. 1 y 2*, 5a edición, McGraw-Hill, 1995.

[5] Neuhauser, Claudia, *Matemáticas para Ciencias*, Pearson 2009.

[6] O'Neil, Peter V., *Matemáticas avanzadas para ingeniería: análisis de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales y análisis complejo*, Australia : Thomson, c2004.

[7] Roxin, Emilio O., *Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control*, Buenos Aires: EUDEBA, c1968.

[8] Simmons, George Finlay, 1925-, *Cálculo y geometría analítica*, Madrid: McGraw-Hill.

[9] Spiegel, Murray R., *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1983.

[10] Stewart, James, *Cálculo*, México, D. F: International Thomsom Editores.

[11] Taha, Hamdy A., *Investigación de operaciones*, México: Alfaomega, c1995,2004.

[12] Winston, Wayne L., *Investigación de operaciones*, México: Grupo Editorial Iberoamericana, c1994.

[13] Zill, Dennis G. 1940-, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, México: Thomson, 2007.