Espacios de Sobolev con peso y EDOs singulares

Escuela de Verano UTalca 2014

Hernán Castro Z.

hcastro@inst-mat.utalca.cl.

Última actualización: 10 de Enero del 2014.

Índice

1. Introducción

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria: Sea f una función continua en el intervalo $[0,1]$, queremos encontrar una función u que sea una solución de

$$(\star) \qquad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Una forma de resolver este problema es encontrar u de manera explícita: Primero encontramos la solución general de la ecuación homogénea

$$u_h(x) = Ae^x + Be^{-x},$$

y luego encontramos una solución particular mediante algún método.

Ejemplo 1. Si $f(x) = 1$, por inspección notamos que $u_p(x) \equiv 1$, de donde

$$u(x) = -\frac{1}{1+e}e^x - \frac{e}{1+e}e^{-x} + 1.$$

Ejemplo 2. Si $f(x) = x$, observamos que $u_p(x) = x$, de donde

$$u(x) = -\frac{e}{e^2-1}e^x + \frac{e}{e^2-1}e^{-x} + x.$$

Ejemplo 3. Si $f(x) = x^2$, observamos que $u_p(x) = 2 + x^2$, de donde

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + x^2 + 2$$

para ciertas constantes A, B.

Ejemplo 4. Si $f(x) = x^3$, observamos que $u_p(x) = 6x + x^3$, de donde

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + x^3 + 6x.$$

para ciertas constantes A, B.

En general, si f es una función continua cualquiera, utilizamos por ejemplo el método de variación de parámetros para encontrar que

$$u_p(x) = -\frac{1}{2}\int f(s)e^{-s}\mathrm{d}s \cdot e^x + \frac{1}{2}\int f(s)e^{s}\mathrm{d}s \cdot e^{-x},$$

y que para ciertas constantes $A,\ B$ la solución de la ecuación $(\star)$ se puede escribir como

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + u_p(x).$$

Como f es una función continua, no es difícil demostrar usando la fórmula que la función u encontrada es de clase C^2, lo que da pie para hacer la siguiente definición:

Definición 1 (Solución clásica). *Decimos que u es una solución clásica de* ($\star$) *, si u es una función de clase C^2 en el intervalo* $[0,1]$ *que resuelve la ecuación.*

Observemos que para encontrar una solución clásica de ($\star$), calculamos explícitamente una solución para ($\star$), y luego demostramos a mano que dicha solución u es de clase C^2.

En el caso particular de la ecuación ($\star$), estos cálculos son relativamente directos y no requieren mayor esfuerzo, sin embargo, cuando complicamos la ecuación un poco, dichos cálculos, si bien pueden ser elementales, se vuelven cada vez mas engorrosos y tediosos.

Nuestro propósito es ilustrar un método que permita resolver ($\star$) sin la necesidad de encontrar de manera explícita las soluciones, pero que en vista de "sacrificar" la fórmula explícita, podamos ganar en el hecho de que el método sea lo suficientemente robusto para que pueda ser aplicado a otras ecuaciones diferenciales mas complicadas sin mayor esfuerzo, como por ejemplo una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes continuos:

$$\begin{cases} -p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x) \quad \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde $p, q, r \in C[0,1]$ satisfacen ciertas propiedades (que veremos mas adelante en detalle).

¿Cúal es la idea?

Ilustraremos la idea usando la ecuación ($\star$): Supongamos que u es una solución clásica de ($\star$), y multipliquemos la ecuación por una función v de clase C^1, que satisfaga[1] $v(0) = v(1) = 0$, lo que nos da

$$-u''(x)v(x) + u(x)v(x) = f(x)v(x).$$

Ahora integramos esta identidad en el intervalo $[0,1]$, y luego integramos por partes para obtener

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x - \cancelto{0}{u'(x)v(x)\Big|_0^1} + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

de donde llegamos a la ecuación

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

La primera observación importante que debemos hacer es que el cálculo anterior es válido para toda función v de clase C^1 que satisface $v(0) = v(1) = 0$, es decir, hemos demostrado que una solución clásica u de ($\star$) satisface la siguiente identidad

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in C^1([0,1]), v(0) = v(1) = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) nos permite definir un nuevo concepto de solución para ($\star$)

[1] Estas funciones se llaman funciones test.

Definición 2 (Solución débil 1). *Decimos que una función u de clase C^1 es una* solución débil *de* ($\star$) *si es que satisface la ecuación* (1).

La principal observación que debemos hacer en este momento, es que si bien estamos resolviendo una ecuación de segundo orden (por lo que esperamos soluciones con al menos dos derivadas), este concepto de solución débil nos permite hablar de una solución que solo tiene una derivada, es por eso que hablamos de una solución "débil".

Nuestro cálculo elemental nos dice que cualquier solución clásica es una solución débil, sin embargo, lo que nos gustaría es poder estudiar el problema de existencia de una solución débil para (1), y posteriormente demostrar que dicha solución débil es de hecho una solución clásica.

En resumen, el método propuesto se puede escribir como:

1. Definir el concepto de solución débil para la ecuación diferencial.
2. Probar la existencia (y posiblemente la unicidad) de la solución débil.
3. Demostrar que la solución débil es de hecho una solución clásica (regularidad).

La definición del concepto de solución débil no parece ser tan complicado, ya que solo utiliza integración por partes, sin embargo, encontrar dicha solución débil y probar que la solución es de hecho una solución clásica requiere trabajo extra.

¿Cómo estudiamos el problema de existencia de la ecuación (1)?

2. Algunas herramientas de análisis funcional

2.1. Espacios de Hilbert

Definición 3 (Norma). *Dado un espacion vectorial H, definimos una norma $\|u\|$ como una función con valores reales tal que*

- $\|u\| \geq 0$, *y* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- $\left\|ku\right\| = |k| \, \|u\|$, *y*
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Definición 4 (Producto escalar). *Dado un espacio vectorial H, definimos un producto escalar (u, v) como una función bilineal de $H \times H$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que*

- $(u, v) = (v, u)$ *para todo* $u, v \in H$,

- $(u, u) \geq 0$ *para todo* $u \in H$, *y*
- $(u, u) \neq 0$ *para todo* $u \neq 0$.

Observación 1. Un producto escalar satisface la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|(u, v)\right| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}},$$

de donde se deduce que

$$\|u\| := (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

define una norma en H. De hecho, notemos que

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) \\
&= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) \\
&= \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2.
\end{aligned}$$

La demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede hacer de la siguiente forma: Si $v = 0$ la igualdad se tiene, en caso contrario sea

$$z = u - \frac{(u, v)}{(v, v)} v.$$

Entonces tenemos que

$$(z, v) = \left(u - \frac{(u, v)}{(v, v)} v, v\right) = (u, v) - \left(\frac{(u, v)}{(v, v)} v, v\right) = 0,$$

de donde deducimos que

$$\|u\|^2 = \left\|z + \frac{(u, v)}{(v, v)} v\right\|^2 = \|z\|^2 + \left\|\frac{(u, v)}{(v, v)} v\right\|^2 \geq \left\|\frac{(u, v)}{(v, v)} v\right\|^2 = \frac{(u, v)^2}{\|v\|^2}$$

Definición 5. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H equipado con un producto escalar, tal que el espacio H es completo*[2] *para la norma* $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 5 ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^N$). El espacio de los números reales, $\mathbb{R}$, equipado del producto usual entre números es un espacio de Hilbert. Asimismo, tenemos que para cualquier entero $N \geq 2$, el espacio

$$\mathbb{R}^N = \{u = (u_1, \ldots, u_N) : u_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, \ldots, N\},$$

equipado del producto escalar

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_N v_N$$

también es un espacio de Hilbert.

[2] Un espacio vectorial es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en el espacio.

Ejemplo 6 (ℓ^2). El espacio $\mathbb{R}^N$ tiene una extensión natural cuando $N \to \infty$, esto es, podemos definir el espacio

$$\ell^2 = \left\{ \text{sucesiones reales } \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty \right\},$$

el cual lo podemos equipar con el producto escalar

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

y también obtenemos un espacio de Hilbert.

Ejercicio 1. Demostrar que ℓ^2 es un espacio de Hilbert, es decir, demostrar que es completo bajo el la norma inducida por el producto escalar definido. Hint: Una sucesión en ℓ^2, es una "sucesión de sucesiones", o sea se puede escribir como $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $u^n = \left\{u_1^n, u_2^n, u_3^n, \ldots\right\} = \left\{u_k^n\right\}_{k=1}^{\infty}$. Para cada k, defina $v_k := \lim\limits_{n\to\infty} u_k^n$ (¿por qué puede hacer esto?) y demuestre que la sucesión u^n converge a $v = \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Ejemplo 7 (L^2). Un espacio de gran importancia en análisis, es el espacio de las funciones de cuadrado sumable en algún intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$

$$L^2(a, b) = \left\{ \text{funciones } \textit{medibles } u \text{ tales que } \int_a^b |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

que se puede equipar del producto escalar

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) \mathrm{d}x.$$

Similarmente se puede definir el espacio de funciones de cuadrado sumable en un subconjunto abierto de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

$$L^2(\Omega) = \left\{ \text{funciones } \textit{medibles } u \text{ tales que } \int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

que se puede equipar del producto escalar

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) \mathrm{d}x.$$

Observación 2. Cuando hablamos de funciones medibles, lo estamos haciendo en referencia a la medida de Lebesgue. Para mayor información en el tema referirse por ejemplo a [5,6].

Observación 3. Dada una función $u_1(x) \neq 0$, y para dado $x_0 \in (a, b)$ tal que $u_1(x_0) \neq 0$ definimos

$$u_2(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

Notar que $\left\|u_1 - u_2\right\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b |u_1(x) - u_2(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_a^{x_0} |u_1(x) - u_2(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^b |u_1(x) - u_2(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$, de donde deducimos que $u_1 = u_2$ como elementos de $L^2(a, b)$. Esto ocurre cuando trabajamos en espacios de funciones medibles.

Un teorema que es de gran importancia es el llamado teorema de Riesz-Fréchet, que nos permite representar funcionales continuos en un espacio de Hilbert.

Teorema 1 (Representación de Riesz-Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, y considere un funcional lineal continuo*[3] *φ, entonces existe un único $u_\varphi \in H$ tal que*

$$\varphi(v) = (u_\varphi, v) \qquad \textit{para todo } v \in H.$$

Demostración. Sea $M = \varphi^{-1}(\{0\})$, que es un subespacio cerrado y supongamos que $M \neq H$ (si $M = H$ entonces $\varphi \equiv 0$ y podemos tomar $u_\varphi = 0$). Sea $u_0 \in H \setminus M$ un elemento cualquiera y definamos $u_1 = P_M u_0$, la proyección ortogonal[4] de u_0 hacia el subespacio M. Con esto definimos u_2

$$u_2 = \frac{1}{\left\|u_0 - u_1\right\|}(u_0 - u_1),$$

y notamos que

$$u_\varphi = \varphi(u_2)u_2$$

satisface las propiedades de nuestro teorema. De hecho, notemos que para cualquier $u \in H$ podemos escribir $v = u - \dfrac{\varphi(u)}{\varphi(u_2)}u_2$, luego $\varphi(v) = 0$ (o sea $v \in M$), de donde $(u_2, v) = 0$ (pues u_2 es ortogonal a M) y

$$0 = (u_2, v) = (u_2, u) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(u_2)}\cancelto{1}{(u_2, u_2)},$$

de donde

$$\varphi(u) = (\varphi(u_2)u_2, u).$$

∎

Ejemplo 8 ($L^2(a, b)$). El teorema nos dice que dada cualquier función $\varphi : L^2(a, b) \to \mathbb{R}$, entonces debe existir una única función $u_\varphi \in L^2(a, b)$ tal que

$$\varphi(v) = \int_a^b v(x)u_\varphi(x)\mathrm{d}x$$

para todo $v \in L^2(a, b)$.

A continuación veremos una suerte de generalización del teorema de Riesz-Fréchet, que nos dice que no solo podemos representar funcionales lineales a través del producto interno en un espacio de Hilbert, si no que también podemos utilizar otras formas bi-lineales:

[3] La continuidad de funciones lineales $\varphi : H \to \mathbb{R}$ es equivalente a demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H$

$$|\varphi(u)| \leq C \left\|u\right\|_H .$$

[4] La proyección ortogonal de f sobre el subespacio M se puede caracterizar mediante

$$P_M f \in M \text{ y } (P_M f, v) = (f, v) \text{ para todo } v \in M$$

Teorema 2 (Lax-Milgram). *Sea $a(u,v)$ una función bi-lineal $a : H \times H \to \mathbb{R}$ que satisface*

- *Existe C tal que $|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|$ (continuidad), y*
- *existe $\alpha > 0$ tal que $|a(u,u)| \geq \alpha \|u\|^2$ (coercividad).*

Entonces dado cualquier funcional lineal continuo $\varphi : H \to \mathbb{R}$, existe un único $u_\varphi \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(u_\varphi, v) \qquad \textit{para todo } v \in H.$$

Demostración. La demostración consiste en los siguientes pasos:

- Del teorema de Riesz-Fréchet existe un único $f \in H$ tal que
$$\varphi(v) = (f, v).$$
- Para cada $u \in H$ podemos definir el funcional lineal continuo $\varphi_u : H \to \mathbb{R}$ como $\varphi_u(v) = a(u,v)$, y gracias al teorema de Riesz-Fréchet tenemos la existencia de un único $\tilde{u} = Au \in H$ tal que
$$a(u,v) = \varphi_u(v) = (Au, v)$$
- El operador $A : H \to H$ definido anteriormente es un operador lineal continuo:
$$\left\|Au\right\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq C \|u\| \left\|Au\right\|,$$
y satisface
$$(Au, u) = a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 .$$
- Por lo anterior, demostrar el teorema se reduce a probar que existe un único $u \in H$ tal que
$$(Au, v) = a(u,v) = \varphi(v) = (f, v),$$
o sea, a encontrar $u \in H$ tal que $Au = f$.
- Para ello definimos $T : H \to H$ tal que $T(v) = v - \rho(Av - f)$ y buscamos un punto fijo para T.
- Usamos el teorema de punto fijo de Banach para tal efecto escogiendo $\rho > 0$ apropiadamente.

■

Ejemplo 9. Sea b una función continua en $[0,1]$, tal que $b(x) \geq b_0 > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Definamos para $u, v \in L^2(0,1)$ la función
$$a(u,v) = \int_0^1 b(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

No es difícil demostrar que $a(u, v)$ es una función bilineal en $L^2(0,1)$. Además, gracias a la continuidad de b, tenemos que

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^1 b(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_0^1 |b(x)u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|b(x)\|_\infty \int_0^1 |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|b(x)\|_\infty \left(\int_0^1 |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|b(x)\|_\infty \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

es decir, la función bilineal $a(u, v)$ es continua. Además

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_0^1 b(x)u(x)^2\mathrm{d}x \\
&\geq b_0 \int_0^1 u(x)^2\mathrm{d}x \\
&= b_0 \|u\|^2_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

por lo tanto la forma $a(u, v)$ es coerciva. De donde concluimos que dado un funcional lineal $\varphi : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$, entonces existe un único $u_\varphi \in L^2(0,1)$ tal que

$$\varphi(v) = \int_0^1 b(x)u_\varphi(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Si juntamos esto con el hecho que φ también puede ser representado por una función $f \in L^2(0,1)$, concluimos que

$$u_\varphi(x) = \frac{f(x)}{b(x)}.$$

3. Espacios de Sobolev $H^1(I)$ y $H^1_0(I)$

La noción de derivada débil: Consideremos una función $u \in C^1(I)$, entonces para $v \in C^1_c(I)$ obtenemos gracias a una integración por partes que

$$\int_I u'(x)v(x)\mathrm{d}x = -\int_I u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Observamos que el lado derecho de la identidad puede ser definido si es que la función es solo continua, es mas, ¡solo basta que la función se pueda integrar! Esto nos permite definir un concepto de derivada que es mucho más débil que la derivada tradicional.

Definición 6 (Derivada débil). *Para una función integrable u, definimos su derivada débil como una función integrable g que satisface*

$$\int_I u(x)v'(x)\mathrm{d}x = -\int_I g(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \textit{para todo } v \in C_c^1(I).$$

Tal función g se conoce como derivada débil de u, y se denota u'.

Observación 4. Si g_1 y g_2 son dos derivadas débiles para la función u, entonces $g_1 = g_2$ en *casi todas partes* (c.t.p.), esto hace que tenga sentido llamar a *la* derivada débil u'.

Observación 5. Dado nuestro cálculo inicial, tenemos que para una función u de clase $C^1(I)$ en un intervalo I, la derivada débil coincide con la derivada tradicional.

Ejemplo 10. Consideremos el intervalo $I = (-1, 1)$ y la función

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Entonces la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

es una[5] derivada débil para u.

Ejemplo 11. Ahora veamos que la función

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

no tiene derivada débil. Para ello usamos la función de clase[6] $C_c^\infty(-1, 1)$

$$v(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-4|x|^2}} & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

y definimos la secuencia

$$v_n(x) = v(nx) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-4n^2|x|^2}} & \text{si } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2n} \end{cases}.$$

Observamos que de existir una derivada débil g tendríamos que

$$-\int_{-1}^1 g(x)v_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 u(x)v_n'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 xv_n'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 v_n'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 v_n(x)\mathrm{d}x - v_n(0),$$

luego

$$e^{-1} = v_n(0) = \int_{-1}^1 g(x)v_n(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 v_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

[5] Recordar que la unicidad es modulo conjuntos de medida cero.

[6] Ejercicio: Demostrar esto.

Definición 7. *Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado, definimos el espacio $H^1(I)$ como*

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I) \text{ tales que } u \text{ tiene una derivada débil en } L^2(I) \right\}.$$

Observación 6. Se puede definir espacios de Sobolev en intervalos no-acotados, pero para no perdernos en tecnicismos solo nos enfocaremos en el caso acotado.

Se puede definir un producto interno en el espacio $H^1(I)$ de la siguiente forma: Sean $u,\ v \in H^1(I)$, definimos

$$(u, v)_{H^1} := \int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

de donde podemos definir la norma inducida por este producto interno

$$\|u\|_{H^1} := (u, u)_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Ejemplo 12 (Ejemplos funciones en $H^1(I)$).

1. Funciones de clase $C^1([a, b])$.
2. Funciones continuas que son de clase C^1 a pedazos en I: $I = (-1, 1)$ y $u(x) = |x|$; o en general, $u(x) = |x|^\gamma$, $\gamma > \frac{1}{2}$. Observar que estas funciones NO son necesariamente de clase $C^1(-1, 1)$.
3. Una función discontinua como la del ejemplo anterior no pertenece a $H^1(I)$ pues ni siquiera tiene derivada débil.

Teorema 3 (Teorema Fundamental del Calculo). *Dado $u \in H^1(I)$, y $s < t \in I$ tenemos que*

$$\int_s^t u'(x)\mathrm{d}x = u(t) - u(s).$$

Para demostrar este teorema, utilizaremos dos lemas

Lema 1. *Sea f una función integrable tal que*

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0, \text{ para todo } \varphi \in C_c^1(I),$$

entonces f =constante (c.t.p.).

Demostración. Fijemos una función $\Psi \in C_c(I)$, y dada una función $w \in C_c(I)$, entonces existe $\varphi \in C_c^1(I)$ tal que $\varphi'(x) = w(x) - \left(\int_I w(x)\mathrm{d}x\right)\Psi(x)$. Entonces deducimos que

$$0 = \int_I f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\left[w(x) - \left(\int_I w(s)\mathrm{d}s\right)\psi(x)\right]\mathrm{d}x = \int_I \left[f(s) - \int_I f(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right]w(s)\mathrm{d}s,$$

que es válido para todo $w \in C_c(I)$, luego[7] $f(s) = \int_I f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$ =constante (c.t.p). ∎

[7] El lema que dice que $\int_I f(x)w(x)\mathrm{d}x = 0$ para todo $w \in C_c(I)$ implica $f = 0$ (c.t.p.) se demuestra usando una *aproximación suave* de $w(x) = \mathrm{sign}(f)$ en conjuntos compactos.

Lema 2. *Sea g una función integrable en I, entonces para $x_0 \in I$ fijo defina*

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s,$$

entonces v es continua y

$$\int_I v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_I g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_I v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int_I \left[\int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{x_0} \left[\int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{b} \left[\int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^{x_0} \left[\int_{x}^{x_0} g(s)\mathrm{d}s\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{b} \left[\int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^{x_0}\int_a^{s} g(s)\varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{b}\int_{s}^{b} g(s)\varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= -\int_a^{x_0} g(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s - \int_{x_0}^{b} g(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \\
&= -\int_a^{b} g(s)\varphi(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

■

Demostración Teorema Fundamental. Para $x_0 \in I$ fijo, defina $\bar{u}(x) = \int_{x_0}^{x} u'(s)\mathrm{d}s$. Tenemos que gracias a los lemas anteriores

$$\int_I \bar{u}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_I u'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

esto, junto con la definición de la derivada débil, nos dice que

$$\int_I (\bar{u}(x) - u(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

luego $\bar{u}(x) - u(x) = C$ (c.t.p.). Finalmente la función $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ cumple las propiedades deseadas. ■

Observación 7. Como se aprecia en la demostración, lo que se ha demostrado no es precisamente lo que sale en el enunciado del teorema. Lo que sucede es que usualmente se abusa de la notación y se asume que $u = \tilde{u}$ desde un principio. Siendo rigurosos, uno debería definir la relación de equivalencia $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ (c.t.p) y decir que "existe un representante de u tal que ..."

Corolario 1 (Continuidad de funciones en $H^1(I)$). *Sea $u \in H^1(I)$, entonces u es continua en $\bar{I}$.*

Observación 8. Al igual que en el teorema fundamental del cálculo, uno debería decir que "Dado $u \in H^1(I)$ entonces existe un representante continuo de u". OJO: no confundir con decir que "u es continuo (c.t.p.)".

Demostración. Basta notar que del Teorema fundamental obtenemos que

$$\begin{aligned}
|u(t) - u(s)| &= \left| \int_s^t u'(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_s^t \left| u'(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_s^t \left| u'(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t 1^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_{H^1(I)} (t-s)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

■

Observación 9. De hecho, nuestra demostración dice que las funciones no son solo continuas, si no que son Hölder continuas. Mas adelante hablaremos de dichas funciones.

Teorema 4. *Sea $u \in L^2(I)$, entonces $u \in H^1(I)$ si y solo si existe $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_I u(x)v'(x)\mathrm{d}x \right| \leq C \|v\|_{L^2(I)} .$$

Demostración. El caso ($\Rightarrow$) es evidente. Para ($\Leftarrow$) consideremos el funcional $\varphi(v) = \int_I u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ definido para toda función $v \in C_c^1(I)$. Dado que $C_c^1(I)$ es denso[8] en $L^2(I)$ este funcional se puede extender de manera lineal y continua[9] a todo $L^2(I)$.

Gracias al teorema de Riesz-Fréchet, tenemos que existe un único $g \in L^2(I)$ tal que

$$\varphi(v) = \int_I u(x)v'(x)\mathrm{d}x = (g, v)_{L^2(I)} = \int_I g(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

de donde deducimos que existe la derivada débil $u'(x) = -g(x)$ y además está en $L^2(I)$. ■

Teorema 5 (Regla del producto). *Sean $u,\ v \in H^1(I)$, entonces $uv \in H^1(I)$ con*

$$(uv)' = u'v + uv',$$

y se satisface la fórmula de integración por partes

$$\int_s^t u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(t)v(t) - u(s)v(s) - \int_s^t u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

[8] Esto se prueba mediante regularización por convulución, lo que omitiremos en este curso.
[9] Para $v \in L^2(I)$ defina $\varphi(v) = \lim \varphi(v_n)$, y demuestre que queda bien definido.

Teorema 6 (Regla de la cadena). *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$, y sea $u \in H^1(I)$. Entonces $v = G(u) \in H^1(I)$ y*

$$v'(x) = G'(u(x))u'(x).$$

Definición 8. *Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado, definimos el espacio $H_0^1(I)$ como*

$$H_0^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

Este espacio es un subespacio cerrado de $H^1(I)$ (demuestre esto), luego $H_0^1(I)$ se puede considerar como un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de $H^1(I)$.

Teorema 7 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \left\|u'\right\|_{L^2(I)}.$$

Demostración. Como $u(a) = 0$, podemos escribir para $x \in I$

$$u(x) = u(x) - u(a) = \int_a^x u'(s)\mathrm{d}s,$$

de donde

$$|u(x)| \leq \int_a^b \left|u'(s)\right| \mathrm{d}s \leq \left(\int_a^b \left|u'(s)\right|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} (b - a)^{\frac{1}{2}},$$

y concluimos que

$$\int_a^b |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b \left|u'(s)\right|^2 \mathrm{d}s \right) (b - a)^2.$$

∎

4. Ejemplos de EDOs que se pueden resolver con esta técnica

4.1. La ecuación ($\star$)

Usemos el método de análisis funcional para estudiar la ecuación que usamos como motivación

$$(\star) \qquad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Recordemos que definimos un concepto de solución débil para la ecuación ($\star$), sin embargo, vamos a relajar aun mas dicha definición, y en vez de usar funciones de clase C^1 utilizaremos funciones en el espacio de Sobolev $H_0^1(I)$:

Definición 9 (Solución débil). *Decimos que u es una solución débil para la ecuación* ($\star$) *si $u \in H_0^1(0,1)$ satisface*

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in H_0^1(0,1). \tag{2}$$

Encontremos ahora la solución: Notemos que cuando $f \in C[0,1]$ entonces $f \in L^2(0,1)$, luego el lado derecho define un funcional lineal continuo en $L^2(0,1)$. Por otra parte, tenemos que el lado izquierdo se puede escribir como el producto interno en $H^1(0,1)$ entre u y v, es decir, nuestro problema consiste en resolver

$$(u,v)_{H^1(0,1)} = \varphi(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in H_0^1(0,1). \tag{3}$$

De esta forma notamos que podemos utilizar el teorema de Riesz-Fréchet para concluir la existencia de una única $u \in H_0^1(0,1)$ que satisface la ecuación (3), es decir, hemos encontrado una solución débil.

¿Como demostramos que esta solución débil u es una solución clásica?

En primer lugar tenemos que u es continua y satisface las condiciones de borde (pues $u \in H_0^1(0,1)$). Ahora notemos algo interesante, la ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) - u(x))v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in H_0^1(0,1),$$

aquí observamos dos cosas: en primer lugar, por construcción tenemos que $u' \in L^2(0,1)$, y lo mas importante, la identidad anterior nos dice que u' tiene una derivada débil en $L^2(0,1)$. Es decir, hemos identificado que u' no es solo una función L^2, si no que $u' \in H^1(0,1)$ (es decir, u tiene *dos derivadas* en $L^2(0,1)$)

Con esto, podemos utilizar el teorema de continuidad para deducir que u' es continua en $(0,1)$, es decir, u es de clase C^1 (es decir u es una "solución débil 1"). Finalmente, observamos que como $u' \in H^1(0,1)$, podemos integrar por partes hacia atrás, y obtener que (recordar que $v(0) = v(1) = 0$)

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

de donde deducimos que

$$u''(x) = u(x) - f(x), \ \text{(c.t.p.)}$$

pero como el lado derecho es continuo (recordar que f es continua), concluimos que u'' debe ser continuo, es decir, hemos recuperado la solución clásica.

4.2. Ecuación "general" de 2do orden con coeficientes continuos

Para $p(x) \geq p_0 > 0$ de clase $C^1[0,1]$, $q(x)$ función continua en $[0,1]$ y $r(x) \geq r_0 > 0$ función continua en $[0,1]$, consideramos la ecuación

$$
\left\{ \begin{array}{r} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x) \quad \text{en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{4}
$$

Definimos la forma bilineal

$$
a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + qu'v + ruv
$$

y observamos que es continua

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^1 pu'v' + qu'v + ruv \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| pu'v' + qu'v + ruv \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| pu'v' \right| + \int_0^1 \left| qu'v \right| + \int_0^1 |ruv| \\
&\leq \left(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty + \|r\|_\infty \right) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

y coerciva

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_0^1 pu'^2 + qu'u + ru^2 \\
&\geq p_0 \int_0^1 u'^2 + \int_0^1 qu'u + r_0 \int_0^1 u^2,
\end{aligned}
$$

de donde podemos escribir

$$
\begin{aligned}
p_0 \int_0^1 u'^2 &\leq a(u,u) - \int_0^1 qu'u - r_0 \int_0^1 u^2 \\
&\leq a(u,u) + \int_0^1 \left| qu'u \right| - r_0 \int_0^1 u^2 \\
&\leq a(u,u) + \|q\|_\infty \int_0^1 \left| u'u \right| - r_0 \int_0^1 u^2 \\
&\leq a(u,u) + \|q\|_\infty \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u'^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 u^2 \right) - r_0 \int_0^1 u^2 \\
&= a(u,u) + \frac{\|q\|_\infty \varepsilon}{2} \int_0^1 u'^2 + \left(\frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon} - r_0 \right) \int_0^1 u^2
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos que

$$
\left(p_0 - \frac{\|q\|_\infty \varepsilon}{2} \right) \int_0^1 u'^2 \leq a(u,u) - \left(r_0 - \frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon} \right) \int_0^1 u^2 \leq a(u,u).
$$

si es que escogemos $\varepsilon > 0$ y $r_0 > \frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon}$.

Con esto tenemos que todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram se cumplen en el espacio $H_0^1(0,1)$, por lo tanto tenemos la existencia de una solución débil. Para la regularidad observamos que

$$\int_0^1 pu'v' = -\int_0^1 (qu' + ru - f)v \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0,1),$$

lo que nos dice que la función pu' tiene una derivada débil en $L^2(0,1)$. Por otra parte, tenemos que[10] como p es de clase C^1

$$pu'' = (pu')' - p'u' \quad (c.t.p.)$$

de donde obtenemos que $u'' \in L^2(0,1)$ (esto pues $p(x) \geq p_0 > 0$), lo que implica que u es de clase C^1. Finalmente, si asumimos que f es continua en $[0,1]$, podemos deducir que de hecho u debe ser de clase C^2 de manera similar al caso de la ecuación ($\star$).

Observación 10. El caso en que la función r es cualquiera requiere un par de herramientas adicionales, siendo la mas importante el teorema de la *Alternativa de Fredholm*, que básicamente dice que para un espacio de Hilbert H y un operador lineal *compacto*[11] $K : H \to H$, entonces hay dos alternativas para la ecuación

$$u - Ku = f, \quad f \in H$$

- La ecuación tiene un única solución $u \in H$, o bien
- Existe $n \geq 1$ tal que la ecuación $Ku = u$ tiene n soluciones linealmente independientes.

Este teorema generaliza un hecho conocido acerca de operadores lineales en *dimensión finita*: Dada una matrix A de $n \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la ecuación $Ax = b$, ó tiene solución única, ó existen $m \geq 1$ soluciones linealmente independientes de la ecuación $Ax = 0$.

5. EDOs singulares

El método anterior sirve solo para ecuaciones como (4), pero cuando el término $p(x) = 0$ para cierto(s) $x \in [0,1]$, se pierde la coercividad de la forma bilineal asociada. ¿Cómo se puede solucionar esto?

Para fijar ideas, consideremos la ecuación

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} -(x^2 u'(x))' + u(x) = f(x) & \text{en } (0,1) \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

observemos que el término $p(x) = x^2$ se anula en el extremo izquierdo del intervalo, esto hace que no sea evidente que una solución u sea continua para $x = 0$. Por ejemplo, consideremos el caso en que $f = 0$ y resolvamos la ecuación explícitamente para ver a que nos podemos atener.

$$f = 0 \Rightarrow u(x) = Ax^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} + Bx^{-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}$$

[10] Así como está escrito no es completamente riguroso, pero la identidad se puede demostrar como un ejercicio.
[11] Un operador lineal $K : H \to H$ es compacto si el conjunto $\{Ku : \|u\| \leq 1\}$ es pre-compacto en H.

Notamos que hace sentido imponer una condición de borde del estilo

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} u(x) = 1,$$

lo que implicaría que una eventual solución u se comportaría como $x^{-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}$ cerca del origen, es decir, la solución *no sería* continua hasta $x = 0$. Este fenómeno no ocurre cuando trabajamos con EDOs lineales no-singulares (recordar la ecuación ($\star$)).

5.1. Espacios de Sobolev con peso

Una manera de atacar el problema es definir un nuevo espacio para considerar este posible efecto. Basándonos en el procedimiento que hemos desarrollado, una definición de solución débil nos puede ayudar a definir un espacio adecuado. Consideremos lo que pasa con la ecuación ($\star\star$): Sea $v \in C_c^1(0,1)$, multiplicando ($\star\star$) por v e integrando por partes nos da

$$\int_0^1 x^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Esto nos motiva a definir el espacio

$$X(0,1) = \left\{ u \in L^2(0,1) \text{ que tienen una derivada débil que satisface } \int_0^1 x^2 \left|u'(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

y equiparlo del producto interno

$$(u,v)_X = \int_0^1 x^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Con esto en mente, si fuésemos capaces de demostrar que este espacio X es un espacio de Hilbert, entonces podríamos usar el teorema de Riesz-Fréchet para demostrar la existencia de una función $u \in X$ que satisface

$$(u,v)_X = \int_0^1 x^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{para todo } v \in X,$$

pero aún así nos quedaría por demostrar la regularidad de esta solución (pensando en recuperar una solución clásica), ya que no sabemos si esta solución es siquiera continua. Para ello debemos hacer un estudio mas avanzado del espacio X.

Definición 10 (Espacio $X^\alpha(0,1)$). *Para $\alpha > 0$, definimos el espacio $X^\alpha(0,1)$ como*

$$X^\alpha(0,1) = \left\{ u \in L^2(0,1) \textit{ que tienen una derivada débil que satisface } \int_0^1 \left|x^\alpha u'(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

En primer lugar veamos algunos ejemplos de funciones que pertenecen a estos espacios

Ejemplo 13.

1. Funciones de clase $C^1[0,1]$.
2. Funciones en $H^1(0,1)$.
3. Observar que cuando consideramos un intervalo de la forma $(a,1)$ para $0 < a < 1$, entonces una función $u \in X^\alpha(0,1)$ pertenece a $H^1(a,1)$. En particular deducimos que estas funciones son continuas mientras estemos "lejos" del origen.
4. Un ejemplo que ilustra la diferencia de estos espacios X^α con el espacio $H^1(0,1)$, es que dependiendo de $\alpha > 0$, las funciones en X^α pueden no ser continuas en el origen (recordar que gracias al teorema fundamental del cálculo, las funciones en $H^1(0,1)$ son acotadas en $[0,1]$). Consideremos, por ejemplo, el caso $\alpha = \frac{1}{2}$ y la función $u(x) = \ln(1 - \ln x)$. Tenemos que
$$\int_0^1 u(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 |\ln(1-\ln x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty |\ln y|^2 \, e^{1-y} \mathrm{d}y < \infty.$$
Además $u'(x) = -\frac{1}{x(1-\ln x)}$ es la derivada débil en $(0,1)$ (Ejercicio: Demostrar esto.), de donde
$$\int_0^1 x \left|u'(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^2} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y < \infty,$$
en otras palabras, la función $u \in X^\alpha$, pero u no es continua cuando $x \to 0^+$.

En virtud de estos ejemplos, tratemos de estudiar como son las funciones de estos espacios X^α. Para simplificar la exposición de las ideas, solo consideraremos el caso en que $0 < \alpha < 1$. En primer lugar, definamos algunos espacios de funciones clásicos

Definición 11 (Espacios de Hölder). *Para $0 < \gamma < 1$, decimos que una función u es Hölder continua en I si existe una constante $C > 0$ tal que*
$$|u(y) - u(x)| \leq C \, |y - x|^\gamma, \quad \text{para todo } x, y \in I$$
y denotamos a este espacio como $C^{0,\gamma}(I)$. Si lo equipamos de la norma
$$\|u\|_{0,\gamma} = \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y \in I} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\gamma}$$
tenemos un espacio de Banach.

Definición 12 (Espacios L^p). *Para $1 \leq p < \infty$, decimos que una función u es L^p integrable en I si la función es medible y satisface*
$$\int_I |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty,$$
y el espacio de tales funciones se denota $L^p(I)$, el cual equipado de la norma
$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_I |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$
es un espacio de Banach reflexivo[12].

[12] Ver por ejemplo [1,5,6].

Teorema 8. *Para $0 < \alpha < 1$, el espacio $X^\alpha(0,1)$ está incluido continuamente en los siguientes espacios*

1. $C^{0,\frac{1}{2}-\alpha}[0,1]$ *si* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$,
2. $L^p(0,1)$ *para todo* $1 \le p < \infty$ *si* $\alpha = \frac{1}{2}$, *y*
3. $L^{\frac{2}{2\alpha-1}}(0,1)$ *si* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Demostración. Para cada $0 < x < y < 1$ podemos usar el teorema fundamental del cálculo y escribir $|u(y) - u(x)| \le \int_x^y |s^\alpha u'(s)|\, s^{-\alpha} ds$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$|u(y) - u(x)| \le C \left\| s^\alpha u' \right\|_{L^2} \begin{cases} \left| y^{1-2\alpha} - x^{1-2\alpha} \right|^{\frac{1}{2}} & \text{si } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ |\ln y - \ln x|^{\frac{1}{2}} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Las propiedades de la función resultante en el lado derecho de cada desigualdad nos entrega los resultados deseados. ■

Definición 13. *Como las funciones $u \in X^\alpha(0,1)$ son continuas para $x = 1$, entonces podemos definir el subespacio*

$$X_0^\alpha(0,1) = \{u \in X^\alpha(0,1) \text{ tales que } u(1) = 0\},$$

que resulta ser un espacio de Hilbert para el producto interno heredado.

Teorema 9 (Desigualdad tipo Poincaré)**.** *Sea $0 < \alpha < 1$. Para $u \in X^\alpha(0,1)$ que satisfaga $u(1) = 0$ tenemos que*

$$\|u\|_{L^2} \le C \left\| x^\alpha u' \right\|_{L^2}, \tag{6}$$

En particular, $\|u\|_\alpha := \left\| x^\alpha u' \right\|_{L^2}$ define una norma equivalente para $X_0^\alpha(0,1)$.

Demostración. Notar que para $\varepsilon > 0$ y $0 < \alpha < 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 u(x)^2 \mathrm{d}x &= -\int_\varepsilon^1 x \left(u(x)^2 \right)' \mathrm{d}x - \varepsilon u(\varepsilon)^2 \\ &= -2 \int_\varepsilon^1 x u'(x) u(x) \mathrm{d}x \\ &\le 2 \int_\varepsilon^1 \left| x u'(x) u(x) \right| \mathrm{d}x \\ &\le 2 \left(\int_\varepsilon^1 \left| x^\alpha u'(x) \right| \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\varepsilon^1 \left| x^{1-\alpha} u(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donde observamos que como $\alpha < 1$, el término $x^{1-\alpha} \le 1$ para todo $(0,1)$, de donde obtenemos al enviar $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^1 u(x)^2 \mathrm{d}x \le 2 \left(\int_0^1 \left| x^\alpha u'(x) \right| \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

lo que nos da la desigualdad deseada. ■

Observación 11. Para mas referencia de estos espacios, ver por ejemplo el apéndice de [2].

5.2. EDOs singulares

Con estas herramientas en mente, por ejemplo podríamos estudiar una ecuación de la forma

$$(\star\star\star)\qquad \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f & \text{en } (0,1) \\ u(1) = 0 & \end{cases}$$

donde $p \in C^1[0,1]$ satisface por ejemplo $C_1 x^{2\alpha} \le p(x) \le C_2 x^{2\alpha}$ en $(0,1)$ para algún $\alpha > 0$, $q \in C[0,1]$ tal que $|q(x)| \le C_3 x^{\alpha}$, y $r \in C[0,1]$ satisface $r(x) \ge r_0 > 0$ para cierto r_0.

Definición 14 (Solución débil). *Definimos una solución débil de ($\star\star\star$) como una función $u \in X_0^{\alpha}(0,1)$ tal que*

$$\int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 r(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int f(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \textit{para todo } v \in X_0^{\alpha}(0,1).$$

El resultado que podemos obtener gracias al Teorema de Lax-Milgram, es que para cierto r_0 (que dependerá de C_1, C_2, C_3), existe una única solución débil $u \in X_0^{\alpha}(0,1)$ para la ecuación ($\star\star\star$). Lo que no es evidente ahora es determinar como se comporta la solución cuando $x \to 0$, tarea que puede ser bastante compleja.

En primera instancia veamos que pasa en un caso mas simple: $p(x) = x^{2\alpha}$, $q(x) = 0$, y $r(x) = 1$. Presumimos que el comportamiento de la solución débil cerca del origen va a depender de $\alpha > 0$, así como de la función f. Por ejemplo, de acuerdo a lo demostrado en [2], tenemos lo siguiente (resultados similares se tienen para la ecuación general ($\star\star\star$))

Teorema 10. *Para $f \in L^2(0,1)$ y $0 < \alpha < 1$, la solución encontrada anteriormente pertenece a $X_0^{2\alpha-1}(0,1)$ y satisface la siguiente condición de frontera en el origen*

$$\lim_{x\to 0} x^{2\alpha-\frac{1}{2}}u'(x) = 0,$$

en particular:

- *Cuando $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, la función $u \in H^1(0,1)$, en particular la función es continua hasta el origen;*
- *Cuando $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{3}{4}$, la función u pertenece a $C^{0,\frac{3}{2}-2\alpha}[0,1]$; y*
- *Cuando $\frac{3}{4} \le \alpha < 1$, la función u pertenece a $L^{\frac{2}{4\alpha-3}}(0,1)$, donde, dependiendo de $f \in L^2(0,1)$, la solución puede ser discontinua en el origen.*

Referencias

[1] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)

[2] Hernán Castro and Hui Wang, *A singular Sturm-Liouville equation under homogeneous boundary conditions*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 6, 1542–1590. MR 2813481 (2012f:34056)

[3] ———, *A singular Sturm-Liouville equation under non-homogeneous boundary conditions*, Differential Integral Equations **25** (2012), no. 1-2, 85–92. MR 2906548 (2012m:34042)

[4] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR 1625845 (99e:35001)

[5] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950. MR 0033869 (11,504d)

[6] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, Third, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002)