Teoremas de punto fijo y ecuaciones diferenciales

Escuela de Verano InstMat 2023

Hernán Castro Z.

http://inst-mat.utalca.cl/~hcastro.

hcastro@utalca.cl.

Última actualización: 13 de Enero del 2023.

Índice

1. Introducción

Uno de los problemas clásicos en análisis es el llamado problema de puntos fijos. El problema general es el siguiente:

> *Dado un conjunto X y una función $F : X \to X$ ¿cuáles son las condiciones sobre X y sobre F para asegurar la existencia de $u \in X$ tal que $u = F(u)$.*

En análisis (y otras áreas de la matemática) hay una diversidad de problemas que se pueden resolver si es que uno tiene una respuesta a esa pregunta. Algunas situaciones que se pueden responder mediante esta idea son las siguientes:

- La existencia de $\sqrt{3}$: Notar que $\sqrt{3}$ se puede definir como el número real positivo u tal que $u^2 = 3$. Esta definición se puede reescribir como: encontrar $u > 0$ tal que

$$u = \frac{3}{u} =: F(u) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3}{u}\right) =: G(u)$$

  es decir, problemas de punto fijo en el conjunto X de número reales positivos.

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales: Notar que dada una matriz A y un vector B, resolver la ecuación $Au = b$ es equivalente a resolver

$$u = u + Au - b = F(u),$$

  es decir un problema de punto fijo en el conjunto N tuplas ordenadas $X = \mathbb{R}^N$ o $X = \mathbb{C}^N$ según corresponda.

- Resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden: Si queremos resolver la EDO

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

  para cierta función $f(t, u)$, entonces podemos reescribir esta ecuación como

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s = F(u)(t),$$

  es decir un problema de punto fijo en un espacio X de funciones u. Por ejemplo $X = C(I, \mathbb{R}) = \{u : I \to \mathbb{R} : u \text{ es una función continua sobre el intervalo } I\}$ donde $t_0 \in I$.

- Mas en general, la misma idea aplica para sistemas de EDOs de primer orden (idéntico a lo anterior, solo que $u : I \to \mathbb{R}^N$), y en consecuencia a EDOs de orden cualquiera (denotar $\dfrac{d^k u}{dt^k}$ como una nueva incógnita u_k transforma una EDO de orden n en un sistema de primer orden con n ecuaciones).

- Resolver una ecuación diferencial parcial: Si sabemos resolver una EDP como

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = h(t) & \text{para } t \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial\Omega, \end{cases}$$

  y denotamos por $u(t) = S(h(t))$ a la solución, entonces podemos resolver una EDP de la forma

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = f(t, u(t)) & \text{para } t \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

  pues si denotamos por $h(t) = f(t, u(t))$ entonces (2) es equivalente a encontrar una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u(t) = S(f(t, u(t))) =: F(u)(t)$, es decir, nuevamente un problema de punto fijo en un espacio de funciones apropiado.

- En general, cualquier ecuación en cualquier espacio ambiente de la forma $f(u) = v$ se puede escribir como un problema de punto fijo pues, por ejemplo,

$$f(u) = v \Leftrightarrow u = f(u) - v + u =: G(u)$$

  o algo similar.

En general uno no puede esperar que cualquier función definida sobre cualquier espacio ambiente tenga puntos fijos. Un ejemplo sencillo de una función sin puntos fijos es la función $F(u) = u + b$ definida sobre un espacio vectorial, donde $b \neq 0$. Otro ejemplo que muestra la importancia del espacio ambiente es la función $F(u) = u^2 + u + 1$. Notamos que si el espacio ambiente es $\mathbb{R}$ (o un subconjunto) entonces la función no tiene puntos fijos, sin embargo, si el espacio ambiente es $\mathbb{C}$ entonces $u = i$ y $u = -i$ son puntos fijos para F.

Ejemplos de este tipo también se pueden construir en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, pero son un poco mas complicados.

Ejemplo 1. Consideremos la función de Dirichlet

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } t \text{ es irracional.} \end{cases}$$

y la EDO siguiente

$$u'(t) = f(t), \ \ u(0) = 0. \tag{3}$$

Como vimos, esta EDO se puede escribir como un problema de punto fijo, sin embargo esta EDO no tiene solución. Una demostración de este hecho puede ser que la función no es Riemann integrable, por lo que ni siquiera podríamos escribir la ecuación como lo hicimos antes, pero quizás podamos definir otra integral para la cual si podamos escribir dicha formulación. El siguiente teorema nos dice que aunque hagamos eso, no podríamos encontrar una solución diferenciable.

Teorema 1.1 (Darboux). *Sea u una función diferenciable en un intervalo I. Si para $a, b \in I$ tales que $a < b$ se cumple que $u'(a) = 0$ y $u'(b) = 1$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $u'(c) = \frac{1}{2}$.*

Demostración. Considere la función $v(t) = u(t) - \frac{t}{2}$. Como u es diferenciable, entonces ha de ser continua en el intervalo I y por lo tanto v es continua en el intervalo $[a, b]$. Gracias al teorema de Weierstrass sabemos que v debe alcanzar su mínimo en algún $c \in [a, b]$. Como $v'(a) = u'(a) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ y $v'(b) = u'(b) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ entonces $c \neq a$ y $c \neq b$, por lo tanto c es un mínimo interior para v y por lo tanto $v'(c) = 0$. ∎

Gracias a este teorema podemos demostrar que no existe función u diferenciable en un intervalo $[-\delta, \delta]$ solución de (3), pues de existir u sería diferenciable con derivada $f(t)$ y $u'(t) \neq \frac{1}{2}$ para cualquier $t \in [-\delta, \delta]$ a pesar de que podemos encontrar $a < b$ tales que $u'(a) = 0$ y $u'(b) = 1$.

Ejemplo 2. En el ámbito de las EDPs la situación es similar: hay EDPs que no tienen solución, a pesar de ser "parecidas" a otras que si lo tienen. Un ejemplo de esto es la EDP

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = 2(N-2)e^{u(t)} + \varepsilon & \text{para } t \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial B(0,1). \end{cases} \tag{4}$$

Como se indicó anteriormente, se puede demostrar con algo de trabajo que para $h(t)$, con alguna regularidad razonable[1], la EDP

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = h(t) & \text{para } t \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial B(0,1), \end{cases}$$

tiene una solución $u = S(h)$, asimismo para $N \geq 3$ la función $u(x) = -2 \ln |x|$ es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = 2(N-2)e^{u(t)} & \text{para } t \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial B(0,1), \end{cases}$$

sin embargo, si $\varepsilon > 0$ la ecuación (4) no tiene solución *en ningún sentido razonable* si es que $N \geq 10$ (ver Brezis and Cabré (1998)).

[1]Ver por ejemplo (Evans, 2010; Gilbarg and Trudinger, 2001).

Todo lo anterior nos lleva a pensar que un teorema de punto fijo ha de tener la siguiente estructura

Teorema. *Sea X un conjunto que satisface la propiedad* $\underline{\quad ?_1 \quad}$ *y una función $F : X \to X$ que satisface la propiedad* $\underline{\quad ?_2 \quad}$*. Entonces existe $u \in X$ tal que $u = F(u)$,*

donde $?_1$ y $?_2$ son propiedades "no-vacías".

2. El Teorema del punto fijo de Brouwer

El primer teorema de punto fijo que veremos está diseñado para problemas en *dimensión finita*, esto quiere decir que $X \subseteq \mathbb{R}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1 (Brouwer (1911))**.** *Sea $C \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo y sea $F : C \to C$ una función continua. Entonces existe $u \in C$ tal que $u = F(u)$.*

Este teorema tiene varias demostraciones que usan herramientas diferentes: grado topológico (ver por ejemplo (Deimling, 1985)) o combinatoria (usando el Lema de Tucker o de Sperner (Nyman and Su, 2013)), entre otras. Acá solo veremos la idea detrás de una de esas demostraciones (ver el Teorema 3 del Capítulo 8 de Evans (2010)).

Demostración. Caso $N = 1$ En el caso de dimensión $N = 1$ el teorema es una consecuencia simple del teorema del valor intermedio. Si $F : [a, b] \to [a, b]$ entonces para cada $x \in [a, b]$ se cumple que $a \leq F(x) \leq b$, además, si F es continua entonces podemos considerar la función continua $g(x) = F(x) - x$ y notamos que $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$. Por lo tanto el TVI nos dice que debe existir $u \in [a, b]$ tal que $g(u) = 0$.

Caso $N \geq 2$ Este caso es mas difícil, solo daremos la idea detrás de una de las demostraciones en el caso en que $C = \overline{B}_1$, la bola unitaria cerrada, y cuando F es de clase C^1.[2]

Argumentamos por contradicción y suponemos que F no tiene puntos fijos en $\overline{B}_1$, esto quiere decir que $F(u) - u \neq 0$ para todo $u \in \overline{B}_1$. Bajo este supuesto, consideremos la función $R(u)$ que resulta de intersecar el rayo que parte de $F(u)$ con dirección a u con la esfera ∂B_1 (ver Figura 1). No es difícil verificar que la función $R : \overline{B}_1 \to \partial B_1$ define una función continua (de clase C^1 bajo nuestro supuesto) tal que $R(u) = u$ para todo $u \in \partial B_1$.

[2]El caso para F continua se hace mediante aproximación. Para un convexo compacto cualquiera, se puede construir un homeomorfismo $g : C \to \overline{B}_1$ lo que reduce el problema al caso de la bola cerrada.

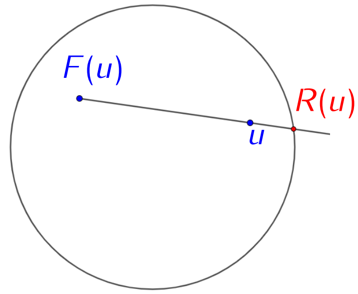

Figura 1: Definición de $R(u)$.

Ahora para $t \in [0,1]$ definimos dos funciones: la función $g_t(u) = tR(u) + (1-t)u$ que satisface $g_0 = Id$, $g_1 = R$ y además $g_t(u) = u$ para todo $u \in \partial B_1$; y la función h definida como

$$h(t) = vol_N(g_t(\overline{B}_1)) = \int_{g_t(\overline{B}_1)} 1 \mathrm{d}x = \int_{\overline{B}_1} \det Dg_t(x) \mathrm{d}x.$$

Un cálculo utilizando propiedades de álgebra lineal y la regla de la cadena permite demostrar que $h'(t) = 0$, es decir h es constante en el intervalo $[0,1]$, sin embargo esto es imposible pues $h(0) = vol_N(\overline{B}_1) > 0$ y

$$h(1) = vol_N(R(\overline{B}_1)) = vol_N(\partial B_1) = 0$$

pues la superficie $N-1$ dimensional ∂B_1 no tiene volumen N dimensional. ■

2.1. Aplicaciones del Teorema de Brouwer

- Como vimos antes, la existencia de $\sqrt{3}$ puede ser vista como la existencia de un punto fijo. En efecto, ya vimos que para $u > 0$

  $$u^2 = 3 \Leftrightarrow u = \frac{3}{u}.$$

  Notamos que si $F(u) = \dfrac{3}{u}$ entonces $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función continua, y además tenemos que

  $$F([1,3]) \subseteq [1,3],$$

  por lo tanto, como $[1,3]$ es un conjunto convexo y compacto, el teorema de Brouwer garantiza la existencia de u_0 tal que $u_0^2 = 3$. Mas aún tenemos la estimación que $1 \leq u_0 \leq 3$.

- Algo mas general que la existencia de raíces cuadradas es el Teorema Fundamental del Álgebra: Sea p un polinomio con coeficientes complejos, entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(c) = 0$.

La demostración de este teorema utilizando el Teorema de Brouwer requiere algunas herramientas previas que no veremos en este cursillo, como por ejemplo la existencia de $\sqrt[n]{f(z)}$ para ciertas funciones complejas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ver (Fort, 1952)

- El Teorema de las curvas de Jordan: Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una función continua, inyectiva tal que $g(0) = g(1)$. Entonces el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus g([0, 1])$ consiste exactamente de dos componentes conexas (por caminos).

  El uso del Teorema de Brouwer para demostrar el teorema de Jordan aparece en el siguiente hecho que parece evidente, pero que hay de demostrar:

  Dado un rectángulo y dos curvas continuas que conectan las caras opuestas del rectángulo respectivamente, entonces dichas curvas se intersecan.

  Mas precisamente, tenemos que

  Lema. *Sean $u, v : [-1, 1] \to [a, b] \times [c, d]$ funciones continuas que satisfacen*

$$u_1(-1) = a, \quad u_1(1) = b,$$

  y

$$v_2(-1) = c, \quad v_2(1) = d,$$

  entonces existen $t, s \in [-1, 1]$ tales que $u(t) = v(s)$, es decir, los caminos se intersecan.

  Demostración. Recordando que para $x \in \mathbb{R}^2$ se define $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, argumentamos por contradicción y supongamos que $u(t) \neq v(s)$ para todo t, s. Definamos $N(t, s) = \|u(t) - v(s)\|_\infty$, así nuestra hipótesis de contradicción nos dice que $N(t, s) > 0$ para todo t, s. Notar que $[-1, 1] \times [-1, 2] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$ y así la función $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \to [-1, 1] \times [-1, 1]$ definida como

$$F(t, s) = \frac{1}{N(t, s)} (v_1(s) - u_1(t), u_2(t) - v_2(s)) = (F_1(t, s), F_2(t, s)),$$

  es continua y satisface que $F([-1, 1] \times [-1, 1]) \subseteq \partial([-1, 1] \times [-1, 1])$, pues

$$\|F(t, s)\|_\infty = 1.$$

  Veamos que F no tiene puntos fijos, en efecto, si $F(t_0, s_0) = (t_0, s_0)$ entonces $|t_0| = 1$ o $|s_0| = 1$. Si por ejemplo $t_0 = -1$ entonces

$$F(t_0, s_0) = F(-1, s_0) = (-1, s_0),$$

pero esto implicaría que

$$-1 = \frac{v_1(s_0) - u_1(t_0)}{N(t,s)} = \frac{v_1(s_0) - a}{N(t_0,s_0)} \geq 0$$

pues $a \leq v_1(s) \leq b$ y $N(t_0, s_0) > 0$, lo que es una contradicción. Lo mismo ocurre con las otras posibilidades donde $|t_0| = 1$ o $|s_0| = 1$ (ejercicio).

Pero por otra parte como F es continua sobre el conjunto convexo y compacto $[-1,1]\times[-1,1]$, entonces el Teorema de Brouwer implica que F si tiene un punto fijo, lo que es una contradicción. ■

Para el resto de la demostración del teorema de Jordan utilizando este argumento ver (Maehara, 1984).

Ejercicio 1. Use el teorema de Brouwer para demostrar que para cada $a > 0$ existen $u_1 < 0$ y $u_2 > 0$ tales que $u_k^2 = a$ para $k = 1, 2$.

Ejercicio 2 (Teorema de Perron-Frobenius). Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz cuadrada tal que $a_{i,j} \geq 0$ (resp. positivas) para todo i, j. Demuestre que existe $\lambda \geq 0$ (resp. postivo) y $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tales que $u_i \geq 0$ (resp. positiva) para todo i y

$$Au = \lambda u,$$

es decir toda matriz real con entradas no-negativas (resp. positivas) tiene un valor propio no-negativo (resp. positivo) y su correspondiente vector propio tiene todas sus entradas no-negativas (resp. positivas).

3. El Teorema del punto fijo de Banach

Vimos en la introducción que ciertas ecuaciones diferenciales se pueden escribir como problemas de punto fijo. En este contexto una ecuación del tipo $u = F(u)$ tiene como incógnita a una función $u = u(t)$ y por lo tanto no podemos usar el Teorema de Brouwer para resolver este tipo de problemas, pues cualquier espacio razonable de funciones es *infinito* dimensional. Es por esto que necesitamos de un teorema que aplique en espacios infinito dimensionales o inclusos algunos espacios topológicos donde no hay estructura de espacio vectorial.

3.1. Conceptos básicos y el teorema

Definición 1 (Espacio métrico). *Diremos que un conjunto X y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ forman un espacio métrico si la función d satisface las siguientes propiedades:*

- *$d(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in X$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,*
- *$d(u, v) = d(u, v)$ para todo $u, v \in X$, y*
- *$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ para todo $u, v, w \in X$.*

Ejemplo 3.

- En $\mathbb{R}^N$ podemos considerar $d(u, v) = |u - v|$ donde $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{R}^N$ (por ejemplo la Euclidiana).
- En $C(I, \mathbb{R})$ podemos considerar $d(u, v) = \|u - v\|_\infty$ donde

  $$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|.$$

  Esta métrica se llama métrica uniforme.

En general, cualquier espacio vectorial (real o complejo) normado es un espacio métrico si se considera la métrica $d_{\|\cdot\|}(u, v) := \|u - v\|$. Recordar que para un espacio vectorial X una norma es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface

- $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in X$; $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, para todo $u \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in X$.

Definición 2 (Convergencia en un espacio métrico). *Dada una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) diremos que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u \in X$ si se cumple que*

$$d(u_n, u) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.

- La sucesión $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- La sucesión $u_n(t) = t^n$ converge a 0 en $(C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ pues

  $$d(u_n, 0) = \|u_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} t^n = 2^{-n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

- La sucesión $u_n(t) = t^n$ no converge a 0 en $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ pues

  $$d(u_n, 0) = \|u_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} t^n = 1.$$

Definición 3 (Sucesión de Cauchy). *Diremos que una sucesión* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* (X,d) *si se cumple que*

$$d(u_n,u_m)\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ejemplo 5.

- Toda sucesión convergente es de Cauchy pues si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ entonces
$$d(u_n,u_m)\le d(u_n,u)+d(u,u_m)\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$
- Una sucesión de Cauchy no es necesariamente convergente: consideremos el conjunto $X=(0,1)$ y la métrica $d(u,v)=|u-v|$. Notar que la sucesión $u_n=n^{-1}$ es de Cauchy en (X,d) sin embargo no existe $u\in X$ tal que $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Ejercicio 3. Considerar la sucesión $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ en el espacio $(\mathbb{Q},|\cdot|)$. Muestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy pero no existe $u\in\mathbb{Q}$ tal que $|u_n-u|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Definición 4 (Espacio métrico completo). *Diremos que* (X,d) *es un espacio métrico* completo *si es que toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente.*

Ejemplo 6.

- El espacio $(\mathbb{R},|\cdot|)$ es un espacio métrico completo[3]. Como consecuencia se obtiene que $(\mathbb{R}^N,\|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo *para cualquier norma*.
- El espacio $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio métrico completo.
- Cualquier subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, es completo. Por ejemplo $([0,1],|\cdot|)$ es completo.
- Como lo muestra la sucesión $u_n=n^{-1}$, el espacio $((0,1),|\cdot|)$ no es completo.
- El espacio $C([a,b],\mathbb{R})$ no es completo si usamos la métrica
$$d(u,v)=\int_a^b|u(t)-v(t)|\,\mathrm{d}t.$$
- El espacio $(C((0,1),\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ no es completo. Es mas, ni siquiera es un espacio *razonablemente* bien definido pues por ejemplo la función $u(t)=t^{-1}\in C((0,1),\mathbb{R})$ pero $\|u\|_\infty=+\infty$.

[3] Esto es consecuencia por ejemplo de la definición de $\mathbb{R}$ (si es que uno define $\mathbb{R}$ como la *completación* de $\mathbb{Q}$ bajo $|\cdot|$) o bien del axioma del supremo (*todo conjunto no vació y acotado superiormente tiene un supremo*).

(Ver Rudin (1976) para algunas de las demostraciones de las afirmaciones anteriores).

Con todo lo anterior podemos enunciar el

Teorema 3.1 (Banach (1922)). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y sea* $F : X \to X$ *una función para la que existe una constante* $0 < L < 1$ *tal que*[4]

$$d(F(u), F(v)) \leq Ld(u, v). \tag{5}$$

Entonces existe $u \in X$ *tal que* $u = F(u)$*, mas aún, dicho* u *es único.*

Idea de la demostración. Sea $u_0 \in X$ un elemento cualquiera de X y definamos para $n \geq 1$ la sucesión $u_n = F(u_{n-1})$.

Paso 1: Probar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Usando (5) se puede demostrar que

- Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$d(u_{n+k}, u_n) \leq L^n d(u_k, u_0).$$
- Para $k \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$d(u_k, u_0) \leq \frac{1 - L^k}{1 - L} d(u_1, u_0).$$

En consecuencia se obtiene que para $k, n \in \mathbb{N}$ se cumple
$$d(u_{n+k}, u_n) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(u_1, u_0),$$
pero como $0 < L < 1$ esto implica que $d(u_{n+k}, u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sea cual sea $k \in \mathbb{N}$.

Paso 2: Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces existe $u \in X$ tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. Probemos que u es el punto fijo que buscamos

$$\begin{aligned} d(u, F(u)) &\leq d(u, u_n) + d(u_n, F(u)) \\ &= d(u, u_n) + d(F(u_{n-1}), F(u)) \\ &\leq d(u, u_n) + Ld(u_{n-1}, u) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $d(u, F(u)) = 0$ y en conclusión $u = F(u)$.

Paso 2: El punto fijo encontrado es único. Si es que $\tilde{u}$ es otro punto fijo, entonces

$$d(u, \tilde{u}) = d(F(u), F(\tilde{u})) \leq Ld(u, \tilde{u}),$$

por lo tanto $d(u, \tilde{u}) = 0$ y en consecuencia $u = \tilde{u}$. ■

[4]Una función que satisface (5) para cierto $L > 0$ se dice *Lipschitz continua*. Cuando además $L < 1$, tal función se llama *contracción*. Por lo anterior este teorema a veces se conoce como el Principio de contracción de Banach.

3.2. Aplicaciones del teorema de Banach

3.2.1. Teorema de existencia y unicidad (local) para EDOs

Vimos que dada una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ entonces la EDO

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{6}$$

se puede reescribir como

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s = F(u)(t).$$

Es decir nos considerar un espacio apropiado de funciones X y encontrar $u \in X$ tal que $u = F(u)$. En este contexto es conveniente usar el espacio

$$X = C(I, \mathbb{R}^N) = \left\{u : I \to \mathbb{R}^N : u \text{ es una función continua sobre el intervalo } I\right\},$$

donde $t_0 \in I$, I un intervalo compacto, equipado con la métrica uniforme (pues así es un espacio métrico completo).

Descubramos las hipótesis adicionales que hay que poner sobre la función f y el intervalo I para poder utilizar el Teorema de Banach. Lo primero es que queremos que $F : X \to X$, es decir queremos que F tome funciones continuas y entregue funciones continuas, en otras palabras la aplicación

$$t \overset{\varphi}{\mapsto} u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s$$

debe ser una función continua sobre I cuando u es una función continua sobre I. Gracias al Teorema fundamental del Cálculo sabemos que si por ejemplo $f(t, u)$ es una función continua en ambas variables, entonces φ es continua sobre I (de hecho es diferenciable con derivada $f(t, u(t))$).

La condición mas importante es que queremos que F satisfaga (5), es decir, debemos encontrar $0 < L < 1$ tal que para cada $u, v \in X$

$$\left\|F(u) - F(v)\right\|_\infty \leq L \left\|u - v\right\|_\infty .$$

Estimemos entonces $\left\|F(u)-F(v)\right\|_\infty$: Supongamos que $t>t_0$ (el caso $t<t_0$ es análogo)

$$\begin{aligned}\left\|F(u)-F(v)\right\|_\infty &= \sup_{t\in I}\left|u_0+\int_{t_0}^t f(s,u(s))\mathrm{d}s-\left(u_0-\int_{t_0}^t f(s,v(s))\mathrm{d}s\right)\right|\\ &= \sup_{t\in I}\left|\int_{t_0}^t (f(s,u(s))-f(s,v(s)))\mathrm{d}s\right|\\ &\leq \sup_{t\in I}\int_{t_0}^t \left|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right|\mathrm{d}s\\ &\leq ?.\end{aligned}$$

Para completar el cálculo debemos decir algo sobre la función f. Algo que podemos suponer es que f satisface la siguiente propiedad: existe $M>0$ tal que

$$|f(s,u)-f(s,v)|\leq M\,|u-v| \qquad \forall\, s,u,v, \tag{7}$$

pues de ser así entonces tendríamos que

$$\begin{aligned}\left\|F(u)-F(v)\right\|_\infty &\leq \sup_{t\in I}\int_{t_0}^t \left|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right|\mathrm{d}s\\ &\leq \sup_{t\in I}\int_{t_0}^t M\left|u(s)-v(s)\right|\mathrm{d}s\\ &\leq \sup_{t\in I}\int_{t_0}^t M\sup_{s\in I}\left|u(s)-v(s)\right|\mathrm{d}s\\ &\leq \sup_{t\in I}\int_{t_0}^t M\left\|u-v\right\|_\infty\mathrm{d}s\\ &= M\sup_{t\in I}\left|t-t_0\right|\left\|u-v\right\|_\infty,\end{aligned}$$

Es decir, si $I=[t_0-r,t_0+r]$ para cierto $r>0$ entonces hemos verificado que

$$\left\|F(u)-F(v)\right\|_\infty \leq Mr\left\|u-v\right\|_\infty$$

y por lo tanto si $r>0$ es tal que $L:=Mr<1$ entonces F satisface (5) y podemos aplicar el Teorema de Banach para concluir que existe una única $u\in C(I,\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u(t)=u_0+\int_{t_0}^t f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

pero como vimos antes, el Teorema fundamental del cálculo nos dice que si $f(t,u)$ y u son funciones continuas, entonces la función φ es diferenciable y por lo tanto obtenemos que u es de hecho de clase C^1 y

$$u'(t)=f(t,u(t)),\ \ u(t_0)=u_0.$$

Todo lo anterior se resume en el siguiente

Teorema 3.2 (Picard (1893)-Lindelöf (1894) - versión simplificada). *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función continua para la cual existe $M > 0$ tal que*[5]

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq M\,|u - v| \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ u, v \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces para cada $u_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r < M^{-1}$ existe una única función $u : [t_0 - r, t_0 + r] \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 solución de la EDO

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ \ u(t_0) = u_0.$$

Observación. Algunos comentarios sobre el Teorema 3.2:

- El teorema fue demostrado con anterioridad al Teorema de Banach. La técnica utilizada en la demostración del teorema de existencia y unicidad es la misma utilizada en la demostración del teorema de Banach: definir la sucesión $u_n = F(u_{n-1})$. Este método se conoce como el *método de aproximaciones sucesivas de Picard*.
- El teorema sigue siendo cierto si en vez de suponer que la función f está definida como $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, se cambia por una función acotada y continua $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ donde J es un intervalo que contiene a y_0 y Ω un abierto que contiene a u_0, y en vez de pedir la condición (7) *para todo $s \in J$, $u, v \in \Omega$* se puede pedir solo valga en una vecindad de (t_0, u_0). El resultado de estas hipótesis se conoce como el teorema de existencia y unicidad *local*.
- El teorema sigue siendo válido incluso si se supone que en vez de trabajar con funciones a valores en $\mathbb{R}^N$ se consideran funciones a valores en un *espacio de Banach E*. Para ello "solo" hay que definir lo que significa la derivada y la integral en dicho contexto y que tengan propiedades similares a las usadas en la demostración del Teorema 3.2. Esto último efectivamente se puede hacer, ver Cartan (1967).

Ejemplo 7.
- Consideremos la EDO lineal $u' + pu = q\ \ u(t_0) = u_0$, para funciones continuas p, q. En este caso

$$f(t, u) = q(t) - p(t)u$$

es continua y satisface

$$|f(t, u) - f(t, v)| = |q(t) - p(t)u - q(t) + p(t)v| = |p(t)|\,|u - v|\,,$$

luego si es que la función p es acotada, i.e. $|p(t)| \leq M$ para todo t entonces f satisface lo pedido por el teorema y obtenemos la existencia y unicidad para este tipo de EDOs.

[5]Una función que satisface esta propiedad se dice que es Lipschitz en su segunda variable.

- Considere la EDO separable (autónoma)

$$\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Notar que la función $f(t,u) = \sqrt[3]{u}$ es continua pero no satisface

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq M\,|u - v|$$

para ninguna constante $M > 0$ para $(t,u) \approx (0,0)$ (que es lo que realmente importa). Esto se ve reflejado en que $u_1(t) \equiv 0$, $u_1(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, y $u_2(t) = -\left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ son 3 soluciones distintas de (8).

Ejercicio 4. Observe que la EDO de segundo orden $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ con condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$ corresponde a la ecuación de movimiento de un péndulo que se libera desde el reposo con ángulo $\theta_0 \neq 0$. Muestre que esta ecuación admite una única solución.

Ejercicio 5. Para $u \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ defina $F(u)(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} u(s)\mathrm{d}s$. Muestre que F tiene un único punto fijo. Encuentre dicha función u.

Ejercicio 6. En el espacio $\mathbb{R}^N$ considere la métrica/norma

$$d_\infty(u,v) = \|u - v\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,N} |u_i - v_i|\,.$$

Use el Teorema de Banach para demostrar que la ecuación matricial $Au = b$ admite una única solución si es que los coeficientes de la matriz $A = (a_{ij})_{i,j}$ satisfacen

$$\sum_{j=1}^{N} \left|a_{ij} - \delta_{ij}\right| \leq k < 1 \qquad \forall\, i,$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ayuda: Escriba el problema como $u = b - (A - I)u = F(u)$ donde $I = (\delta_{ij})_{i,j}$ es la matriz identidad.

3.2.2. Un ejemplo de EDP

Ejemplo 8. Considere la EDP

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = f(u(t)) & \text{para } t \in B_1 \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial B_1, \end{cases} \tag{9}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua para la cual existe $M > 0$ tal que $|f(u) - f(v)| \leq M\,|u - v|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Queremos demostrar que existe una única solución a (9) y para ello necesitamos un resultado de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales:

Teorema 3.3. [6] *Sea $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, entonces existe una función $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = h(t) & \text{para } t \in B_1 \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t) = 0 & \text{para } t \in \partial B_1. \end{cases}$$

Mas aún, esta función tiene la forma[7]

$$u(t) = \int_{B_1} G(t,s)h(s)\mathrm{d}s =: S(h)(t),$$

y existe una constante $C_0 > 0$ que no depende de h tal que

$$\|u\|_{C^2} = \left\|S(h)\right\|_{C^2} \le C_0 \left\|h\right\|_{C^1}.$$

Observación.

- El espacio C^1 es el conjunto de las funciones continuamente diferenciables y se le puede poner la métrica/norma

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} \left\|\partial_i u\right\|_\infty.$$

- El espacio C^2 es el conjunto de las funciones dos veces continuamente diferenciables y se le puede poner la métrica/norma

$$\|u\|_{C^2} = \|u\|_{C^1} + \sum_{i,j=1}^{N} \left\|\partial_{i,j} u\right\|_\infty.$$

Estos dos espacios son completos.

Observación. Se puede verificar (ver Evans (2010)) que esa función $G(t,s)$ es de la forma

$$G(t,s) = \phi(s-t) - \phi\left(|t|\left(s - \hat{t}\right)\right),$$

donde $\hat{t} = |t|^{-2}\, t$ y

$$\phi(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|t| & \text{si } N = 2, \\ C_N\, |t|^{2-N} & \text{si } N \ge 3. \end{cases}$$

[6] Este teorema no está escrito en su máxima generalidad. Para hacerlo se necesita utilizar los espacios de Hölder $C^{k,\alpha}$. Ver el Corollary 4.14 en Gilbarg and Trudinger (2001).

[7] Notar que S es lineal en h pues para cada t se cumple que

$$S(h+g)(t) = \int_{B_1} G(t,s)(h(s)+g(s))\mathrm{d}s = \int_{B_1} G(t,s)h(s)\mathrm{d}s + \int_{B_1} G(t,s)g(s)\mathrm{d}s = S(h)(t) + S(g)(t).$$

Usando el Teorema 3.3 tenemos que (9) es equivalente a encontrar u tal que

$$u = S(f(u)) =: F(u).$$

Usaremos el Teorema de Banach en el espacio $X = C^1$ (que también es completo) y notamos que si u es de clase C^1 entonces de acuerdo al Teorema 3.3 la función $F(u)(t) = S(f(u(t)))$ es de clase C^2 y por lo tanto también de clase C^1, es decir $F : X \to X$. Adicionalmente como $S(h_1) - S(h_2) = S(h_1 - h_2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\|F(u) - F(v)\right\|_{C^1} &= \left\|S(f(u)) - S(f(v))\right\|_{C^1} \\ &= \left\|S(f(u) - f(v))\right\|_{C^1} \\ &\leq \left\|S(f(u) - f(v))\right\|_{C^2} \\ &\leq C_0 \left\|f(u) - f(v)\right\|_{C^1} \\ &\leq C_0 M \left\|u - v\right\|_{C^1}, \end{aligned}$$

es decir si $M < C_0^{-1}$ entonces tenemos que F satisface (5) y el Teorema de Banach aplica para deducir la existencia de u solución de (9).

4. Aplicaciones varias y generalizaciones

4.1. Otras aplicaciones del Teorema de Banach

Teorema 4.1 (Teorema de la función inversa). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función de clase C^1 tal que $Df(x_0)$ es invertible. Entonces la función f es inyectiva "cerca" de x_0, es decir, para cada y cerca de $f(x_0)$ existe un único $g(y)$ cerca de x_0 tal que $f(g(y)) = y$.*

Idea de la demostración. Resolver la ecuación $f(x) = y$ es equivalente a resolver la ecuación

$$x = x + (Df(x_0))^{-1}(y - f(x)) = F(x).$$

Se verifica que F satisface las condiciones del Teorema de Banach cuando x está *cerca* de x_0 ■

Ejemplo 9. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que $f'(x_0) \neq 0$. Si por ejemplo $f(x_0) > 0$ esto quiere decir que f es estrictamente creciente en una vecindad de x_0, y por lo tanto f ha de tener una inversa en dicha vecindad.

Teorema 4.2 (Teorema de la función implícita). *Sea $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $D_y f(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces para todo x "cerca" de x_0 existe $g(x)$ cerca de y_0 tal que $f(x, g(x)) = 0$*

Ejemplo 10. Este teorema entrega condiciones para resolver ecuaciones no-lineales como $x^2 + y^2 = 1$. En este caso $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ y si $(x_0, y_0) = (0, 1)$ esto nos dice que $D_y f(0, 1) = 2 \neq 0$ por lo tanto para $x \approx 0$ podemos encontrar $g(x)$ tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$. Esto es claro pues si $y > 0$ (esta sería la vecindad de $y_0 = 1$) podemos despejar y en la ecuación $f(x, y) = 0$ para obtener $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Esto no ocurre en el punto $(1, 0)$ pues $D_y f(1, 0) = 0$ no es invertible, y se ilustra en que no es posible encontrar una función $g(x)$ que satisfaga $x^2 + g(x)^2 = 1$ en una vecindad de $x = 1$.

Observación. Los Teoremas 4.1 y 4.2 se encuentran en el libro de Cartan (1967) o de Deimling (1985) en el contexto de espacios de Banach.

Teorema 4.3 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $g_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, M$ funciones de clase C^1. Si $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es tal que*

$$f(x_0) = \inf \{f(x) : g_i(x) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, M\},$$

entonces existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ no todos nulos simultáneamente tales que

$$\lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0.$$

Observación. Este teorema se puede encontrar en el libro de Deimling (1985) en el contexto de espacios de Banach.

4.2. Otros teoremas de punto fijo

El siguiente teorema generaliza el teorema de Brouwer a dimension infinita.

Teorema 4.4 (Schauder (1930))**.** *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $C \subseteq E$ un conjunto convexo y compacto. Si $F : C \to C$ es continua entonces F tiene un punto fijo $u \in C$.*

Definición 5. *Diremos que $F : X \to X$ es una función compacta si F es continua y para cada conjunto $Y \subseteq X$ acotado entonces $F(Y)$ tiene clausura compacta.*

Observación. En espacios métricos, la definición anterior se puede escribir como: $F : X \to X$ es una función compacta si F es continua y para cada sucesión acotada $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces $(F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

Bajo esta definición se puede verificar que el Teorema 4.4 es equivalente a

Teorema 4.5 (Schauder (1930))**.** *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $C \subseteq E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Si $F : C \to C$ es compacta entonces F tiene un punto fijo $u \in C$.*

y a

Teorema 4.6 (Schauder (1930)). *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $C \subseteq E$ un conjunto convexo y cerrado. Si $F : C \to C$ es continua y satisface que $F(C)$ tiene clausura compacta, entonces F tiene un punto fijo $u \in C$.*

Observación. Tychonoff (1935) demostró que este teorema sigue siendo cierto en espacios mas generales que espacios de Banach (espacios vectoriales localmente convexos).

Una consecuencia importante del Teorema 4.4 es el

Teorema 4.7 (Peano (1890)). *Suponga que $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ es continua en una vecindad del punto (t_0, u_0). Entonces existe una solución $u : (t_0 - r, t_0 + r) \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 al problema de valor inicial*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \;\; u(t_0) = u_0.$$

Observación. Notar que a diferencia del Teorema de Picard-Lindelöf, este teorema solo pide la continuidad de la función f, sin embargo al relajar esa hipótesis se pierde la unicidad. Esto se puede apreciar en la EDO (8), pues la función $f(t, u) = \sqrt[3]{u}$ es continua en una vecindad de $(0, 0)$, lo que es suficiente para la existencia de soluciones, pero al no ser Lipschitz continua se pierde la unicidad.

Observación. Este teorema (y el de Picard-Lindelöf) se puede demostrar de manera relativamente independiente algún teorema de punto fijo. La idea consiste en aproximar f por funciones f_n que satisfacen la condición $|f_n(t, u) - f_n(t, v)| \leq M_n |u - v|$, luego proceder como en la demostración del Teorema de Banach y definir $u_0(t) = u_0$ y para $n \geq 1$

$$u_n(t) = F_{n-1}(u_{n-1})(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f_{n-1}(s, u_{n-1}(s)) \mathrm{d}s.$$

Esto genera una sucesión de funciones continuas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se demuestra converge (mediante una subsucesión gracias al Teorema de Arzelà-Ascoli) a una función u que es la solución buscada.

Otro corolario del Teorema de Schauder es

Teorema 4.8 (Schaefer (1955)). *Sea $(X, \|\|)$ un espacio de Banach y $F : X \to X$ una función continua y* compacta. *Si además el conjunto*

$$C = \{u \in X : u = \lambda F(u) \text{ para algún } \lambda \in [0, 1]\}$$

es acotado, entonces F admite un punto fijo.

El siguiente teorema muestra que la hipótesis de compacidad es muy importante.

Teorema 4.9 (Klee (1955)). *Sea E un espacio de Banach infinito dimensional y $X \subset E$ un conjunto cerrado, acotado, convexo pero no-compacto. Entonces existe una función $F : X \to X$ continua que no tiene puntos fijos.*

Otro teorema de punto fijo que de cierto modo combina los teoremas de Banach y Schauder es el siguiente:

Teorema 4.10 (Krasnosel'skiĭ (1954)). *Sea E un espacio de Banach, $X \subseteq E$ un convexo cerrado. Sean $f, g : X \to E$ tales que*

- *$f(u) + g(v) \in X$ para todo $u, v \in X$.*
- *f es continua y compacta.*
- *g satisface $\left\|g(u) - g(v)\right\| \leq L \|u - v\|$ para todo $u, v \in X$.*

Entonces la función $F(u) = f(u) + g(u)$ tiene un punto fijo.

Es importante mencionar que a pesar de que la gran mayoría de los teoremas de punto fijo pueden ser visto como "corolarios" (bastante elaborados dicho sea de paso) ya sea del Teorema de Brouwer o del Teorema de Banach, el hecho de tener teoremas de punto fijo con hipótesis de diverso tipo permite su aplicación a problemas igualmente diversos.

Referencias

Banach, Stefan, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** 1922, https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181. MR 3949898

Brezis, Haïm and Xavier Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solutions*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **1** 1998, no. 2, http://eudml.org/doc/196173. MR 1638143

Brouwer, L. E. J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** 1911, no. 1, https://doi.org/10.1007/BF01456931. MR 1511644

Cartan, Henri. 1967. *Calcul différentiel*, Hermann, Paris. MR 0223194

Deimling, Klaus. 1985. *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin. MR 787404

Evans, Lawrence C. 2010. *Partial differential equations*, Second, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI. MR 2597943

Fort, M. K., Jr., *Some properties of continuous functions*, Amer. Math. Monthly **59** 1952, https://doi.org/10.2307/2306806. MR 47749

Gilbarg, David and Neil S. Trudinger. 2001. *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1998 edition. MR 1814364

Klee, V. L., Jr., *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** 1955, https://doi.org/10.2307/1992947. MR 69388

Krasnosel′ skiĭ, M. A., *Some problems of nonlinear analysis*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **9** 1954, no. 3(61)MR 0075565

Lindelöf, Ernst Leonard, *Sur lápplication de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de lÁcadémie des sciences 1894, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3074r.

Maehara, Ryuji, *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly **91** 1984, no. 10, https://doi.org/10.2307/2323369. MR 769530

Nyman, Kathryn L. and Francis Edward Su, *A Borsuk-Ulam equivalent that directly implies Sperner's lemma*, Amer. Math. Monthly **120** 2013, no. 4, https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.04.346.MR 3035127

Peano, G., *Démonstration de líntégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann. **37** 1890, no. 2, https://doi.org/10.1007/BF01200235. MR 1510645

Picard, Emile, *Sur lápplication des méthodes dápproximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **9** 1893, http://eudml.org/doc/234079 (fre).

Rudin, Walter. 1976. *Principles of mathematical analysis*, Third, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf. MR 0385023

Schaefer, Helmut, *Über die Methode der a priori-Schranken*, Math. Ann. **129** 1955, https://doi.org/10.1007/BF01362380. MR 71723

Schauder, J., *Der fixpunktsatz in funktionalraümen*, Studia Mathematica **2** 1930, no. 1, http://eudml.org/doc/217247 (ger).

Tychonoff, A., *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** 1935, no. 1, https://doi.org/10.1007/BF01472256.MR 1513031