Curso Electivo: Métodos Variacionales

Profesor: Hernán Castro, hcastro@utalca.cl

Muchos problemas de interés en análisis suelen ser de la siguiente forma: Encontrar $u \in V$ tal que

$$f(u) = 0, \tag{1}$$

donde usualmente V es un espacio de Banach, y f es una función no lineal. Una clase particular de estos problemas son ecuaciones de tipo Euler-Lagrange, esto es, ecuaciones de la forma

$$DE(u) = 0, \tag{2}$$

donde E es una función (Fréchet) diferenciable en un espacio de Banach, y DE denota su derivada. Cuando una ecuación como (1) se puede escribir en la forma (2) diremos que la ecuación tiene una *formulación variacional* y el propósito principal de este curso es mostrar algunos métodos para resolver ecuaciones que tienen dicha formulación.

Pre-requisitos: Análisis funcional

Contenidos del curso

Parte 0: Preliminares

1. Conceptos de diferenciabilidad en espacios de Banach.
2. Breve introducción a espacios de Sobolev.

Parte 1: Métodos de minimización

1. Semi-continuidad inferior y compacidad.
2. Minimización con restricciones: multiplicadores de Lagrange.
3. Principio de concentración-compacidad.

Parte 2: Métodos Minimax

1. La condición de Palais-Smale.
2. El lema del paso de la montaña.
3. Algunas aplicaciones

Bibliografía

1. A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis 1973.
2. H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 1983.
3. H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
4. I. Ekeland, R. Témen, *Convex Analysis and Variational Problems*, SIAM 1999.
5. P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, I & II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1984.
6. P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, I & II*, Rev. Mat. Iberoamericana 1985.
7. M. Struwe, *Variational Methods*, Springer 2008.