Introducción a los Espacios de Sobolev y EDP

Profesor: Hernán Castro

Tercer Trimestre

Primera sesión: Viernes 28 de Septiembre a las 14:20.

Los espacios de Sobolev son una de las herramientas básicas en el proceso de búsqueda de soluciones de diversos tipos de ecuaciones diferenciales. Estos espacios suelen ser espacios mas grandes que los espacios de funciones continuas y diferenciables, como C^1, C^2 o C^∞. El mayor tamaño permite tener mas "candidatos" a ser solución, lo que puede hacer la tarea de búsqueda mas sencilla.

Además del tamaño del espacio, los espacios de Sobolev, denotados como $W^{k,p}$, son sub-espacios de los espacios L^p, de donde heredan algunas de sus propiedades funcionales que resultan ser útiles: ser espacios de Banach (o Hilbert si $p = 2$), ser reflexivos si $1 < p < \infty$, etc. Por ejemplo, la reflexividad permite dotar a los espacios de topologías fuerte y débil, lo que hace que la búsqueda de compactos sea un poco mas fácil que en C^1 o C^∞. Cabe señalar que la compacidad es una herramienta bastante poderosa en la búsqueda de soluciones de ecuaciones del tipo $F(u) = 0$ con $u \in K$, o en problemas como

$$\min_{u\in K} f(u)$$

donde K es un compacto. Ambos escenarios aparecen en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales.

El curso estará dividido en dos partes, la primera dedicada al estudio de algunas propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev, entre las cuales se destacan las llamas *inclusiones de Sobolev* que nos dicen cuando las funciones en $W^{k,p}$ pertenecen a espacios L^q con $q > p$, o incluso a espacios de funciones diferenciables C^m para cierto m.

En la segunda parte del curso definiremos los conceptos de *solución débil* y *solución clásica* para ciertas EDPs, luego utilizaremos las herramientas desarrolladas respecto a espacios de Sobolev para probar la existencia de dichas soluciones débiles para luego demostrar un resultado que garantiza que la solución débil encontrada es de hecho una solución clásica (por ejemplo de clase C^2).

Como pre-requisitos para el curso es importante tener un buen manejo de cálculo en varias variables (integración en varias variables, el teorema de la divergencia, etc) y conocer los espacios L^p. También es deseable conocer algunos resultados de análisis funcional como los teoremas de representación de Riesz y de Lax-Milgram para espacios de Hilbert.

Contenidos

Parte 1: Espacios de Sobolev

1. Derivada débil. Resultados de aproximación.
2. Teorema de extensión. Trazas.
3. Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg.
4. Inclusiones de Sobolev. Teorema de Morrey.
5. Compacidad, teorema de Rellich-Kondrachov.

Parte 2: Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas.

1. Formulación débil. Principio de Dirichlet.
2. EDPs elípticas de 2do orden.
3. Regularidad elíptica: regularidad interior y hasta la frontera.

Bibliografía

1. H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer 2011.
2. R. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier 2003.
3. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 2010.
4. D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial diferential equations of second order*, Springer 2001.